ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Osservazioni sul pianeta Venere fatte al R. Osservatorio del Collegio Romano in novembre e dicembre del 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

Nella mia Nota del 17 novembre ho reso conto all'Accademia delle numerose osservazioni fatte sul pianeta Venere durante l'estate del 1895 al R. Osservatorio del Collegio Romano, dalle quali conclusi, che la durata della rotazione molto probabilmente doveva essere di giorni 224,7, cioè eguale alla rotazione siderea del pianeta. Ora annunzio all'Accademia, che le successive osservazioni fatte in ottime circostanze ci portano alla stessa conclusione. La nostra serie termina col 19 dicembre, avendo escluso quelle fatte con aria non buona: anche in questa serie abbiamo avuto lunghi intervalli fra la prima ed ultima osservazione di una stessa giornata, come ad esempio nel 28 novembre, nel qual giorno la prima osservazione fu fatta alle $5^h.45^m$ e l'ultima alle 11^h, nel quale intervallo furono sempre osservate le stesse particolarità sulla parte illuminata dell'astro, mentre non abbiamo più veduto nulla sulla parte in ombra.

Astronomia. — *Seguito delle osservazioni della cometa Perrine.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Nella mia Nota precedente ho avuto l'onore di comunicare all'Accademia le tre prime osservazioni sulla cometa Perrine, fatte da me all'equatoriale di $0^m.25$ di apertura. Accennava allora alla possibilità che l'astro

divenisse ben lucente, benchè in condizioni sfavorevolissime per la estrema prossimità col sole. Non mancava di far osservare che la congettura posava sopra i primi saggi d'orbita, i quali potevano essere ben difettosi. Ed infatti la reale distanza perielia risultò ben maggiore di quella che era calcolata sopra i quattro primi dì d'osservazioni, d'onde l'intensità luminosa, pur dedotta con una formola che mal s'adatta alle comete, discese nel massimo alla terza parte della presunta in principio.

L'astro è attualmente serotino, ma tramonta quando ancora è vivo il crepuscolo occidentale, nè potei fare osservazioni recenti. Ecco quelle che furono fatte prima del passaggio dell'astro per il perielio, da me e dal dott. Peyra, assistente dell'Osservatorio del Collegio Romano:

		Ascensione retta apparente	declinazione apparente	Osservatore
1895 Dic. 3	$18^h\,11^m\,1^s$ tm RCR	$14^h\,42^m\,9^s.87$ (9.565_n);	$-11°\,16'\,28''.1$ (0.813)	P.
» » 4	18 22 30 »	14 48 44. 84 (9.555_n);	-12 36 22. 4 (0.820)	M.
» » 8	17 59 27 »	15 23 22. 79 (9.618_n);	-18 54 30. 9 (0.815)	P.
» » 8	18 17 14 »	15 23 30. 94 (9.600_n);	-18 55 48. 6 (0 824)	M.
» » 8	18 35 39 »	15 23 39. 14 (9.577_n);	-18 57 8. 5 (0.833)	P.
» » 8	18 47 21 »	15 23 44. 43 (9.560_n);	-18 57 58. 7 (0.839)	M.
» » 9	18 6 38 »	15 35 4. 92 (9.624_n);	-20 44 59. 4 (0.816)	M.
» » 9	18 20 47 »	15 35 12. 19 (9.610_n);	-20 46 2. 2 (0.824)	P.
» » 9	18 42 8 »	15 35 23. 37 (9.584_n);	-20 47 48. 5 (0.839)	M.

Matematica. — Il Presidente BRIOSCHI dà comunicazione della seguente lettera, ricevuta dal Corrispondente V. VOLTERRA.

« Illustre signor Presidente,

« Torino, 1 gennaio, 1895.

« Mi permetta di comunicare alla S. V. una breve replica alla Nota del prof. Peano inserita nel fascicolo 11° (2° sem. 1895) dei Rendiconti dell'Accademia.

« Relativamente a quanto trovasi detto in principio di quella Nota, mi sembra che non valga la pena di spendere alcuna parola, giacchè nessuno può mettere in dubbio la priorità mia tanto rispetto al trattare la questione, quanto riguardo alla idea fondamentale che ne forma il punto di partenza; nè alcun dubbio può nascere circa la originalità di quella idea che a me nacque, come esposi nelle mie lezioni dell'anno scorso, cercando un esempio atto ad illustrare il concetto emesso da Hertz di sostituire, nell'esame di un fenomeno naturale, alla considerazione delle forze, quella dei moti nascosti; e non occorse valermi della questione del gatto, cui accenna il Peano, questione del resto sulla quale egli si limitò a scrivere pel suo giornale una semplice e modesta recensione di lavori altrui. Non è corretto tro-

vare, come dice il Peano, identità fra due problemi di meccanica essenzialmente diversi, e trattati con metodi diversi per la sola ragione che è comune ad ambedue l' impiego di principî fondamentali di questa scienza; se ciò potesse pensarsi, si potrebbe sempre ricondurre due problemi meccanici qualunque ad un solo, perchè ambedue debbono necessariamente farsi dipendere dagli stessi principî. Non vale la pena di spendervi alcuna parola anche perchè l'articolo del Peano è quasi totalmente la riproduzione di quanto egli aveva già esposto in una Nota presentata all'Accademia di Torino nella seduta del 19 maggio u. s. e che il prof. Peano ritirò, dopo avermi comunicato per iscritto che egli stesso riconosceva il proprio errore. Ed infatti basta una elementare conoscenza delle funzioni ellittiche per accorgersi che, avendo io ottenuta la soluzione del problema mediante queste trascendenti, era impossibile che il Peano pervenisse alla soluzione della stessa questione senza ricorrere ad integrazioni. Il calcolo del Peano presentato a Torino il 5 maggio è applicabile solo ad un caso particolare della questione (quello in cui gli assi d'inerzia siano eguali) che io avevo già trattato nella Memoria presentata il 1° febbraio alle *Astronomische Nachrichten* di Kiel. Ma è da osservare precipuamente che qualsiasi calcolo applicato alla terra e fondato su questo caso particolare, come ha fatto il Peano, deve condurre di necessità a resultati del tutto inattendibili, come vedrà chi legge le conclusioni della detta Nota del Peano, giacchè la eccentricità terrestre che viene trascurata, è il fattore principale nell'andamento del fenomeno, tantochè non si può giustificare in alcun modo il procedimento del Peano, nemmeno ritenendolo limitato alle deduzioni più sommarie. È inutile pure, mi sembra, il rispondere agli appunti mossi dal Peano riguardo all'avere io introdotto nei miei calcoli delle derivazioni, secondo lui non necessarie, ed infatti esse sono indispensabili per eliminare mediante le formole del Poisson i coseni degli angoli che gli assi d'inerzia formano con quelli fissi; e i cultori della meccanica analitica ravviseranno immediatamente nel procedimento che ho tenuto, il classico metodo usato da Lagrange e da tutti i suoi continuatori, il quale porta di necessità le derivazioni che ho eseguite.

« Osserverò che io non ho mai detto che i moti interni terrestri non possono produrre nella ipotesi della rigidità altro che piccole oscillazioni del polo. Anzi, nella Memoria delle *Astr. Nachr.* ho mostrato che in un sistema simmetrico, scelto ad arbitrio il moto del polo, si possono sempre trovare i moti interni capaci di produrlo. Di quì discende evidentemente per continuità che, scelta una conveniente traiettoria del polo la quale si avvicini abbastanza a quelle circolari che il polo descrive quando i moti interni sono nulli, essa potrà corrispondere a moti interni tanto piccoli quanto si vuole, ed è pure evidente che una simile traiettoria potrà in infiniti modi condursi a passare per un punto qualunque. L'avere enunciato questa conclusione immediata ed evidente delle mie considerazioni senza citarmi, solo vestendola del

linguaggio dei vettori, valse al Peano la censura contenuta nella Nota che presentai all'Accademia nello scorso settembre. Io non debbo quindi convenire in alcuno dei resultati del Peano.

« Nella mia Nota sui moti periodici del polo terrestre io non aveva bisogno di trattare il caso generale, avendolo già svolto completamente nella Parte III della mia Memoria dello scorso febbraio inserita nelle *Astr. Nachr.* in cui, fra le altre cose, integrai l'equazioni differenziali mediante successive approssimazioni, ottenendo serie convergenti. Per ben comprendere quella Nota, conviene tener presenti i resultati stabiliti nella suddetta Memoria, cioè che nel caso di un corpo in cui sussistono moti interni si può sempre scegliere ad arbitrio il moto del polo e quindi determinare i corrispondenti moti interni. Ora nella Nota sui moti periodici (come dissi in maniera esplicita) ho voluto trattare espressamente il caso del moto di un corpo simmetrico, in cui i moti del polo fossero *per dato* decomponibili in piccoli moti armonici, vale a dire partendo dalla ipotesi che, durante il tempo in cui si studia il moto, fossero avvertibili solo dei piccoli moti armonici del polo. Nè il partire da esso dato può ingenerare il dubbio, nemmeno in chi si limiti a leggere quella sola Nota, che io abbia voluto escludere la possibilità che per certi moti interni, anche piccolissimi, il polo avrebbe potuto avere moti progressivi; dirò anzi che esso, oltre tutte le altre [1], è una nuova conferma che io ammettevo il contrario, perchè se io avessi ritenuto che piccoli moti interni, qualunque essi fossero, non potessero produrre altro che piccoli moti periodici del polo, non avrei avuto bisogno di stabilire a priori *come dato* che i moti del polo che io voleva considerare fossero piccoli moti armonici, ma mi sarebbe bastato di porre la sola ipotesi di piccoli moti interni, e i piccoli moti armonici del polo avrebbero dovuto venire come conseguenza. È evidente ora che, una volta partito *come dato* dalla ipotesi di un solido simmetrico il cui polo ha un moto decomponibile in piccoli moti armonici, nessun artificio di calcolo poteva condurre a vedere fra quei moti armonici un moto progressivo, cioè un resultato in contradizione coi dati. Cadono dunque in maniera evidente tutti gli appunti fatti dal Peano riguardo all'annullarsi della quantità $\lambda_n - \omega$. Oltre a ciò, in una Nota avente il titolo, *Osservazioni sulla memoria*: *Sui moti periodici del polo terrestre* stampata fin dallo scorso giugno, tornai ancora una volta sulla stessa questione.

« Il modo di operare nella detta Nota è dunque perfettamente legittimo; esso anzi era necessario volendo applicare i resultati al moto terrestre, onde confrontare (come era mio esplicito scopo) i calcoli colle conclusioni a cui era giunto Chandler. Tutto ciò mi sembra che fosse spiegato chiaramente; sebbene l'articolo sui moti periodici io lo abbia presentato all'Accademia

[1] Fra le altre cose dico che la possibilità di lenti moti progressivi non è esclusa nemmeno ammettendo delle perturbazioni prodotte dalla plasticità, sebbene la natura e le condizioni dei moti progressivi verrebbero essenzialmente cambiate.

di Torino, seduta stante, nell'adunanza del 5 maggio u. s. allorchè il Peano lesse la sua prima Nota, e ciò io feci per mostrare che già da tempo io aveva eseguito i calcoli numerici sulla questione, oltre all'avere ottenuto già i risultati teorici contenuti nelle mie prime quattro Note sull'argomento e nella Memoria del febbraio delle *Astr. Nachr.;* tutto questo assai prima che il Peano pensasse nemmeno a simile questione (Ved. Proc. Verb. delle sedute dell'Accademia di Torino).

« Dimostrato così esser vano ed insussistente qualsiasi appunto o critica fattami dal prof. Peano, e non originali nè esatte le sue asserzioni, avendole egli stesso già riconosciute tali, ritengo, per parte mia, definitivamente chiusa questa polemica ».

Chimica. — *Sul comportamento del fenol come solvente in crioscopia.* Nota del Socio E. PATERNÒ.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Latitudine di Catania-Osservatorio.* Nota di T. ZONA, presentata dal Socio TACCHINI.

Fra i due Osservatorî di Palermo e Catania si stabilì di fare una determinazione di differenza di longitudine, e ciò si compì nel luglio-agosto 1894, ed ora si stanno eseguendo i calcoli relativi. Contemporaneamente il prof. Riccò invitommi a voler fare una determinazione di latitudine.

Con piacere accettai l'invito, desiderando adoperare il metodo di Talcott. Avendo compita l'operazione e finiti i calcoli, con ottimo risultato, ne dò comunicazione all'illustre Accademia.

Il metodo Talcottiano è certamente uno dei migliori se non il migliore per simili ricerche; la bontà però dei risultati che può dare tale metodo riposa tutta sulle declinazioni delle stelle. Necessita quindi che le declinazioni sieno stabilite con la massima esattezza possibile.

Prima cura mia fu di ricorrere ad ottime sorgenti; a questo scopo le mie coppie, in numero di 23, le ricavai dai cataloghi Respighi, Bradley-Auwers, Ten Year.

Siccome non tutte le stelle si trovarono in tutti i cataloghi, e siccome d'altra parte per qualche stella le declinazioni ottenute nelle singole sorgenti presentano differenze non trascurabili, così decisi, prima di intraprendere la determinazione di osservare da me stesso tutte le stelle delle coppie al cerchio meridiano di Palermo.

Osservai in tutto 64 stelle e dieci volte ognuna; con le differenze ottenute usando il metodo dei minimi quadrati, mi fu possibile stabilire in ogni singolo sistema le declinazioni mancanti o quelle che per avventura erano difettose.

Con i sistemi di declinazione così stabiliti calcolai la latitudine ed ebbi:

Respighi	= 37°.30′.13″,237	± 0″,115
Bradley-Auwers	= 37 30 13, 218	± 0, 132
Ten Year	= 37 30 13, 301	± 0, 108

Combinando questi tre valori, si può ritenere che la latitudine dello strumento dei passaggi dell'Osservatorio di Catania sia 37°.30′.13″,25 ± 0″,07.

Astronomia. — *Nuovo studio sull'orbita della cometa 1890 IV.* Nota di T. Zona, presentata dal Socio Tacchini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *In risposta ad alcune osservazioni del prof. Righi.* Nota di A. Garbasso, presentata dal Socio Blaserna.

Nel nono fascicolo del quarto volume dei Rendiconti dell'Accademia è comparsa (1) una Nota del prof. Righi nella quale si muovono alcuni appunti ad un mio lavoro *Sulla doppia rifrazione dei raggi di forza elettrica* (2). L'Accademia mi vorrà perdonare se risponderò brevemente a quelle osservazioni.

Il risultato più importante al quale ero pervenuto era questo che, nel gesso, le direzioni possibili di vibrazione per la luce e per i raggi elettromagnetici non sono coincidenti e nemmeno vicine. Sono lieto di constatare che, tolte alcune differenze numeriche, spiegabilissime per confessione dello stesso Righi, le sue esperienze confermano le mie (3). È parso poi al prof. Righi che ad alcuni dei miei esperimenti si potesse muovere un'obiezione (4) che io *non sarei stato in grado di prevedere*. Ora dal mio lavoro risulta che quell'obiezione ero pur giunto a prevederla da me (5).

Il prof. Righi crede anche di dover affermare (6) che non può sorpren-

(1) Pag. 203.

(2) Atti Acc. di Torino, XXX, 442, 1895.

(3) L'angolo compreso fra le direzioni di estinzione ottica ed elettrica fu trovato in alcuni casi dal Righi uguale a 40°. Egli stesso afferma poi che, in determinazione di questa natura, sono possibili errori di tre o quattro gradi; avrei potuto dunque osservare degli angoli di 43° o 44°. Trattandosi di esperienze così grossolane, avevo bene il diritto di dire che l'angolo osservato era *all'incirca di 45°* o *prossimamente di 45°*.

(4) Righi, l. c. pag. 203, riga 12.

(5) Garbasso, l. c. pag. 447, riga 12 ..... i cristalli essendo piccoli, cioè dell'ordine della lunghezza d'onda impiegata, intervenivano probabilmente delle perturbazioni dovute alle faccie ed agli spigoli laterali.

(6) Righi, l. c. pag. 205, riga 2, salendo.

dere che le direzioni di estinzione ottica non coincidano con quelle di estinzione per le radiazioni elettriche, che ciò anzi si poteva prevedere. Confesso che a me la cosa, quando la trovai, non parve così chiara (1); e del resto il mio esimio contradditore mi fece l'onore di ripetere le mie esperienze, appunto per il desiderio (2) di vedere, se si sarebbe confermato o no il mio *singolare* risultato.

Finalmente il prof. Righi, in nota (3), mi attribuisce un'ipotesi che, a buon diritto, ritiene offensiva. Io quell'ipotesi non la feci mai, non sono quindi tenuto a scolparmene. Nemmeno è necessario che io attesti quanta stima io abbia per il Righi come scienziato, e quanto mi dolga di avere, involontariamente, irritato la sua suscettibilità. Sono cose che s'intendono senz'altro. Questo non vuol dire però, che io debba ritirare nulla di quanto affermai nel mio lavoro più volte citato. Ciò che dissi allora mi pareva e mi pare conforme alla verità ed era, in sostanza, questo:

1. che il prof. Righi riteneva impossibile la doppia rifrazione dei raggi elettromagnetici nello spato calcare (4);
2. che la teoria di Maxwell la prevedeva (5);
3. che le esperienze confermavano la teoria (6).

Colgo quest'occasione per annunciare all'Accademia che, avendo ripreso le mie esperienze, ottenni già qualche risultato interessante. Ho constatato con sicurezza la doppia rifrazione dei raggi elettrici nell'adularia e in parecchi altri cristalli; alcuni di questi, come il granato, appartengono al sistema regolare.

Chimica fisica. — *Sopra alcuni fenomeni osservati nel congelamento di soluzioni diluite* (7). Nota del dott. I. Zoppellari, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

È noto che nelle soluzioni che si fanno congelare ciò che si separa in principio è il solvente puro; la sostanza disciolta non passa allo stato solido che quando la soluzione si è talmente concentrata da diventar satura: allora

(1) Il Righi scrive (l. c. pag. 205, riga 2, salendo, e seg.) che il mio risultato era prevedibile in quanto che è noto, come nel gesso non solo gli assi ottici, ma anche le due bissettrici del loro angolo variano di orientazione al variare della lunghezza d'onda. Questo modo di ragionare non mi sembra completamente sicuro, e mi spiego con un esempio. Nel fenomeno di Kerr vi è dispersione, anzi le esperienze riescono meglio coi raggi luminosi ad onda più lunga. Se ne deve forse concludere che, tentando la prova coi raggi d'Hertz, l'effetto sarà notevolmente più intenso? si prevederebbe una cosa contraria alla realtà.

(2) Righi, l. c. pag. 203, riga 14.

(3) Ibid. l. c. pag. 203, nota 4.

(4) Garbasso, l. c. pag. 443, riga 10.

(5) Ibid. l. c. pag. 444, pag. 10, salendo.

(6) Ibid. l. c. pag. 445, riga 18, salendo.

(7) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

il più piccolo abbassamento di temperatura fa precipitare insieme solvente e sostanza disciolta. Per dimostrare che realmente così avviene, si sogliono far congelare delle soluzioni acquose colorate e si mostra che realmente spremendo il ghiaccio esso è incoloro e la sua apparente colorazione dipende solo dall'essere impregnato del liquido colorato: anche si mostra che dalla soluzione acquosa di platinocianuro di magnesio si separa del ghiaccio incoloro, mentre, se anche la sostanza solida si separasse, il ghiaccio dovrebbe esser colorato della magnifica tinta di questo sale.

Ma una dimostrazione assai migliore di questo fatto si ha nei fenomeni che io ho ora studiati e che non trovo sieno stati sin qui descritti.

Ho fatto una soluzione diluita di permanganato potassico, soluzione la quale conteneva grammi 0,1 di sostanza sciolta in 300 cc. d'acqua; ne ho messo una porzione, circa 80 cc., in un bicchiere a precipitare, dell'altezza di 8 cm. e della larghezza di 4 in modo che veniva riempito per circa due terzi, e poi l'ho posta a congelare in un miscuglio frigorifero di neve e sale, che però non aveva una temperatura inferiore a — 5°. Dopo cinque o sei ore osservai che la massa congelata era perfettamente incolora e trasparente come il ghiaccio il più puro, e che al suo centro per quasi tutta l'altezza s'era accumulata la sostanza colorante, formando una piccola prominenza alla superficie, e nei punti che si vedevano meglio sembrava cristallizzata; attorno a questo nucleo colorato, che aveva l'apparenza di un piccolo tronco d'albero, irraggiavano dei lunghi cristallini apparentemente aghiformi, disposti come le spine di un riccio di castagna o meglio come gli aculei di un'istrice.

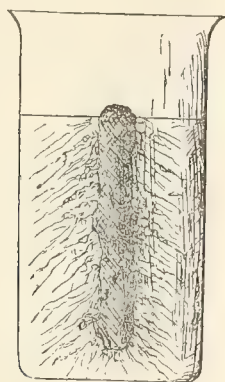



Fig. 1ª

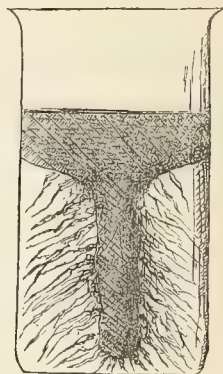



Fig. 2ª

Nella figura 1ª è data un'idea del fenomeno osservato. Ho voluto poi seguire questo fatto nelle sue fasi, e difatti osservai che la separazione della sostanza disciolta dal solvente comincia dalla parte inferiore del recipiente, e va a poco a poco innalzandosi e restringendosi dalle pareti alla parte centrale, formando così una specie di imbuto come mostra la figura 2ª. Togliendo poi il bicchiere dal miscuglio frigorifero, e facendo lentamente sciogliere la massa, si vede che la prominenza alla superficie va a poco a poco diminuendo, tanto da for-

mare una curva rientrante, ed al fondo del recipiente si comincia a colorare la soluzione. Ho voluto poi vedere se il fatto osservato per il permanganato avveniva anche per soluzioni di altri sali colorati. Feci delle soluzioni di egual concentrazione del permanganato, cioè gr. 0,1 di sostanza in 300 cc. d'acqua, delle seguenti sostanze: bicromato potassico, cromato potassico ed anidride cromica, e per tutte queste ho avuto lo stesso fenomeno osservato per il permanganato; per soluzioni assai più concentrate l'esperienza non riusciva bene. Per le soluzioni poi di solfato e cloruro di rame, nitrato e cloruro di cobalto, solfato di nichel e allume di cromo, che contenevano egualmente gr. 0,1 di sostanza in 300 cc. d'acqua, ho ottenuto una massa solida che aveva pressochè il colore della soluzione; ma non avveniva la separazione come per il permanganato e gli altri sali di cui parlai più sopra. Studiai anche qualche soluzione molto diluita di sostanze coloranti organiche, e per quelle di cocciniglia, bleu di metile B, anilina Genziana, tropeolina 000 N. 2, ho avuti risultati analoghi al permanganato; all'incontro non ho osservato il fatto in una soluzione diluitissima di potassa, alla quale aggiunsi due goccie di soluzione di fenolftaleina per avere una colorazione rosea. Ho creduto utile fare anche qualche prova cambiando solvente; adoperai infatti soluzioni di azobenzolo in benzolo, e di bleu di metile B in acido acetico; ma il fenomeno non riusciva. Ricorderò che nei blocchi di ghiaccio artificiale l'aria che era contenuta nell'acqua viene a riunirsi poi al centro nella solidificazione in modo analogo a quello da me osservato per la sostanza in soluzione.

Sembrerebbe adunque, dal diverso comportamento osservato per le differenti soluzioni, che la proprietà di separarsi così regolarmente la sostanza dal solvente sia più manifesta per i sali che non contengono acqua di cristallizzazione.

Mineralogia — *Rame e mercurio nativi nell'Appennino Emiliano.* Nota di DANTE PANTANELLI, presentata dal Socio STRÜVER.

Rame nativo. — Il rame nella regione dei galestri eocenici (argille scagliose) e che non può essere collegato a filoni o depositi nelle roccie serpentinose, è conosciuto da molto tempo; fra le notizie non scientifiche, si ha la tradizione che il rame impiegato nella lega delle campane di Cargedolo (valle del Dragone, Modena), fosse raccolto nel luogo. Venturi [1], nella storia di Scandiano (1832) accenna al rame del Monte della Croce e a quello di Monte Galbone; ricorda che Merosi e Tonelli ne annunziarono nel 1810 la scoperta al governo di Milano. Un accenno è stato dato da Russegger

[1] Venturi, *Storia di Scandiano*, pag. 211.

(1845) [1] e Roncaglia (1856) [2], lo cita di Monte Vetto che è lo stesso del Monte della Croce. Chiaramente sotto la sua forma di rame nativo è indicato dal Doderlein (1870) [3] per Monte Galbone (Reggio). Ultimamente il rame nativo è stato citato da Bentivoglio (1895) [4] a Cargedolo, Ospitaletto ed in altri luoghi del Modenese.

Probabilmente è assai più esteso di quello che non si creda, per quanto si trovi sempre in piccole quantità: lo conosco, per averlo raccolto, di Monte Galbone (Viano, valle del Tresinaro) e di Cargedolo (Frassinoro, valle del Dragone); si trova sparso nei galestri e in gran parte alterato in carbonato, tanto sotto la forma comune di carbonato verde terroso, quanto in azzurrite a volte nettamente cristallizzata; le scaglie che in generale non oltrepassano pochi grammi, dieci per le più grosse, sono o completamente alterate in carbonato, o conservano nel loro interno un nucleo inalterato. Le poche inalterate, sono raramente di puro rame, più ordinariamente, come i nuclei di quelle alterate superficialmente, sono un miscuglio di rame e di ossido di rame, con ossido di ferro in proporzioni notevoli, di carbonati e di materiale siliceo finamente suddiviso nella massa. Non vi sono traccie di solfuri; in un nucleo trovasi un frammento di dente di pesce (*Notidanus?*).

Queste massecole di minerale cuprico sono irregolarmente diffuse nell'area limitata dove esse si rinvengono, nè mi è occorso di trovarle raccolte lungo determinate zone; questo però non esclude che lo sieno; nella zona superficiale le argille scagliose sono sempre rimestate o da frane o dalla erosione e lavaggio amosferico; occorrerebbe trovarne in plaghe vergini per giungere ad una conclusione positiva; l'unica cosa certa è che la quantità del minerale, in ragione della superficie nella quale può raccogliersi, è minima e di nessuna, almeno per ora, pratica utilità.

Circa la loro probabile origine, intanto per l'assenza, anche nei nuclei non alterati, di solfuri, mi sembra difficile attribuirla ad alterazioni di uno qualunque dei solfuri di rame e ferro, come pure non potrei riferirla alla semplice concentrazione di elementi cuprici naturalmente contenuti in ogni sedimento marnoso di origine marina, chè allora dovrebbero trovarsi per tutto o almeno più comuni di quello che non sieno. Preferirei ricondurla a successive alterazioni di solfati secondo le ricerche di Knop [5] ripetute da Wibel sull'azione dei carbonati alcalini nelle soluzioni di vetriolo di ferro e rame.

Mercurio nativo. — Nel settembre scorso un proprietario di S. Quirico d'Albareto presso Borgotaro, alla confluenza della Gotra con l'Arcina, aggiun-

(1) Russegger, *Geographische Reisen in Modena* 1843. N. Jahrb. fur Min. Jahrg. 1844, pag. 779.

(2) Roncaglia, *Statistica degli Stati Estensi,* vol. I, pag. 265.

(3) Doderlein, *Statistica della provincia di Reggio.* pag. XV.

(4) Bentivoglio, *L'Appennino modenese.* Mineralogia, pag. 37.

(5) Bischof, *Lehrbuch der Chem. und Phys. Geologie,* vol. III, pag 693.

gendo alcune stanze terrene alla sua casa, scavando per abbassare la soglia di una nuova porta, s'imbattè in un galestro imbevuto di mercurio e da circa un metro cubo o poco più di materiale, separò con il lavaggio più di sei chilogrammi di mercurio.

Recatomi sul luogo nel novembre scorso, potei constatare che i galestri con mercurio, appartengono ad uno strato di circa quindici centim. di potenza, racchiuso tra due strati di galestro assai duri, e inclinati a NE di circa 45°; al contatto del galestro compatto che limita lo strato vi è una sfioratura di talco, in qualche punto di circa un centimetro; quest'ultima circostanza ho rilevata da alcuni frammenti che trovavansi in disparte nella casa del proprietario, avendo il medesimo riempito la fossa scavata nell'interno della casa, lasciando solo scoperto una parte dello scavo, quello esterno davanti la porta.

Detta località essendo al sommo della collina che separa la Gotra dall'Arcina a circa trenta metri dal letto di questi torrenti, la parte superficiale dove ancora potrebbe manifestarsi detto strato è assai limitata, nè l'ho potuto rintracciare in altre parti.

Il mercurio è diffuso nella roccia marnosa assai irregolarmente in minute goccioline; le piccole cavità nelle quali è racchiuso, sono rivestite internamente di cloruro mercuroso e in un piatto che aveva servito al lavaggio della terra e del mercurio, era raccolta una discreta quantità di croste sottili di calomelano; quest'ultimo minerale si trova anche in sottili incrostazioni nelle fenditure del galestro senza che vi sia unito il mercurio. L'analisi qualitativa ha dato solo traccie d'argento.

Il mercurio nativo lungi da conosciuti giacimenti di cinabro, non è fatto nuovo e a Ipplis a Sud di Cividale fu trovato in identiche condizioni, cioè nelle marne dell'eocene superiore e precisamente nello scavare una cantina; è inoltre citato di Montemaggiore, Cravero, Spessa, sempre nel flisch alpino come nel Siebenbürgen e nella Gallizia [1].

E però una assoluta novità anche come minerale nell'Appennino, non potendosi tenere in conto l'indicazione di Roncaglia [2] che lo cita senza dire il suo stato, di Cervarezza (alti Appennini reggiani), tanto più che detta indicazione non è stata accolta da Doderlein al capitolo geologia nella statistica della provincia di Reggio.

La presenza costante del calomelano e la sua disposizione, lasciano supporre che il minerale originario sia il cloruro mercuroso dal quale per successiva riduzione, si è raccolto il mercurio nativo. Alla domanda se possa essere in tale quantità da convenire la ricerca, non saprei rispondere; mi limiterò a ricordare che casi consimili hanno dato magri risultati.

(1) Taramelli, *Spieg. della carta geol. del Friuli*, pag. 106.

(2) Roncaglia, loc. cit.

Conclusione. — Tenendo in disparte il rame di Cargedolo per essere nel centro di una plaga serpentinosa e cuprifera, e limitandosi a quello di Monte Galbone e di Ospitaletto (Gombola) lontani assai da affioramenti serpentinosi, la presenza del rame e del mercurio nelle argille scagliose, quella dei petroli, del solfo, del gesso, della baritina, della halite, della pirite, dell'acerdesio, costituiscono un complesso che congiunto all'altro più grandioso delle serpentine, sempre più o meno ricche di minerali di metalli pesanti, permettono di dedurre essere stato il sedimento dei galestri complicato da fenomeni endogeni, ripetendo condizioni analoghe a quelle dei depositi permiani: questo senza pregiudizio di nessuna delle ipotesi circa la origine delle argille scagliose o galestrine e delle roccie massiccie che le accompagnano.

La estrema rarità di avanzi organici lascia ritenere che le cause di detti fenomeni endogeni fossero attive nell'epoca del sedimento dei galestri, come è da ritenersi che devono aver continuato anche in tempi posteriori, senza essere completamente cessate nel periodo attuale; l'ultimo residuo della loro manifestazione sarebbero, le salse, le sorgenti termali, le fontane ardenti; lo stesso, come già da molto tempo ho detto, per le moltissime sorgenti termali della Toscana, le quali debbono considerarsi come la continuazione dei fenomeni avvenuti nelle eruzioni serpentinose o connesse alle dislocazioni che hanno accompagnato il sollevamento pliocenico.

Fisiologia. — *Osservazioni ed esperienze sulla permeabilità della pelle.* Nota di Margherita Traube Mengarini, presentata dal Socio Blaserna.

Sulla permeabilità della pelle si conoscono con certezza due soli fatti:

1. La pelle è permeabile per i corpi che si fanno penetrare mediante una determinata pressione meccanica. Esempio: il mercurio che passa frizionando la pelle colla pomata mercuriale.

2. La pelle è permeabile, o per meglio dire, compenetrabile, per affinità chimica. Così i corpi che formano composti chimici coi costituenti della pelle, penetrano in essa. Esempio: l'iodio e tutte le sostanze che attaccano la pelle.

Questi due fatti si verificano sia sulla pelle che su tutte le altre membrane organiche ed inorganiche. Ma siccome la pelle può essere studiata sull'animale vivente, o distaccata da esso, sorge spontaneamente la domanda, se la pelle vivente possegga quelle proprietà che fa delle altre membrane, strumenti specialmente atti a studiare i fenomeni osmotici.

Tale questione fu posta ed affermata verso la metà del secolo dagli autori che fecero esperienze su pelle umana distaccata dal corpo ed acconciata in modo diverso; ma i risultati di queste esperienze non potevano applicarsi

senz'altro alla fisiologia. In seguito si formarono due scuole; l'una negava ogni permeabilità alla pelle, l'altra ammise ed ammette ancora, una permeabilità speciale, propria alle membrane « *viventi* ».

Consideriamo che cosa risulterebbe dall' ipotesi, che la pelle sia osmoticamente permeabile. Se la pelle si comportasse come una pergamena, se fosse cioè penetrabile per l'acqua e per i corpi sciolti in essa, niun animale acquatico potrebbe esistere. Per la ben nota legge fisica ogni animale diverrebbe idropico nell'acqua dolce. Nell'acqua marina invece gli animali perderebbero tant'acqua da prosciugarsi in mezzo al mare.

Non tenendo conto della dottrina della perfetta impermeabilità della pelle, mentre i risultati sulla permeabilità meccanica e chimica sono assicurati, resta l' ipotesi che la pelle animale vivente possegga qualità speciali ed in sostegno di questa è stato invocato il sistema nervoso. Ma tutto ciò che è noto sull'influenza del sistema nervoso non dà modo di spiegare un fenomeno unico, come quello ammesso da chi crede in una permeabilità speciale della pelle.

Prendiamo l'esempio classico e maggiormente discusso: si immerga un uomo in un bagno minerale. Nel bagno si trovano gli stessi sali che si trovano nel corpo umano, soltanto la soluzione è più ricca. La terapia pretende che i sali debbono entrare nel corpo umano, mentre invece la fisica insegna che è l'acqua contenuta nel corpo che deve uscirne. Contrariamente quindi a quello che la fisica ci addimostra, la pelle dovrebbe essere semi-permeabile nel senso opposto a quello ritenuto finora; cioè la pelle dovrebbe essere permeabile per i sali ed impermeabile per l'acqua. Ed i sali dovrebbero emigrare dal luogo della minore pressione, che è il bagno, a quello che ha pressione maggiore, quale è il corpo d'un animale.

Niun fatto giustifica questo modo di vedere, e certo non è comprensibile la parte che vi potrebbe avere il sistema nervoso. La sua azione nella cute è nota. Produce per azione riflessa, contrazione e rilasciamento nei muscoli lisci, maggiore o minore affluenza del sangue, maggiore o minore attività nelle glandole.

Tutti questi fatti possono rendere la pelle più o meno compatta, e quindi più o meno permeabile nel senso fisico; ma finora non esiste alcun fatto per attribuire un'altra azione ad esso.

Esaminiamo poi, dopo la pelle, che è lo strato che delimita i vertebrati dall'ambiente, quella superficie che corrisponde alla pelle negli altri animali. Uno sguardo macroscopico sui diversi metazoi, ci fa vedere anzitutto due fatti. La pelle contiene gli organi dei sensi e mette quindi gli animali in relazione coll'ambiente; non è identica per tutti gli animali, ma appare modificata nelle varie classi, in modo da riparare l'animale contro uno scambio immediato col mezzo che lo circonda, sia esso aria od acqua. Negli animali terrestri la pelle, colle sue glandole ed i suoi peli, impedisce l'es-

sicamento dell'animale. La viscosità di tutti gli animali, acquatici li isola in certo modo dall'acqua. La bocca e gli organi della respirazione nei metazoi, e la bocca od il suo succedaneo nei protozoi, indicano la localizzazione della nutrizione e della respirazione.

I protozoi si prestano molto bene per gli studi sulla permeabilità della superficie che li separa dall'ambiente in cui vivono. È noto che le amebe e gli infusorî posti in acqua colorata, non si colorano tranne che nelle vacuole che contengono gli ingesti. Essi, come i metazoari, hanno una bocca per il cibo, persistente negli infusorî, temporanea nelle amebe. Seguendo il metodo dell'acqua colorata, osservai alcune eccezioni a questa regola. Così nelle vorticelle trovai delle parti colorate, quindi presumibilmente permeabili. Il peduncolo rigido delle vorticelle si colora con tutti i colori d'anilina, come pure avviene dello zaffo che rimane aderente ad alcune vorticelle quando si staccano dal peduncolo. Il peduncolo contrattile nella vorticella invece non si colora. Parvemi pure di osservare la colorazione di uno strato finissimo, il più esterno dell'ectoplasma. Vidi nettamente la colorazione di una specie di spirale in rilievo che si osserva sull'ectoplasma di alcune vorticelle. Ritengo quelle parti colorate non essere più nutrite dall'animale. Vidi anche nei metazoari, con una sola eccezione, che le parti colorate, cioè permeabili sono fuori della circolazione dell'animale, e se non morte, almeno in uno stato di denutrizione che avvicina alla morte, come lo strato corneo fino allo strato granuloso, nel quale le cellule, dopo pennellazioni coll'iodio, dimostrano dei nuclei più appariscenti e meno appiattiti che allo stato normale.

In condizioni diverse dei metazoi e protozoi finora considerati si trovano quei pochi parassiti che hanno perduta la bocca nella loro vita parassitaria.

Studiai finora un solo tra essi, un infusorio parassita nella rana, l'Opalina. Questa è una cellula senza apertura di sorta. Essa vive nella cloaca della rana, mentre non si trova in altri tratti dell'intestino. Ciò che immediatamente colpisce, osservandola al microscopio, è la sua grandissima sensibilità contro il più lieve cambiamento di densità dell'ambiente. Essa si raggrinza se esposta ad un'acqua contenente più sali del suo ambiente fisiologico, e se l'acqua non ne contiene si gonfia smisuratamente, sino a sciogliersi. Tutto ciò avviene coll'Opalina, mentre altri infusorî provvisti di bocca, ancora non danno segni apparenti di malessere. La superficie di questa Opalina rappresenta una membrana osmotica, attraverso alla quale debbono evidentemente passare oltre ai sali, pure i composti azotati necessari a farla crescere e riprodursi. Per poter esistere ha bisogno di un ambiente della sua densità. La sua pressione osmotica interna deve essere piccolissima, e lo scambio dei suoi prodotti con quelli dell'ambiente si deve fare come a traverso ad una membrana di Traube, che trattiene alcune sostanze e ne fa passare altre. Nutrendo una rana con un'acqua colorata, ad esempio con eosina, che anche in quantità abbastanza forte è innocua, questa si ritrova

nelle opaline che popolano il suo intestino. L'Opalina allora, vista nel taglio ottico, pare tappezzata d'un nastro color di rosa. Questo nastro è mancante soltanto in una zona limitatissima al polo anteriore dell'animale. Questa zona pare impermeabile ed allo stesso tempo abbastanza sensibile per fare retrocedere l'animale avanti ad un ambiente nocivo. Essa costituisce l'unica possibilità di difesa dell'Opalina per schivare un ambiente nocivo.

Si vede che la permeabilità osmotica di un animale limita molto le condizioni della sua esistenza. Limitarla ad una parte della superficie è di vantaggio per l'animale onde potersi salvare da un ambiente nocivo, e per rallentare lo scambio osmotico. Osservai un fatto analogo nelle cisti dell'*amoeba undulans* (Celli), che coltivai nel fucus aggiungendovi pochissimo sale. Si vede allora l'ameba, che normalmente ha forma lenticolare, introflettersi in modo che sembra un vetrino di orologio. La ragione di tale fenomeno regolarissimo, che si incontra ogni qualvolta si espone l'ameba alle stesse condizioni, non può essere altro che la permeabilità di un polo e l'impermeabilità dell'altro. Dopo morta l'ameba, la cisti ridiventa lenticolare, perchè allora tutta la sua superficie diventa permeabile, come in tutti gli animali dopo morte.

Feci altre osservazioni di permeabilità parziale su crostacei ed insetti acquatici, che hanno organi dei sensi nelle articolazioni estreme delle antenne. Tenendo gli animali in un'acqua leggermente eosinata, queste ultime articolazioni si colorano, mentre il resto dell'animale, tranne un sottilissimo strato esterno, rimane incolore.

Ho considerato finora l'impermeabilità contro i colori d'anilina come un segno di impermeabilità contro i sali. Credo di essere autorizzata a farlo dopo molte esperienze in proposito. È noto che i colori d'anilina passano benissimo come i sali negli osmometri, attraverso le membrane animali. Osservai che solo è diverso il tempo che richiedono per il passaggio, e che perciò un miscuglio di colori d'anilina viene nell'osmometro separato nei suoi componenti. Nelle mie esperienze sulla permeabilità della rana, osservai che i colori d'anilina dati per bocca all'animale, circolano per tutto il corpo e si ritrovano dappertutto, tranne nei mesi caldi, quando lo scambio di materia è molto rapido e i colori vengono già ridotti nell'intestino. D'inverno si ottengono, specialmente coll'eosina che è il colore più stabile ed innocuo, degli animali che sono tinti uniformemente di rosa. Le cellule sono colorate in totale ed il nucleo rimane invisibile nei muscoli, e nelle cellule epiteliali non più accentuato che nella cellula viva incolore. Il colore d'anilina circola quindi nel sangue senza trovare ostacoli di natura osmotica. Se non passa dall'ambiente nell'interno, è perchè trova un ostacolo nella pelle stessa.

Feci molte esperienze sulla permeabilità della rana di cui do qui sommariamente i risultati: tenendo una rana in un'acqua leggermente colorata in modo che essa non può attingerne colla bocca, la pelle rimane perfetta-

mente incolore, tranne la colorazione dei nuclei dello strato corneo. Tutti quei pori che corrispondono ad organi dei sensi rimangono incolori tranne i nuclei delle cellule più esterne che li circondano. Si vede che la materia colorante, che dall'intestino penetra facilmente sino nella pelle, non vi giunge affatto se l'animale è immerso in acqua che contiene la stessa materia colorante. Le particelle coloranti una volta entrate nella circolazione si diramano con essa e penetrano ovunque ha azione la pressione interna. Le particelle coloranti invece, se sciolte nell'acqua ove è immerso l'animale, si limitano alla superficie esterna della pelle; e se anche gli spazi intracellulari non fossero sottoposti a pressione, il liquido che volesse penetrarvi dall'esterno, troverebbe in essi, pieni di liquido come sono, la resistenza che trova un liquido per penetrare in un tubo capillare pieno d'un altro liquido, se pur questo abbia la stessa densità del primo.

Si vede da ciò che la rana è impenetrabile per i colori di anilina quanto le amebe e gli infusorî. La differenza sta unicamente negli strati cornei più esterni. Questi soli sono permeabilissimi. E ciò si verifica pienamente nel cane, nel coniglio e nell'uomo, nonchè nello strato esilissimo più esterno di chitina dei crostacei e degli insetti che vivono nell'acqua. Il resto della cute è impermeabile. Gli strati più esterni della superficie dei diversi animali sono permeabili; ma non già in senso osmotico, come le membrane che da alcune sostanze vengono attraversate e da altre no; non dipendono da pressioni di alcun genere; sono invece attraversati come lo è la carta da filtro che viene bagnata ed attraversata da ogni liquido. Però questa specie di permeabilità cessa allo strato granuloso ed i liquidi penetrati non entrano in circolazione.

La superficie degli animali acquatici considerata rispetto al loro ambiente fisiologico e quella degli animali terrestri posti in ambiente indifferente, si comporta verso questo come uno strato di caoutchouc, su cui aderisca fortemente una membrana di carta bibula. Il risultato ultimo è la impermeabilità.

Ho parlato finora dell'ambiente fisioloco in cui vivono gli animali. Esaminiamo ora l'effetto di un ambiente nocivo. Feci a questo riguardo delle esperienze osmotiche sulla rana che ben si presta a queste ricerche. Una rana pesata prima in una data quantità di acqua dolce, viene poi tenuta per un'ora e più nell'acqua contenente 5 % di cloruro di sodio.

1. Una rana del peso di gr. 27,22 dopo un'ora e mezza d'immersione nell'acqua salata pesa gr. 24,86. Ha perduto quindi gr. 2,36 cioè 8,7 %. Immersa di nuovo nell'acqua dolce pesa, dopo ore 2,40 gr. 27,70. Aveva riacquistato nell'acqua dolce quasi mezzo grammo più del suo peso primitivo.

2. Una rana del peso di gr. 25,75 è immersa nel bagno salato per ore 4,30. Perde gr. 4,20, cioè il 16,3 % del suo primitivo peso. Un'altra rana che era riuscita ad inghiottire dell'acqua, perdette nonostante in 55 minuti di permanenza nel bagno salato gr. 3,10 da 33,80 che pesava.

Feci esperienze di controllo per vedere quanto perde una rana per evaporazione dalla superficie interna della bocca e dai polmoni, sospendendola nell'acqua dolce colla testa sopra l'acqua, posizione che feci tenere alle rane nelle esperienze di cui sopra, per impedire che inghiottissero dell'acqua. La perdita di peso risultò così poca cosa, da non essere apprezzabile in questo genere di esperienze. Per valutare le perdite di epitelio che le rane, più di altri animali, possono subire, cercai il peso di epitelio che può esser gettato da una rana. Pesate due rane nell'acqua, asciugate poscia all'aria ed impolverate, gettarono gli strati cornei più esterni appena rimesse nell'acqua. Il peso di questo materiale insieme alla polvere era di gr. 0,70. Da ciò deduco che la perdita di peso delle rane tenute nell'acqua salata non può essere spiegata colle perdite di acqua e di epitelio che subiscono. Voglio pure notare, ciò che è noto a chi ha sperimentato con rane, che queste appena prese, vuotano per la paura tutta l'orina della vescica, in modo da non doverne più tener conto.

Del resto le rane messe nell'acqua salata non gettano il loro strato corneo, come fanno in molte altre condizioni. Si raggrinzano a vista d'occhio e paiono alfine ischelitrite. Aggiungendo all'acqua salata del colore d'anilina, questo non passa più che nelle altre esperienze con l'acqua dolce. Ciò dimostra che nella pelle non penetra nulla; ma che il movimento del liquido non era andato che dall'interno all'esterno, come è voluto dalle leggi osmotiche. Conchiudendo posso ritenere.

1. Che la pelle immersa nel suo ambiente fisiologico è impermeabile.

2. Che la pelle di una rana posta nell'acqua salata diventa semipermeabile facendo passare l'acqua contenuta non solo nella pelle stessa, ma in tutto il corpo dell'animale, nel bagno più ricco in sali che l'acqua contenuta nell'animale. Si vede che la rana, come gli altri animali di cui ho parlato, vivono in un ambiente fisiologico tale da non dar luogo a fenomeni osmotici. Se si varia l'ambiente, provocando l'osmosi, la superficie degli animali dà luogo a fenomeni di semipermeabilità perniciosissimi all'animale. Prima che la semipermeabilità, diventi permeabilità, prima cioè che principii l'esosmosi, avviene la morte dell'animale.

3. Dopo aver visto che i protozoi si comportano come molti metazoi, e questi tutti allo stesso modo, ritengo che la pelle umana segua le stesse leggi; sicchè un uomo immerso in un bagno di acqua minerale non otterrà altro che una perdita di acqua dalla pelle, certamente importante per l'attivazione della sua circolazione cutanea.

Mineralogia. — *Il granato a Caprera ed in Sardegna.* Nota di D. Lovisato, presentata dal Socio Struever.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Cerruti, relatore, a nome anche del Socio Beltrami, legge una Relazione sulla Memoria del sig. G. Procenzano, intitolata: *Nuova teoria delle parallele e saggio di Pangeometria con nuova curva non euclidea e corrispondente superficie di rotazione;* la Relazione conclude col proporre che all'autore sia inviato un ringraziamento per la sua comunicazione.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Blaserna comunica gli elenchi dei lavori presentati ai concorrenti ai premi Reali e del Ministero della pubblica Istruzione, scaduti col 31 dicembre 1895.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio reale di *matematica* scaduto il 31 dicembre 1895.

1. Alibrandi Pietro. 1) *Saggio di una teoria sui coefficienti di contrazione e di efflusso nelle bocche a battente* (st.). — 2) *Studio sopra alcuni problemi di meccanica* (ms.). — 3) *Sulle variazioni di temperatura dell'acqua nelle condotture* (st.).

2. Isè Ernesto. 1) *Relazioni metriche tra due piani collineari* (st.). — 2) *Su le forze di ordine superiore* (st.). — 3) *Applicazione della teoria delle forze del 1° e 2° ordine alla teoria matematica della elasticità* (st.). — 4) *Sulle velocità lineare e planare* (ms.).

3. Liverani Paolo. *Descrizione di una ruota meccanica* (ms.).

4. Pascal Ernesto. 1) *Sullo sviluppo delle funzioni* σ *abeliane dispari di genere 3* (st.). — 2) *Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle* σ *abeliane dispari a tre argomenti* (st.). — 3) *Sulla teoria delle funzioni* σ *iperellittiche pari e dispari di genere 3* (st.). — 4) *Sulla teoria delle funzioni* σ *abeliane pari a tre argomenti* (st.). — 5) *Sopra le funzioni iperellittiche di* 1^a *specie per* $p=2$ (st.). — 6) *L'equazione razionale della superficie di Kummer* (st.). — 7) *Sulle sestiche di contatto alla superficie di Kummer* (st.). — 8) *Sulle funzioni* σ *ellittiche pari* (st.). — 9) *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e 4 e*

loro gruppi di sostituzioni (st.). — 10) *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi* (st.). — 11) *Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica* (st.). — 12) *Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine* (st.). — 13) *Ricerche sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine* (st.). — 14) *Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana* (st.). — 15) *Su di un'estensione della configurazione delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia* (st.). — 16) *Osservazioni sui gruppi di sostituzioni fra le caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4* (st.). — 17) *Sulla configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4* (st.). — 18) *Sui piani tritangenti della sestica storta di genere 4* (st.).

5. Peano Giuseppe. 1) *I principii di geometria logicamente esposti* (st.). — 2) *Arithmetices principia nova metodo exposita* (st.).

6. Saporetti Antonio. 1) *Illustrazione del metodo di Gauss sulla determinazione di alcuni principali elementi delle orbite planetarie (eccentricità, parametro, longitudine del perielio sull'orbita) e nuovo metodo di soluzione* (st.). — 2) *Sull'origine della determinazione fra il tempo medio e il tempo vero, solari, esposta da alcuni astronomi, che diversamente interpretarono i ritrovamenti di Keplero, spiegati nella sua massima opera « Astronomia Nova »* (st.). — 3) *Metodo razionale, differente dagli antichi e dai moderni stessi di approssimazione, intorno alle epoche di eguaglianza del tempo solare (vero) al tempo medio, e delle massime loro differenze* (st.). — 4) *Nuove considerazioni sulla metafisica del calcolo infinitesimale* (st.). — 5) *Analisi nuova per dimostrare giusto l'usato metodo pratico degl' immaginari e teoria più generale dell'usata sulle relazioni fra i coefficienti delle funzioni algebrico-intere ad una variabile ed i fattori lineari, siano funzionali, siano propri delle equazioni* (st.). — 6) *Metodo analitico dello sviluppo di un arco circolare in funzione trigonometrica di un altro arco, cognito il quoto costante delle loro tangenti trigonometriche* (st.).

7. Segre Corrado. 1) *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (st.). — 2) *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (st.). — 3) *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque* (st.). — 4) *Studio delle diverse superficie del 4° ordine a conica doppia o cuspidale (generale o degenere) considerate come proiezioni dell'intersezione di due varietà quadratiche dello spazio a quattro dimensioni* (st.). — 5) *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (st.). — 6) *Sugli spazi fondamentali di un'omografia* (st.). — 7) *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale, e particolarmente*

su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta (st.). — 8) *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni* (st.). — 9) *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario* (st.). — 10) *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (st.). — 11) *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (st.). — 12) *Ricerche generali su le curve e le superficie rigate algebriche. Osservazioni sulle trasformazioni univoche delle curve ellittiche in se stesse* (ms.). — 13) *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (st.). — 14) *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (st.). — 15) *Un nuovo campo di ricerche geometriche.* Note I-IV (st.). — 16) *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* (st.). — 17) *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica* (st.).

8. Volterra Vito. 1) *Sopra un problema di elettrostatica* (st.). — 2) *Sull'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili* (st.). — 3) *Sulla deformazione delle superficie flessibili e inestendibili* (st.). — 4) *Sopra una proprietà di una classe di funzioni trascendenti* (st.). — 5) *Sulle funzioni analitiche polidrome* (st.). — 6) *Sulle equazioni differenziali lineari* (st.). — 8) *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. Parte 1ª* (st.). *Parte 2ª* (ms.). — 7) *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* (st.). — 8) *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (st.). — 9) *Sopra le funzioni dipendenti da linee* (st.). — 10) *Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse* (st.). — 11) *Sopra una generalizzazione della teoria delle funzioni di una variabile immaginaria* (ms.). — 12) *Delle variabili complesse negli iperspazii* (ms. e st.). — 13) *Sulle variabili complesse negli iperspazii* (st.). — 14) *Sulle funzioni coniugate* (st.). — 15) *Sulle funzioni di iperspazii e sui loro parametri differenziali* (st.). — 16) *Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate* (st.). — 17) *Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni* (st.). — 18) *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton: Del calcolo delle variazioni* (st.). — 19) *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica* (st.). 20) *Sopra le equazioni di Hertz* (st.). — 21) *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica* (st.). — 22) *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi birefrangenti* (ms.). — 23) *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi* (st.). — 24) *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi* (st.). — 25) *Sulle vibrazioni dei corpi elastici* (st.). — 26) *Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo* (st.). — 27) *Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi* (ms.). 28) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre* (st.). — 29) *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre* (st.). — 30) *Sul moto di un sistema nel quale*

sussistono moti interni stazionarii (st.). — 31) *Sopra un sistema di equazioni differenziali* (st.). — 32) *Un teorema sulla rotazione dei corpi e sua applicazione al moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionari* (st.). — 33) *Sui moti periodici del polo terrestre* (st.). — 34) *Osservazioni sulla mia Nota: Sui moti periodici del polo terrestre* (st.). — 35) *Sulla teoria dei moti del polo nella ipotesi della plasticità terrestre* (st.). — 36) *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii* (st.). — 37) *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici* (st.). — 38) *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici* (st. e ms.). — 39) *Esercizii di fisica-matematica - Sulle funzioni potenziali* (st.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio reale di *astronomia* scaduto il 31 dicembre 1895.

1. Angelitti Filippo. 1) *Distanze zenitali circummeridiane di alcune stelle principali osservate nell' anno 1821 da C. Brioschi* (st.). — 2) *Distanze zenitali circummeridiane del Sole osservate nell' anno 1821 da C. Brioschi* (st.). — 3) *Ulteriore discussione delle distanze zenitali circummeridiane del Sole, osservate da C. Brioschi negli anni 1819, 1820, 1821. Parte Prima* (ms.). — 4) *Nuova determinazione della latitudine geografica del R. Osservatorio di Capodimonte mediante i passaggi di alcune stelle al primo verticale osservati nell' anno 1889* (st.).

2. Germozzi Decio. *Il Cosmo* (ms.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio del Ministero della P. I. per le scienze *matematiche* scaduto il 31 dicembre 1895.
(Premio L. 1500).

1. Bettazzi Rodolfo. 1) *Fondamenti per una teoria generale dei gruppi* (ms.). — 2) *Teoria dei limiti.* (st.). — 3) *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici* (st.) — 4) *Sulla definizione della linea retta* (st.). — 5) *Il concetto di lunghezza e la retta* (st.).

2. Certo Luigi. 1) *Il così detto « problema dell'ago » di Buffon* (ms.). — 2) *Lezioni di Algebra* (st.).

3. Ducci Enrico. *Somma delle potenze simili dei termini di una progressione per differenza* (st.).

4. Gambera Pietro. 1) *Teoria matematica dei gas perfetti* (st.). — 2) *Delle proprietà dei miscugli di gas perfetti* (st.).

5. Gremigni Michele. 1) *A proposito del postulato dell' equivalenza*

e di altre questioni geometriche. Due note (st.). — 2) *A difesa della seconda edizione degli Elementi di Euclide* (st.). — 3) *Sull' equivalenza dei poligoni* (st.). — 4) *La Teorica dei poligoni equivalenti con aggiunte e note* (st.). — 5) *Sull' equivalenza dei poligoni piani e sferici.* (st.).

6. Pannelli Marino. 1) *Sopra i sistemi lineari quadruplamente infiniti di superficie algebriche* (ms.). —)2 *Sulla costruzione della superficie del 3° ordine individuata da 19 punti* (st.). — 3) *Sulla riduzione delle singolarità di una curva gobba* (st.).

7. Pirondini Geminiano. 1) *Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni* (st.). — 2) *Teorema geometrico* (ms.). — 3) *Sur la conique osculatrice des lignes planes* (st.). — 4) *Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio* (st.). — 5) *Sur une famille remarquable de courbes* (st.). — 6) *Due problemi geometrici* (ms.). — 7) *Simmetria ortogonale rispetto a una superficie di rivoluzione* (st.). — 8) *Quelques propriétés de l'hyperbole* (st.). — 9) *Sur les surfaces réglées* (st.). — 10) *Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali o simili* (st.). — 11) *Simmetria ortogonale rispetto a una linea qualunque* (ms.).

8. Toppi Pietro. *Prospettiva* (ms.).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazionl giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Pincherle, Poincarè e dai signori Botti, De Toni, Landauer; presenta inoltre il vol. V dell' edizione nazionale delle *Opere di Galileo Galilei.*

Il Socio Struever fa omaggio di una Memoria a stampa del sig. G. Cotteau sugli Echinidi raccolti dal prof. Lovisato nel miocene della Sardegna.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà comunicazione della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Londra; la Società di scienze naturali di Emden; le Società geologiche di Manchester e di Londra; la Società Reale e il R. Osservatorio di Edinburgo; l'Associazione degl' Ingegneri civili di Londra; l' Università di Tokyo.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

L' Istituto meteorologico di Berlino; l' Università di Kasan.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 gennaio 1896.

Boccardo E. C. e *Baggi V.* — Trattato elementare completo di geometria pratica. Torino, 1895. 8°.

Bormans A. — Sull'azione che il siero di sangue di alcuni animali spiega contro la proprietà sporificatrice del bacillo del carbonchio (*Min. Int.*). Roma, 1895. 8°.

Botti U. — Dei piani e sottopiani in geologia. Manuale alfabetico ragionato. Reggio Cal., 1895.

Caffi E. — I ragni di Calabria. Bergamo, 1895. 8°.

Catalogo della Biblioteca dell'Ufficio Geologico. R. Corpo delle miniere. Roma, 1895. 4°.

Cotteau G. — Description des Échinides miocènes de la Sardaigne (Mém. Soc. Géol. Françe, Paléontologie T. V, 2). Paris, 1895. 4°.

De Toni J. B. — Sylloge Algarum omnium hucusque cognitarum. Vol. III. Patavii, 1895. 8°.

Flores E. — Catalogo dei mammiferi fossili dell'Italia Meridionale continentale. Napoli, 1895. 4°,

Id. — Notizie sui depositi degli antichi laghi di Pianna (Napoli) e di Melfi (Basilicata) del prof. J. Jonston-Lavis, e sulle ossa di Mammiferi in essi rinvenute. Roma, 1895. 8°.

Galilei G. — Le opere. Ed. naz. Vol. V. Firenze, 1895. 4°.

Keller F. — Sull'intensità orizzontale del Magnetismo terrestre nei pressi di Roma. Roma, 1895. 8°.

Landauer J. — Die Spectralanalyse. Braunschweig, 1896. 8°.

Pincherle S. — Sopra alcune equazioni simboliche. Bologna, 1895. 4.

Poincaré H. — Calcul des probabilités. Paris, 1896. 8°.

Id. — Capillarité. Paris, 1895. 8°.

Id. — Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Paris, 1895. 8°.

Sabbatini A. — Sugli Echinodermi dei Cetacei. Genova, 1895. 8°.

Whiteaves J. F. — Paleozoic fossils. III 1. Montreal, 1884. 8°.

Valenti G. — Sopra alcune generalità che riguardano la evoluzione della cellula. Perugia, 1895. 8°.

P. B

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

È ben noto l'artifizio con cui il Weierstrass ed il Mittag-Leffler, nei celebri teoremi che portano i loro nomi, sono giunti ad ottenere, il primo, l'espressione di una funzione trascendente intera che si annulla nei punti $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ di una successione data, il secondo, quella di una funzione uniforme che nei punti $b_1, b_2, \dots b_n, \dots$ di una successione data diventa infinita come funzioni pure date: per esempio, che in b_n è infinita del prim'ordine col residuo r_n. Nel primo caso, la funzione richiesta sarebbe rappresentata dal prodotto infinito

$$(a) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)$$

quando esso fosse convergente assolutamente; nel secondo, la funzione domandata si avrebbe espressa dalla serie

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{x-b_n}\,,$$

qualora tale serie fosse convergente in ugual grado in tutto il piano x, esclusi i punti b_n. Ciò non accade in generale: ordinariamente, tanto il prodotto (a) quanto la serie (b) divergono e pertanto non rappresentano effettivamente alcuna funzione. Ma se si moltiplica ogni fattore del prodotto infinito per un nuovo fattore conveniente e se si aggiunge ad ogni termine della serie (b) una

espressione opportuna, come hanno fatto i nominati autori, si riesce a sostituire ad (a) e a (b) altre espressioni che (pur godendo delle stesse proprietà formali in modo da soddisfare, come quelle, alle condizioni dei rispettivi problemi) hanno incondizionata convergenza e rappresentano effettivamente le funzioni domandate.

Ora esistono, in parti assai diverse dell'analisi, certi sviluppi i quali si presentano in una forma sotto cui hanno un campo di validità assai limitato, ma ai quali è applicabile una modificazione del tutto analoga a quella ricordata e che permette di renderli effettivamente validi per quei casi in cui, nella primitiva forma, la loro esistenza è puramente virtuale. Questo fatto mi è sembrato assai degno di nota, e per porlo in evidenza nel modo più semplice possibile, mi sono limitato nella presente Nota a considerare un esempio particolare, riserbando ad altro lavoro la trattazione del metodo nella sua generalità. L'esempio sarà fornito dalla serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \varphi}{dx^n} \tag{c}$$

in cui φ è una funzione analitica della x. Formalmente, lo sviluppo (c) soddisfa all'equazione

$$f - \frac{df}{dx} = \varphi\,, \tag{d}$$

ma la serie (c) non è convergente se non eccezionalmente, cioè per funzioni φ soggette a condizioni assai restrittive, talchè alla (c), come formula per la risoluzione dell'equazione (d), non si può dare che un valore assai limitato. Però, mediante una modificazione opportuna dei termini della (c), la quale non altera la proprietà formale in forza della quale essa soddisfa all'equazione (d), si può renderla convergente per ogni funzione analitica φ regolare in un intorno (sia pure piccolo quanto si vuole) del punto $x = 0$. Questo metodo, come ho accennato, è applicabile a sviluppi assai più generali di (c); ma anche limitato a questo caso, spero che non riuscirà privo d'interesse per la novità dell'argomento e per le osservazioni generali che è d'uopo premettere sulle serie ordinate secondo le derivate successive di una funzione.

---

1. Considereremo, in ciò che segue, le serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\, \varphi^{(n)}(x)\,, \tag{1}$$

dove con $\alpha_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) si rappresenta una successione data di funzioni analitiche della variabile x regolari in un intorno del punto $x = 0$, con

$\varphi(x)$ una funzione analitica della stessa variabile, che si può assumere arbitrariamente sotto la sola condizione di essere pure regolare nell'intorno del medesimo punto $x=0$, e con $\varphi^{(n)}(x)$ si indica la $\frac{d^n\varphi}{dx^n}$. In luogo di considerare $\varphi(x)$ ed $\alpha_n(x)$ regolari nell'intorno del punto $x=0$, si potrebbero supporre tali per l'intorno di un altro punto arbitrario x_0 del piano della variabile: noi continueremo però a fare $x_0=0$.

Quando una funzione $\varphi(x)$, sostituita nello sviluppo (1), rende questo sviluppo convergente in ugual grado in un intorno di $x=0$, diremo che $\varphi(x)$ *appartiene al campo funzionale di convergenza della serie* (1). Per ogni funzione $\varphi(x)$ appartenente al suo campo di convergenza, la serie (1) rappresenta una funzione analitica regolare in un intorno di $x=0$; essa serie può quindi riguardarsi come l'espressione di un'operazione funzionale eseguita su $\varphi(x)$. Di più, se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ appartengono al campo di convergenza della (1), vi appartiene anche la $\varphi(x)+\psi(x)$, e l'operazione rappresentata dalla (1) è distributiva.

Ora dimostreremo, nei due paragrafi che seguono:

a) che una serie (1) ammette in generale un campo funzionale di convergenza;

b) che le serie della forma (2) possono essere di due nature diverse; quelle di *prima specie*, al cui campo di convergenza appartiene ogni $\varphi(x)$ regolare nell'intorno di $x=0$, quelle di *seconda specie*, al cui campo di convergenza appartengono quelle sole $\varphi(x)$ che soddisfano a determinate condizioni.

2. *Una serie* (1) *ammette sempre un campo funzionale di convergenza, purchè esista un intorno del punto* $x=0$ *in cui tutti i coefficienti della serie rimangono finiti.*

Si indichi con C quell'intorno di $x=0$ in cui tutte le $\alpha_n(x)$ rimangono finite, e sia m_n il limite superiore dei valori assoluti di $\alpha_n(x)$ in C. Si formi poi una successione di numeri positivi g_n arbitrarî purchè soggetti alle condizioni

$$g_n < g_{n-1}\ , \quad g_n < \frac{\varepsilon^n}{m_n}\ ,$$

essendo ε un numero positivo minore dell'unità, infine si prenda x in C. Sotto queste condizioni dico che la funzione

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

appartiene al campo di convergenza della (1): ne verrà che con essa vi appartengono tutte le serie di potenze in cui il coefficiente di x^n è minore in valore assoluto di $\frac{g_n}{n!}$.

Infatti, essendo

$$\varphi^{(n)}(x) = g_n + g_{n+1}x + \frac{g_{n+2}}{1 \, . \, 2} x^2 + \cdots + \frac{g_{n+\nu}}{\nu!} x^\nu + \cdots ,$$

si avrà

$$|\varphi^{(n)}(x)| < g_n e^{|x|} ,$$

onde

$$|\sum \alpha_n(x) \, \varphi^{(n)}(x)| < e^{|x|} \sum \varepsilon^n ,$$

ed essendosi fatto $\varepsilon < 1$, risulta dimostrata la convergenza assoluta ed in ugual grado della (1) per la funzione (2) e per tutti i valori di x presi nell'intorno C.

3. Volendo ora provare l'esistenza delle due diverse specie di serie (1) indicate alla fine del § 1, basterà, all'uopo, di fornire esempî delle une e delle altre; ora un esempio semplicissimo della prima specie ci viene dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} \varphi^{(n)}(x) ,$$

mentre esempî non meno semplici della seconda specie sono le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \varphi^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x) .$$

Considerando infatti la prima serie, si ricordi che $\varphi(x)$ è regolare nell'intorno di $x = 0$, ed ammette quindi uno sviluppo in serie di potenze di x convergente in un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio r; ora per $|x| < \frac{1}{2} r$ la serie stessa è certamente convergente assolutamente ed in ugual grado. Il suo campo funzionale di convergenza è dunque costituito da tutte le funzioni regolari per $x = 0$. Invece la seconda serie non è convergente in ugual grado se non per le funzioni $\varphi(x)$ in cui il raggio del cerchio di convergenza relativa ad $x = 0$ è maggiore dell'unità, e la terza lo è solo per speciali funzioni trascendenti intere: esse sono quindi della seconda specie.

4. Le funzioni razionali intere appartengono al campo funzionale di convergenza di ogni serie (1), poichè per esse lo sviluppo (1) si riduce ad un numero finito di termini. Questa osservazione permette di togliere ogni restituzione al teorema del § 2, e di dire che *una serie* (1) *ha sempre un campo di convergenza.*

Una serie (1) si dirà identicamente nulla quando sia nulla per ogni funzione del suo campo funzionale. Ora ciò non può avvenire altro che se tutti i coefficienti $\alpha_n(x)$ della serie sono identicamente nulli: basta infatti porre successivamente $\varphi = 1$, $\varphi = x$, ... $\varphi = x^n$, ... e si ottiene di mano in mano $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, ... $\alpha_n = 0$.

Due serie della forma (1) non possono essere identicamente uguali in tutto il loro campo comune di convergenza, senza avere uguali i rispettivi coefficienti. Ciò risulta senz'altro dall'osservazione precedente, e permette di usare, per la determinazione di un'operazione funzionale sotto forma di serie (1), del noto metodo di coefficienti indeterminati.

5. Una serie (1) a coefficienti non nulli non può quindi rappresentare lo zero: ma può essa rappresentare una costante? La risposta a tale domanda è affermativa, e nel presente § daremo la forma più generale di una serie (1) che per ogni funzione $\varphi(x)$ del suo campo funzionale rappresenta una costante, variabile però passando da una $\varphi(x)$ ad un'altra. Sia infatti

$$\text{(3)} \qquad C(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)\, \varphi^{(n)}(x)$$

una tale serie: esiste per essa (§ 2) un campo funzionale di convergenza in cui può venire derivata termine a termine, ottenendosi quindi il risultato

$$0 = \lambda_0'(x)\, \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{n-1}(x) + \lambda_n'(x)\right) \varphi^{(n)}(x) \ :$$

ora ciò non può essere (§ 4) altro che se sono soddisfatte le equazioni

$$\lambda_0'(x) = 0 \ , \quad \lambda_n'(x) = -\lambda_{n-1}(x) \, ,$$

che danno per le λ_n le determinazioni

$$\lambda_0 = a_0 \, , \quad \lambda_1 = a_1 - a_0 x \, , \quad \lambda_2 = \frac{1}{1\,.\,2}(a_2 - 2\,a_1 x + a_0 x^2), \ldots$$

$$\lambda_n = \frac{1}{n\,!}\left(a_n - n a_{n-1} x + \tbinom{n}{2} a_{n-2} x^2 + \cdots + (-1)^n a_0 x^n\right).$$

In questo sistema di polinomî, formati con legge assai ovvia e ben nota, il sistema dei coefficienti è arbitrario. Si può dunque, in infiniti modi, costruire una serie della forma (1) che rappresenti una costante, ed il campo funzionale della serie dipenderà dalla scelta delle costanti a_n. Facendo in particolare $a_0 = 1$ e tutte le altre $a_1, a_2, \ldots$ uguali a zero, si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n\,!} \varphi^{(n)}(x)$$

che dà come valore $\varphi(0)$ per ogni $\varphi(x)$ regolare nell' intorno di $x = 0$ e per $|x|$ abbastanza piccolo; essa è dunque una serie di prima specie.

6. Premesse queste osservazioni generali sulle serie (1), veniamo alla questione che forma l'oggetto principale della presente Nota, quale è indicato nell' Introduzione. Avendosi da risolvere l'equazione lineare di primo ordine

$$\text{(4)} \qquad \psi - \frac{d\psi}{dx} = \varphi(x) \, ,$$

dove φ è una funzione data, o ciò che è lo stesso, volendo determinare l'operazione

$$(1 - D)^{-1},$$

dove D è il simbolo della derivazione, il calcolo simbolico ci dà

$$(1 - D)^{-1} = 1 + D + D^2 + \cdots + D^n + \cdots$$

ossia, formalmente, si ottiene ψ dalla serie

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)} . \tag{5}$$

Ma la serie (4) è di quelle che abbiamo chiamate di *seconda specie*: infatti una funzione φ non può trovarsi nel suo campo di convergenza altro che quando sia soddisfatta la condizione (necessaria ma non sufficiente)

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(n)} = 0 ,$$

condizione che vale solo per speciali funzioni trascendenti intere. Si tratta ora di mostrare come un'opportuna modificazione dei termini della serie (5) permetta di trasformarla in una serie di prima specie, e che quindi contiene nel suo campo di convergenza ogni funzione regolare nell'intorno di $x = 0$.

7. La espressione

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} + ce^x ,$$

dove c è una costante arbitraria, soddisfa formalmente all'equazione (4) al pari della serie (5). Vi soddisfarà ancora se al posto della costante c scriviamo lo sviluppo (3) che abbiamo ottenuto al § 5 e che serve a rappresentare una costante; con che abbiamo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} + e^x \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi^{(n)}$$

ossia

$$S = e^x \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x} + \lambda_n) \varphi^{(n)} . \tag{7}$$

Come si è visto al citato § 5, nel sistema dei polinomî λ_n è arbitraria la scelta dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots$; in particolare, possiamo porre

$$a_n = -n!$$

ed otteniamo

$$\lambda_n = -1 + x - \frac{x^2}{1 . 2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} ,$$

talchè la (7) diviene

$$S = e^{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1\,!} - \frac{x^{n+2}}{n+2\,!} + \cdots \right) \varphi^{(n)} . \tag{8}$$

Indichiamo ora con r il modulo di x, con $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}'$, ... ciò che divengono le φ, φ', ... quando nelle serie di potenze che le rappresentano nell'intorno di $x=0$ sostituiamo ad ogni coefficiente il rispettivo valore assoluto: il termine generale della (8) sarà, in valore assoluto, minore di

$$\frac{r^{n+1}}{n+1\,!} \left(1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1\,.\,2} + \cdots \right) \overline{\varphi}^{(n)}(r) ,$$

da cui

$$|S| < |e^{x}|\, e^{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1\,!} \overline{\varphi}^{(n)}(r) .$$

Ma la serie che qui figura nel secondo membro è convergente per ogni $\overline{\varphi}$ che sia una serie di potenze di x convergente entro un cerchio di centro 0 e di raggio qualunque a, purchè r si prenda minore della metà di a; lo stesso vale a fortiori per la (7), che è pertanto una serie di prima specie, c. d. d.

Astronomia. — *Nuovo studio sull'orbita della cometa 1890 IV.* Nota di T. Zona, presentata dal Socio Tacchini.

Nella seduta del 19 maggio presentai uno studio sull' orbita definitiva della mia cometa, in cui si usava il metodo di Schönfeld. I risultati finali ottenuti erano poco soddisfacenti, e la cosa più rimarchevole si fu il risultato negativo di $[ff5]$, quantità che teoricamente è positiva.

L'anormalità dei risultati mi persuase che il metodo usato non bene si adattasse al caso particolare della mia cometa.

Convinto di ciò (e questa mia convinzione la feci già nota all'illustre Accademia), invitai il mio assistente e già mio allievo dott. Mattina, molto abile in questi calcoli, a volere ripetere la ricerca con gli stessi elementi, ma usando il metodo che trovasi nel Watson.

Usando gli stessi dati ma col metodo del Watson, il dott. Mattina arrivò a risultati veramente ottimi, veramente definitivi, che credo utile presentare.

Luoghi normali

		α	δ
Novembre	19,5	78° 12′ 59″,2	34° 17′ 35″,0
Dicembre	3,5	57 46 1, 7	34 56 22, 2
»	12,5	46 33 59, 6	33 35 29, 4
»	31,5	31 26 41, 4	29 36 48, 3

Con questi dati si ebbero i seguenti elementi:

$$
\begin{aligned}
T &= 1890 \text{ Ag. } 7{,}3712 \text{ t. m. Berlino} \\
\omega &= 331^\circ\, 27'\ 8'',5 \\
\Omega &= 85\ 23\ 24,\ 8 \quad \Big\} \text{ eq. m. } 1890{,}0 \\
i &= 154\ 19\ 39,\ 1 \\
\log q &= 0{,}311606 \\
e &= 1{,}001893
\end{aligned}
$$

Questi elementi si possono ritenere definitivi; da essi apparisce che la cometa da me scoperta nel '90 è una delle rare comete ad orbita iperbolica.

Questi elementi rappresentano bene i dati; infatti dal calcolo risultò:

	Nov. 19,5	Dic. 3,5	Dic. 12,5	Dic. 31,5
$\Delta\alpha$	+ 0'',9	+ 1'',1	— 2'',7	— 2'',6
$\Delta\delta$	— 0, 5	+ 0, 4	— 0, 4	+ 3, 1

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione indotta in un cilindro indefinito da un sistema simmetrico di masse.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Beltrami.

Riprendendo gli sviluppi e le formule della Nota precedente [1], dobbiamo ora occuparci di determinare $\mu(\varsigma)$ dalla relazione:

$$
(1'') \qquad -\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t (z - s)\, \mathrm{P}(z, a)\, dz = h_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t (\zeta - s)\, \mu(\zeta)\, d\zeta .
$$

Sarà tuttavia necessario premettere alcune osservazioni sulla natura della funzione $h_1(t)$. In primo luogo essa non si annulla per t differente da zero. Per dimostrarlo, prendiamo $h_1(t)$ sotto la forma: $4\int_0^\infty \cos \pi t\lambda \,.\, k \,.\, \mathrm{K}\, d\lambda$ ed osserviamo dalle (2) (3) (della Nota precedente) che k e quindi K decrescono costantemente (convergendo il primo verso 0, il secondo verso $\frac{\pi}{2}$) col crescere indefinito di $z - \varsigma$, ossia di λ, mentre l'altro fattore $\cos \pi t\lambda$, che è positivo in un primo intervallo $\left(0 \ \frac{1}{2t}\right)$, si riproduce poi periodicamente coi segni alternati nei successivi intervalli di ampiezza $\frac{1}{2t}$. L'integrale $\int_0^\infty \cos \pi t\lambda . k . \mathrm{K} d\lambda$ della cui convergenza si ha in questo modo conferma diretta, si mantiene pertanto positivo per ogni valore di t finito e non nullo.

[1] V. questi Rendiconti, 2° sem. 1896, fasc. 12°.

Esaminiamo altresì come si comporta la funzione $h_1(t)$ per $t = 0$, il che incidentalmente ci condurrà anche a stabilire lo sviluppo di $h_1(t)$ considerato come funzione del parametro a, quando il raggio a del cilindro sia abbastanza piccolo.

Converrà perciò assumere $h_1(t)$ sotto la forma:

$$h_1(t) = 2\int_0^\infty \cos \pi t\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \frac{\cos \pi t\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi}}$$

ed esprimere l'integrale interno per funzioni cilindriche, valendosi di una formula di Sonine. Segue infatti dalle ricerche di queste autore (¹) che, per $-1 < m < 2(m+l) + \frac{3}{2}$ e per l numero intero, si ha:

$$\int_0^\infty \frac{I_m(bx)\, x^{m+1}\, dx}{(x^2+h^2)^{m+l+1}} = \frac{b^{m+l}\, h^{-l}\, i^l}{2^{m+l+1}\, \Pi(m+l)} \left\{ \pi i\, I_l(bhi) - Y_l(bhi) \right\},$$

dove I ed Y designano rispettivamente funzioni cilindriche di prima e di seconda specie d'ordine eguale al relativo indice, $\Pi(m+l)$ è la funzione fattoriale, che si può sostituire colla $\Gamma(m+l+1)$ (Γ indicando la funzione euleriana di seconda specie) e i è $\sqrt{-1}$ (²). Per applicare questa formula al caso nostro, facciamovi: $m = -\frac{1}{2}$, $b = \pi t$, $x = \lambda$, $h = 2a \cos \varphi$, $l = 0$ e notiamo (³) che: $I_{-\frac{1}{2}}(\pi t\lambda)\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{t}} \cos \pi t\lambda$, e che: $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Avremo:

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{t}} \int_0^\infty \frac{\cos \pi t\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi t}} \left\{ \pi i\, I_0(2ai\pi t \cos\varphi) - Y_0(2ai\pi t \cos\varphi) \right\}$$

ossia:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi t\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \left\{ \pi i\, I_0(2ai\pi t \cos \varphi) - Y_0(2ai\pi t \cos \varphi) \right\}.$$

Ora è proprietà nota della funzione cilindrica di seconda specie Y_0 che la differenza $Y_0(x) - 2 \log x\, I_0(x)$ è finita per $x = 0$ e sviluppabile in serie di potenze di x. Noi possiamo trarne la triplice conseguenza che

(¹) *Recherches sur les fonctions cylindriques.* Math. Ann., B. XVI, S. 51.

(²) Il secondo membro della formula precedente è complesso solo in apparenza, come si potrebbe verificare, tenendo presenti gli sviluppi delle funzioni I ed Y. Per lo scopo nostro serve però benissimo la forma sopra indicata.

(³) Ib., S. 34.

$Y_0(2ai\pi t \cos\varphi) - 2\log t\, I_0(2ai\pi t\cos\varphi)$ è funzione di t regolare per $t=0$, che $Y_0(2ai\pi t\cos\varphi) - 2\log a\, I_0(2ai\pi t\cos\varphi)$ è funzione di a regolare per $a=0$ e che $Y_0(2ai\pi t\cos\varphi) - 2\log\cos\varphi\, I_0(2ai\pi t\cos\varphi)$ è funzione di φ, regolare per $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Dopo ciò, si conclude senza difficoltà [1] che, per certi intorni di $t=0$ e di $a=0$, si ha:

$$h_1(t) = -4\pi a \log t + R_1(t) + t^2 \log t\, R_2(t)\ , \tag{5}$$

$$\frac{h_1(t)}{a} = -4\pi\log a + R_3(a) + a^2\log a\, R_4(a)\ , \tag{6}$$

R_1, R_2, R_3 ed R_4 designando serie di potenze.

Cerchiamo da ultimo ciò che avviene della funzione $h_1(t)$, quando t cresce indefinitamente. Osserviamo a tale scopo che l'espressione precedente di $h_1(t)$: $h_1(t) = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty \frac{\cos\pi t\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4a^2\cos^2\varphi}}$, tenuto conto del valore testè trovato per l'integrale interno, diviene:

$$h_1(t) = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \pi i\, I_0(2ai\pi t\cos\varphi) - Y_0(2ai\pi t\cos\varphi) \right\} d\varphi\,.$$

La quantità sotto il segno, come si è già osservato, è una funzione della variabile φ solo apparentemente complessa, la quale diviene infinita logaritmicamente appena nell'estremo superiore dell'intervallo di integrazione $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$; potremo dunque applicare il primo teorema della media e attribuire ad $h_1(t)$ la forma:

$$h_1(t) = 2\pi a \left\{ \pi i\, I_0(2ai\pi t\cos\bar\varphi) - Y_0(2ai\pi t\cos\bar\varphi) \right\},$$

$\bar\varphi$ essendo un certo valore di φ, compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, *gli estremi esclusi*.

Sotto questo aspetto si riconosce subito che $h_1(t)$ si annulla d'ordine $\frac{1}{2}$ per $t=\infty$, poichè, secondo una osservazione di Poisson, tale proprietà, al crescere indefinito dell'argomento, appartiene sì alla funzione I_0 che alla Y_0 [2].

[1] Basta tener presente che la I_0 è una funzione pari, eguale all'unità per il valore zero dell'argomento.

[2] Per dare a questa dimostrazione un carattere di completo rigore, avremmo dovuto mostrare altresì che il gruppo dei valori, assunti dalla funzione $\bar\varphi$ al crescere indefinito di t, *non* ammette $\frac{\pi}{2}$ come punto limite: ciò avrebbe per altro richiesto considerazioni minuziose, soverchiamente discoste dallo scopo della presente Nota.

Riassumendo, abbiamo stabilito che la funzione $h_1(t)$ della variabile t e del parametro a, supposto $a > 0$, diviene infinita logaritmicamente per $t = 0$, è diversa da zero e positiva per ogni valore finito di t e si annulla all'infinito d'ordine $\frac{1}{2}$; oltre a ciò, in un certo intorno di $a = 0$, sussiste la (6).

Ciò posto, notiamo ancora che il potenziale P delle masse inducenti è, nei punti ad esse esterni, ed in particolare sopra la superficie cilindrica, una funzione analitica di z e quindi ammette derivate di tutti gli ordini, nulle anch'esse all'infinito. Questo permette di eseguire in $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s)\, \mathrm{P}(z, a)\, dz$ una duplice integrazione per parti rispetto a z, assumendo ciascuna volta il fattore trigonometrico come fattore differenziale; siccome i termini ai limiti svaniscono, dividendo anche per $h_1(t)$, si ha l'identità:

$$-\frac{1}{h_1(t)}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s)\, \mathrm{P}(z, a)\, dz = \frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) \frac{\partial^2 \mathrm{P}(z,a)}{\partial z^2} dz,$$

da cui agevolmente deduciamo che la funzione:

$$-\frac{1}{h_1(t)}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s)\, \mathrm{P}(z, a)\, dz$$

e integrabile rispetto a t fra 0 e ∞. E per verità, ciò che si è visto, rispetto alla natura della funzione $h_1(t)$ per valori finiti di t, stabilisce senz'altro l'integrabilità di $-\frac{1}{h_1(t)}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s)\, \mathrm{P}(z, a)\, dz$ in ogni intervallo finito; la relazione identica sopra accennata permette poi di assumere per limite superiore anche l'infinito.

Prendendo infatti $-\frac{1}{h_1(t)}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s)\, \mathrm{P}(z, a)\, dz$ sotto la forma: $\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s)\, \mathrm{P}(z, a)\, dz$, abbiamo che separatamente i due fattori $\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) \frac{\partial^2 \mathrm{P}(z, a)}{\partial z^2} dz$ soddisfanno alle condizioni di integrabilità, quando il limite superiore converge verso l'infinito; $\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)}$ in quanto ha all'infinito uno zero d'ordine $\frac{3}{2}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) \frac{\partial^2 \mathrm{P}(z, a)}{\partial z^2} dz$, in causa del teorema di Fourier, per cui, avendosi:

$$\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) \frac{\partial^2 \mathrm{P}(z, a)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial^2 \mathrm{P}(s, a)}{\partial s^2},$$

siamo fatti certi che $\lim_{\beta, \beta' = \infty} \int_{\beta}^{\beta'} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) \frac{\partial^2 \mathrm{P}(z, a)}{\partial z^2} dz = 0.$

Dimostrata così la convergenza di $-\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)}\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(z-s)\,\mathrm{P}(z,a)\,dz$,

avremo dalla (1''), dividendone entrambi i membri per $h_1(t)$ e integrando fra 0 e ∞:

$$-\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)}\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(z-s)\,\mathrm{P}(z,a)\,dz = \int_0^\infty dt\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(\zeta-s)\,\mu(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Supponendo che all'incognita funzione $\mu(\zeta)$ sia applicabile il teorema di Fourier, abbiamo per essa l'espressione:

$$\mu(s) = -\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)}\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(z-s)\,\mathrm{P}(z,a)\,dz\,,$$

di cui oramai ci resta solo a constatare l'effettiva validità mediante diretta sostituzione nella (1). In primo luogo, ponendo ζ al posto di s e s al posto di z, potremo scrivere:

$$\mu(\zeta) = -\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)}\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\zeta)\,\mathrm{P}(s,a)\,ds \tag{7}$$

e il secondo membro della (1) assumerà l'aspetto:

$$-\int_{-\infty}^\infty d\zeta\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)}\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\zeta)\,\mathrm{P}(s,a)\,ds\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a\,d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}\,.$$

Invertendo, il che si riconosce facilmente essere lecito, l'integrazione rispetto a ζ con entrambe le intermedie rispetto a t e ad s, si ottiene:

$$\int_{-\infty}^\infty \mu(\zeta)\,d\zeta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a\,d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}} \tag{7'}$$

$$= -\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{P}(s,a)\,ds\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\zeta)\,d\zeta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a\,d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}\,.$$

Ora, se nel terzo integrale si assume $\lambda = \zeta - z$ come variabile di integrazione, si ha l'identità:

$$\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\zeta)\,d\zeta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a\,d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}$$

$$= \cos \pi t(s-z)\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a\,d\varphi}{\sqrt{\lambda^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}$$

$$+\,\mathrm{sen}\,\pi t(s-z)\int_{-\infty}^\infty \mathrm{sen}\,\pi t\lambda\,d\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a\,d\varphi}{\sqrt{\lambda^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}\,,$$

la quale, in causa della (4), e per essere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4ad\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 0 ,$$

si riduce semplicemente a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t (s - \zeta) \, d\zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4ad\varphi}{\sqrt{(z-\zeta) + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = h_1(t) \cos \pi t \, (s - z) .$$

Infine, portando questo valore nella (7'), troviamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \, d\zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4ad\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$= - \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t \, (s - z) \, \mathrm{P}(s, a) \, ds = - \mathrm{P}(z, a) ,$$

in virtù del teorema di Fourier.

Con ciò resta provato che la funzione $\mu(\zeta)$, definita dalla (7) soddisfa effettivamente all'equazione (1) e rappresenta per conseguenza la richiesta densità della distribuzione indotta.

Abbiamo dalla (7) che la quantità di materia, la quale viene a disporsi sulla superficie di un segmento cilindrico di spessore $d\zeta$, può essere espressa da:

$$2 \pi a \, \mu(\zeta) \, d\zeta = - d\zeta \int_0^{\infty} \frac{2\pi a}{h_1(t)} \, dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t \, (s - \zeta) \, \mathrm{P}(s, a) \, ds .$$

Supponendo a molto piccolo, cioè passando al caso limite del filo conduttore, il primo membro, diviso per $d\zeta$, rappresenta la densità lineare, che indicherò con $\nu(\zeta)$; la (6) ci dà poi:

$$- \frac{2\pi a}{h_1(t)} = \frac{1}{2 \log a} \left\{ 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_n \left(\frac{\mathrm{R}_3(a)}{4\pi \log a} + \frac{a^2 \mathrm{R}_4(a)}{4\pi} \right)^n \right\}$$

e, supponendo a così piccolo che i termini del tipo $\frac{1}{(\log a)^2}$, $\frac{a^2}{\log a}$ (e a più forte ragione i successivi $\frac{a^p}{(\log a)^q}$, $p \geq 1$, $q \geq 2$, ovvero $p \geq 2$, $q \geq 1$) si possano trascurare di fronte ad $\frac{1}{\log a}$, ne deduciamo:

$$- \frac{2\pi a}{h_1(t)} = \frac{1}{2 \log a} ;$$

quindi:

$$\nu(\zeta) = \frac{1}{2 \log a} \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t \, (s - \zeta) \, \mathrm{P}(s, a) \, ds ,$$

donde, al solito, applicando il teorema di Fourier:

$$\nu(\zeta) = \frac{1}{2 \log a} \mathrm{P}(\zeta, a) \tag{8}$$

Leggiamo in quest'ultima formula la proposizione seguente:

« *Un filo rettilineo indefinito a sezione circolare, in presenza di* « *masse esteriori, si elettrizza in modo che la densità lineare della di-* « *stribuzione indotta è, in ciascun punto, direttamente proporzionale al* « *potenziale esterno, e varia da filo a filo in ragione inversa del loga-* « *ritmo del raggio della sezione* ».

Nell'enunciato di questo teorema non è detto che la distribuzione inducente sia simmetrica, poichè il teorema stesso può ritenersi indipendente da tale condizione restrittiva. Qualora infatti lo spessore del filo sia abbastanza piccolo, il potenziale esterno può assumersi costante lungo ciascuna sezione circolare ed è quindi applicabile il procedimento testè indicato.

Fisica terrestre. — *Misure relative della componente orizzontale del magnetismo terrestre sul Monte Rosa, a Biella ed a Roma.* Nota di Alfonso Sella, presentata dal Socio Blaserna.

Mi propongo in questa Nota di esporre i risultati di alcune misure relative dell'intensità orizzontale del magnetismo terrestre, eseguite negli anni 1893 e 1894; le misure del 1893 furono fatte da me solo, quelle del 1894 in unione col dott. Antonio Ragnoli.

Veniamo dapprima ad una breve descrizione delle stazioni di osservazione.

Roma. — Come località fu scelta la Farnesina, già dettagliatamente studiata dal Folgheraiter e che ha servito come stazione centrale al Keller nelle sue numerose misure magnetiche nel Lazio [1].

Biella. — Le misure vennero eseguite nell'altipiano di alluvione sulla sinistra del torrente Cervo, presso le località dette S. Gerolamo e Rotonda. In simili terreni di alluvione alpina sono per vero a temersi perturbazioni magnetiche, potendo l'osservatore essere condotto a disporre l'apparecchio in vicinanza di un blocco, p. e., serpentinoso o dioritico, od anche di magnetite ricoperto dallo strato di terreno coltivato. Questo pericolo è però facile ad evitarsi, se si è constatato che uno spostamento del luogo di osservazione non

[1] G. Folgheraiter, *Sulla scelta d'un terreno per osservazioni magneto-telluriche.* Elettricista, II, 1893, p. 91. — F. Keller, *Risultati di alcune misure relative dell'intensità orizzontale del magnetismo terrestre*, Roma, 1894; e *Sull'intensità orizzontale del magnetismo terrestre nei pressi di Roma*, Roma, 1895.

produce delle variazioni sensibili nelle indicazioni dell'istrumento, oppure se si studia l'intorno della stazione coll'aiuto di una bussola di declinazione.

Monte Rosa. — La recente costruzione della capanna Regina Margherita sulla Punta Gnifetti (m. 4560) facilita assai le misure a quelle grandi altezze. L'altipiano estremo formato dal ghiacciaio del Grenz, cioè un formidabile ghiacciaio ricoprente roccie che offrono segni di magnetizzazione solo negli estremi cocuzzoli delle punte (1), costituisce un luogo molto adatto per misure magnetiche, potendosi escludere a priori perturbazioni locali. Le osservazioni vennero fatte sul ghiacciaio in diversi punti, non lungi dalla strada che si tiene ordinariamente per salire sulla Gnifetti dal colle del Lys ed all'altezza circa di m. 4300. Riporto pure le misure fatte sul ghiacciaio del Garstelet in località ove le perturbazioni sono assai più temibili, causa la natura delle roccie circostanti. Qui l'apparecchio fu disposto nel mezzo del ghiacciaio, all'altezza della via tenuta da chi lo attraversa per recarsi dal colle Vincent alla capanna Gnifetti.

Un'ultima stazione venne fatta sul prato che si estende a valle dell'albergo Thédy a Gressoney la Trinité, in località che si poteva a priori ritenere perturbata, perchè direttamente su terreno serpentinoso.

Metodo di misura. — Questo consisteva nel paragonare la durata di oscillazione di una sbarra magnetica parallelepipedica lunga 16 cm. e del peso di 40 gr., costruita da oltre 20 anni e quindi offrente garanzie di costanza del momento magnetico. La sbarretta sospesa ad un sottilissimo filo di seta lungo circa un metro, rinchiusa in una cassetta ed oscillante per le punte sopra due divisioni lineari, costituisce un apparecchio assai comodo per le misure e molto preciso, come lo dimostrano le numerose misure fatte dal Keller nel Lazio. Un eccellente cronometro Dent tascabile ed un termometro Baudin diviso in gradi, servivano alla misura del tempo e della temperatura della sbarretta. Prima dell'osservazione si aprivano i vetri della cassetta facendo oscillare il magnete per un'ora e mezza, affinchè esso assumesse la temperatura dell'aria. Si aveva cura di osservare in luogo protetto dai raggi solari e dal vento; questo si otteneva sul ghiacciaio sotto la tenda rincalzata tutt'all'intorno di neve. Si poneva in oscillazione la sbarra con un magnetino ausiliare, che poi veniva immediatamente portato a grande distanza (sul ghiacciaio bisognava anche allontanare gli scarponi a chiodi, gli occhiali da neve ecc.); indi si determinavano gli istanti dei passaggi della sbarra per la posizione di equilibrio nelle prime dieci oscillazioni, e poi gli istanti di passaggio nella oscillazione centesima sino alla centodecima, prendendo poi la media dei dieci intervalli di cento oscillazioni (intere) l'uno. L'orologio veniva tenuto nel piano normale al meridiano magnetico passante per il centro

(1) E. Oddone ed A. Sella, *Contributo allo studio delle roccie magnetiche nelle Alpi centrali*. Rend. 1891, VII, 1° sem., p. 100.

della sbarra durante le osservazioni, e poi discosto nell' intervallo dalla decima alla centesima oscillazione.

Il coefficiente termico del magnete fu determinato nell'Istituto fisico di Roma col metodo delle tangenti tra le temperature 0° e 40°. Come media delle misure fatte a più riprese, risultò il valore 0,000093. Questo numero insolitamente basso — circostanza estremamente favorevole nelle mie misure, che comportavano differenze di temperatura assai notevoli — è proprio al limite estremo inferiore assegnato dal Lamont al coefficiente termico dei magneti, ritenendo egli che esso varii fra 0,0001 e 0,001 (¹). Assumendo come coefficiente di dilatazione dell'acciaio il valore 0,000012, le durate di oscillazioni vennero moltiplicate per $(1 - 0{,}000058\,\theta)$ essendo θ la temperatura della sbarra. La correzione per l'ampiezza di oscillazione venne fatta colla nota formola di Borda; questa correzione ha del resto pochissima importanza in misure relative nelle quali — come fu fatto — si abbia cura che l'ampiezza iniziale e finale sieno sensibilmente le medesime (dell' iniziale si può naturalmente disporre a volontà; la finale dipende per lo stesso apparecchio dalla maggiore o minore altezza della sbarra sul fondo; la costanza del resto dell'ampiezza finale è un eccellente criterio per riconoscere se durante le oscillazioni è intervenuta qualche causa perturbatrice come urto, soffio di vento ecc.).

Finalmente l'essere la pressione atmosferica sul Monte Rosa quasi la metà come nelle altre due stazioni principali, non influisce sulla durata di oscillazione, essendo, come è noto, la resistenza dell'aria in prima approssimazione di nessun effetto sulla durata di oscillazione; nè è a temersi che cambii il momento d'inerzia della sbarra a causa della diversa massa d'aria trascinata insieme nel movimento; ci rassicurano in proposito le esperienze di Lamont (²).

Risultati. — Riporto in seguito i valori corretti della durata in secondi di un'oscillazione intera.

1893

Biella.		*Punta Gnifetti.*	
26 agosto	11″,6615	20 agosto	11″,7375
27 »	6576	21 »	7392
30 »	6844	29 settembre (³)	7308
31 »	6703		

(¹) Lamont, *Handbuch des Erdmagnetismus.* Berlin, 1849, p. 124.

(²) Lamont, *Reduction der Schwingungen eines Magnets auf den luftleeren Raum;* Pogg. Ann. 71, 1847, p. 124.

(³) In questa seconda spedizione alla Punta Gnifetti, potei fare una sola osservazione il giorno dell'arrivo; poscia fui colto da una violenta bufera, che mi costrinse nell' interno della capanna Margherita per molti giorni, rendendo poi difficile e pericolosa la discesa, causa la grande copia di neve fresca caduta.

Biella.			*Garstelet.*		
1	settembre	6648	22	agosto	11″,7228
2	"	6703	*Gressoney la Trinité.*		
5	"	6688	16	agosto	11″,8738
6	"	6770	17	"	8879
7	"	6616	23	"	8847
8	"	6759			
9	"	6692			
11	"	6844			
13	"	6684			
15	"	6735			
16	"	6741			

I valori riportati per un dato giorno rappresentano soventi la media di due o tre misure; ma non per ciò sarebbe il caso, nel fare le medie per ciascuna località, di dare pesi diversi ai valori per ciascun giorno, trattandosi di misure di una grandezza variabile col tempo, le cui variazioni possono essere molto superiori agli errori di osservazione. Avremo dunque

Biella.	26 agosto - 16 settembre	11″,6708
Punta Gnifetti.	20 e 21 agosto; 29 settembre	11,7346
Ghiacciaio Garstelet.	22 agosto	11,7228
Gressoney la Trinité.	16-23 agosto	11,8821

Dalle misure del 1893 risulta adunque come rapporto del valore della componente orizzontale a Biella e sul Rosa (Punta Gnifetti)

$$\frac{H_B}{H_G} = 1,0110.$$

Veniamo ora alle misure del 1894.

Biella.			*Roma.*		
25	luglio	11″,6871	26	aprile	11″,1464
27	"	6937	6	maggio	1489
28	"	6855	30	"	1578
31	"	6756	4	luglio	1328
			8	dicembre	1383
1	agosto	6811	12	"	1406
2	"	6753	13	"	1416
4	"	6703	17	"	1396
7	"	6679	*Punta Gnifetti.*		
8	"	6770	22	agosto	11″,7346
10	"	6671	25	"	7467
11	"	6687	26	"	7321
14	"	6683	27	"	7219
19	"	6778	*Garstelet.*		
			27	agosto	11″,7220
			Gressoney la Trinité.		
			19	agosto	11″,8885

E le medie risultano in:

Biella.	25 luglio - 29 agosto	11",6766
Roma.	4 aprile - 17 dicembre	11,1433
Punta Gnifetti.	22 - 27 agosto	11,7338
Ghiacciaio Garstelet.	27 agosto	11,7220
Gressoney la Trinité.	19 "	11,8885

e quindi avremo i rapporti

$$\frac{H_B}{H_G} = 1,0098 \qquad \frac{H_R}{H_B} = 1,0980.$$

Quest'ultimo rapporto fra Roma e Biella ove venisse corretto per l'effetto prodotto dall'induzione della Terra sulla sbarra, non sarebbe alterato che di una od al più due unità nell'ultima cifra decimale.

Il confronto tra i valori della componente orizzontale a Biella e sul Rosa potrebbe gettare luce sull' importante questione della variazione del magnetismo terrestre coll'altezza, sulla quale si hanno dati assai scarsi. Infatti poco si può dedurre dalle vecchie misure di Biot e Gay-Lussac in pallone areostatico, di Saussure sul Monte Bianco, di Kupffer nel Caucaso, di Laugier e Mauvais sui Pirenei, di Bravais sul Faulhorn e sul Monte Bianco. Dalle osservazioni di Erman (Newjansk, Jekaterinenburg), di Locke (Canada), di Lenz (isola Jussar-Oe) e dalle misure di O. E. Meyer nei monti della Slesia e della Boemia, risulta in modo concorde che l'intensità orizzontale cresce coll'altezza in monti costituiti da roccie magnetiche. Così le misure di declinazioni fatte da Oddone e Franchi sul monte Gronda, le numerose osservazioni di Folgheraiter, di recente pubblicate in questa Accademia, sulle condizioni delle roccie magnetiche nel Lazio, conducono a considerare un monte formato da roccie magnetiche come magnetizzato per induzione dal campo terrestre e questo porta senz'altro ad un aumento dell'intensità orizzontale sulla vetta.

Invece importerebbe assai anche sotto il punto di vista del problema teorico del magnetismo terrestre, il conoscere come stieno le cose quando si paragonino fra di loro due stazioni a grande differenza di altezza, ma situate sopra terreno non magnetico, ed a sufficiente distanza da terreni magnetici.

Ora se la prima condizione è soddisfatta per le due stazioni Biella e Punta Gnifetti, non può dirsi altrettanto della seconda; come lo provano le roccie fortemente magnetiche a punti distinti che io ho riscontrato sul Riffelhorn, a Zermatt, sul colle del Teodulo, sul Piccolo Cervino, presso il Col d'Olen, presso Gressoney (vedi questi Rend. 1891, VII, 1° sem., p. 100) ed inoltre i valori assolutamente anormali della componente orizzontale ad Alagna e Gressoney, determinato il primo da Battelli, risultante tale il secondo dalle mie misure relative. E del resto ai piedi del Monte Rosa abbondano tutto all'at-

torno roccie amfiboliche e serpentinose dotate di magnetizzazione molto intensa. E voglio ancora fare osservare che le mie misure a Gressoney la Trinité diedero valori concordanti anche spostando l'apparecchio di 200 metri, dal che risulta che si hanno qui anomalie che interessano vasti tratti di terreno e non le comuni irregolarità a brevissimi intervalli delle roccie a punti distinti.

Ad ogni modo data la distanza sia orizzontale, sia verticale della stazione sulla Gnifetti da queste località perturbate, non sarà del tutto inutile il confrontare sotto questo punto di vista Biella col Monte Rosa con un dislivello di circa 4000 metri. Bisogna però tenere conto della differenza di latitudine, ed è questa una correzione non facile, essendo assai incerto il gradiente della componente orizzontale, quando si attraversano le Alpi. Per averne un'idea, ho paragonato il valore della componente orizzontale a Novara determinato dal Chistoni [1] coi valori in stazioni della Svizzera all'incirca sul medesimo meridiano determinati dal Battelli [2] in terreni meno sospetti per la loro natura geologica.

Risulta da questi confronti come gradiente al minuto di latitudine:

Novara. —	*Göschenen*	0,00034
"	*Flüelen*	32
"	*Arth-Goldau*	31
"	*Rigi-Kulm*	31
"	*Linththal*	32
	Media	0,00032

Ora la differenza di latitudine delle mie due stazioni a Biella e sul Rosa è di circa 21′ e quindi il rapporto $H_B | H_G$ dovrebbe essere secondo tale gradiente 1,0067 invece del valore osservato 1,0104. Quindi, con tutte le riserve fatte avanti, si verrebbe a concludere che la componente orizzontale diminuisce coll'altezza e col gradiente di circa 0,001 ogni mille metri.

Fisica. — *Azione di un raggio luminoso, periodicamente interrotto, sul selenio* [3]. Nota del dott. Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Facendo seguito ad un mio precedente lavoro [4], *sulla rapidità dei fenomeni foto-elettrici del selenio*, espongo delle altre esperienze e considerazioni sull'argomento.

Ricordo anzitutto brevemente i risultati di quello. Illuminando una cel-

[1] Annali dell'Ufficio centrale Meteorologico e Geodinamico italiano, serie 2ª, vol. VIII, parte I, p. 104, 1889.

[2] Id. id. serie 2ª, parte III, vol. XI, 1891.

[3] Lavoro eseguito nel R. Istituto Fisico dell'Università di Roma.

[4] R. Acc. dei Lincei, 1894, vol. III, 1º sem., fasc. 3º.

lula a selenio, l'abbassamento di resistenza elettrica prodotto, non iscompare istantaneamente col cessar della luce, ma perdura assai sensibilmente sino a parecchi secondi dopo. Il fenomeno è rappresentato, per una cellula da me costruita, e di cui diedi la descrizione nella mia prima Nota, dalla curva C_1 della fig. 1. In questa l'asse OX è quello dei tempi contati a partire dall'istante in cui l'illuminazione cessa, e l'asse OY quello delle resistenze della cellula.

Parecchi anni or sono i sigg. Bellati e Romanese assoggettarono una cellula a selenio del Bréguet di Parigi, all'azione di un raggio periodicamente interrotto da un disco girante con fori alla periferia [1]. Osservarono che la resistenza di quella restava immutata al variare della velocità rota-

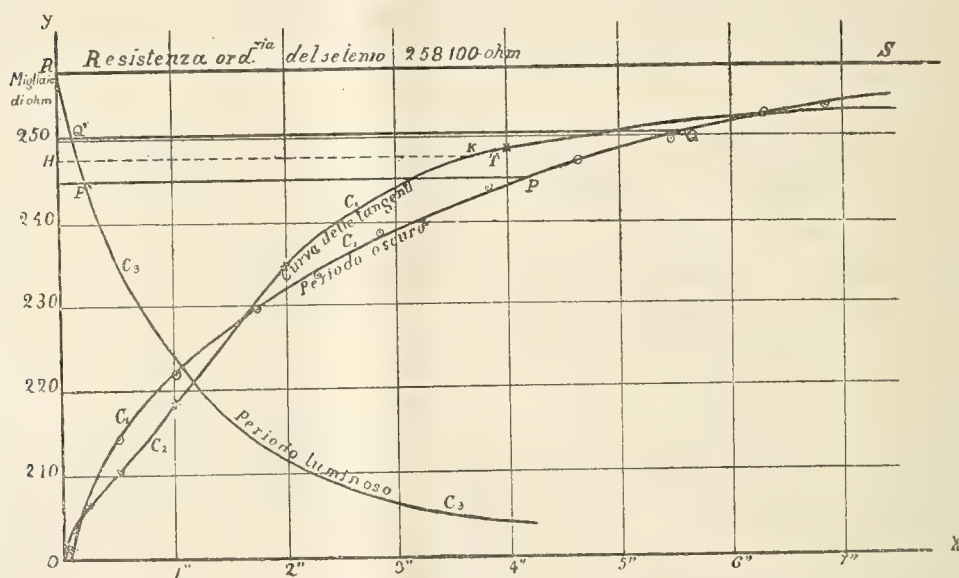



Fig. 1ª

toria del disco. Gli sperimentatori operarono con dischi aventi rapporti variabili tra i *pieni* e i *vuoti*, e in qualunque caso trovarono che, variando la velocità, la resistenza della cellula restava costante per lo stesso disco. Inesattamente gli autori ne trassero la conseguenza di una estrema rapidità nello svolgersi dei fenomeni foto-elettrici del selenio. Ho ripetuto infatti l'esperienza, servendomi di un galvanometro semplice anzichè differenziale, come era quello adoperato dagli autori, e il risultato da me ottenuto è stato identico a quello di questi; vale a dire la deviazione del galvanometro rimaneva assolutamente costante, malgrado che avessi spinto il numero delle interruzioni del raggio luminoso, sino a 10,000 per minuto secondo. Ho operato con due dischi di differente costruzione. Uno di essi, in metallo e di circa 10 cm. di raggio, aveva 100 tagli radiali partenti dalla periferia. Le larghezze dei tagli

(1) Atti del R. Istituto Veneto di sc. lett. ed arti, 1883.

e quella dei denti che ne risultavano, erano eguali; eguali dunque erano le durate di illuminazione e di oscurità. Potevo animare il disco della velocità di circa 100 giri a 1″ corrispondente alle 10,000 interruzioni di cui ho detto. Ma al fine di meglio studiare il fenomeno, ho voluto costruire un disco che mi permettesse, mediante un semplice congegno meccanico, di far variare a volontà il rapporto delle durate di luce e di oscurità. Esso è rappresentato dalla fig. 2; era in sottile metallo e fornito di aperture o finestre triangolari come si scorge dal disegno. Dirigendo un fascio di luce concentrata da una lente contro il forellino F della lastra metallica P fissata al sostegno del disco, e quindi non girevole con questo, a seconda che essa veniva più o meno avvicinata al centro del disco, al girare di esso, potevano rendersi le durate di illuminazione più grandi o più piccole di quelle di oscurità. Per ogni posizione dunque della lastra P il galvanometro dava deviazioni diverse.

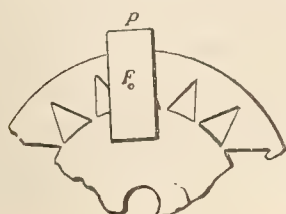



Fig. 2ª

In tale guisa ho determinato ogni volta la resistenza media della stessa cellula che fornì la curva C_1, comparandola come già avevo fatto in precedenza con quella, conosciuta, di una soluzione di solfato di rame. Per ragioni, che si rileveranno in seguito, regolai l'intensità del fascio luminoso adoperato, in modo che per una continua illuminazione della cellula questa presentasse una resistenza di circa 200,000 ohm, mentre al buio ne presentava una di 260,000 circa. Queste due cifre sono i limiti dentro cui avevo, per lo studio da me fatto in precedenza, la conoscenza della C_1 (fig. 1). Un maggiore abbassamento avrei potuto provocare nella resistenza della cellula, servendomi direttamente della luce solare. Riporto le medie delle osservazioni:

Durata		Resistenza della cellula
della luce	della oscurità	per qualunque velocità del disco
1	0	200.000 ohm
1	1/4	206.200 »
1	1/2	210.400 »
1	1	218.800 »
1	2	235.000 »
1	4	248.800 »
0	1	258.100 »

Il diagramma della resistenza della cellula per una certa velocità del disco, può essere rappresentato dalla figura 3. In questa è supposto che le durate di illuminazione sieno più grandi di quelle di oscurità. Il modo di variare della resistenza del selenio in un periodo di oscurità, è come si è visto, dato dalla curva C_1 della fig. 1. Se il periodo è piccolo, come è il caso di quelli generati dalle interruzioni del disco, in modo da non suscitare

delle oscillazioni sugli aghi del galvanometro, approssimativamente la resistenza crescerà secondo un segmento rettilineo *o*. Nei periodi di luce invece, poichè si tratta di fenomeno di egual natura, è logico ammettere che la re-

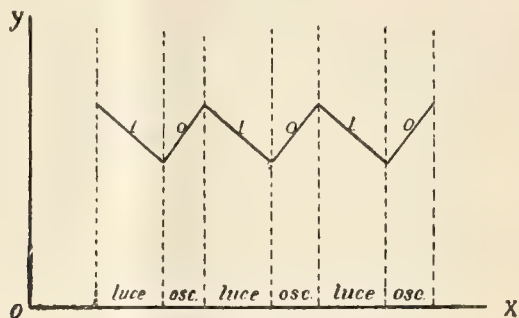



Fig. 3ª

sistenza diminuisca secondo altri segmenti rettilinei *l*. Questi segmenti *l* sono tutti uno stesso tratto sensibilmente rettilineo di una curva C_3 (fig. 1) finora conosciuta, come i segmenti *o* sono tutti uno stesso tratto della C_1.

Per una stessa posizione della lastra P della fig. 2, poichè resta immutata la resistenza della cellula, pur variando la velocità, i segmenti *l*, *o*, non cambiando di inclinazione, si raccorciano, ed i loro punti di mezzo restano sempre sopra una parallela all'asse dei tempi i cui punti hanno per ordinata il valore di quella resistenza. Si vede dunque che per qualunque rapidità di rotazione del disco, per le ipotesi fatte, la resistenza del selenio oscilla sotto l'influenza del raggio luminoso, ma le ampiezze di tali oscillazioni vanno continuamente diminuendo col crescere della velocità del disco sino a diventare insensibili, come ha potuto constatare Mercadier, il quale non otteneva suoni con più di 1800 vibrazioni, da un telefono inserito nello stesso circuito di una cellula.

Se cambia la posizione della lastra P, e cioè il rapporto tra le luci e le oscurità, variano le inclinazioni dei segmenti *l*, *o*, ed essi saranno due piccoli tatti delle C_1 e C_3 staccati metà a destra e metà a sinistra di quei punti di medesima ordinata in cui *le tangenti trigonometriche delle due curve hanno valori inversamente proporzionali alle durate di oscurità e di luce, e di segno contrario.*

Ma vediamo se non si possa ricercare, coi dati che si posseggono, la curva C_3.

Riportisi sopra delle rette parallele ad OX (fig. 1), passanti per i valori delle resistenze assunte dalla cellula sotto l'azione del raggio luminoso periodicamente interrotto, e a partire dall'asse OY, i rapporti numerici delle rispettive durate di *oscurità* e di *luce*. Si otterrà la curva C_2 che chiamo per semplicità *curva delle tangenti*, e che partendo dalla resistenza mi-

nima 200,000 ohm, diventa assintotica alla retta parallela ad OX di ordinate eguali alla resistenza massima 258,100 ohm. La scala delle ascisse di questa curva potrebbe nel disegno essere arbitraria. Ma per comodità l'unità è rappresentata dallo stesso segmento che per la C_1 rappresenta l'unità di tempo e cioè il minuto secondo. È ora facile trovare la C_3. Si conducano delle rette parallele all'asse dei tempi come le due P'P e Q'Q. Esse debbono essere distanti tra di loro in guisa da intercettare sulla C_1 dei tratti che sensibilmente possano ritenersi rettilinei, come è il tratto PQ. Sia m la lunghezza del segmento proiezione di PQ sopra OX, segmento che non è segnato in figura. Se si traccia a partire da un punto arbitrario Q' di QQ' un tratto rettilineo Q' P' compreso tra QQ' e PP', tale che la sua proiezione sopra PP' sia

$$-\frac{m}{\mathrm{HK}} = -\frac{m}{3{,}7},$$

Q' P' sarà un tratto della curva C_3.

La ragione di ciò è manifesta, tenendo conto di quanto precedentemente si è visto. Si prosegue quindi da P' in giù il tracciamento della C_3, in guisa affatto analoga. Siccome la curva C_1 è assintotica alla retta RS, così è difficile il tracciamento del segmento R Q' della C_3, anche perchè l'ultimo tratto della C_2, è stato tracciato per extrapolazione grafica al di là del punto ultimo osservato T. È quindi necessario costruire egualmente per extrapolazione il tratto R Q', e poi spostare tutta la C_2 con moto parallelo ad OX, sino a che il suo punto estremo R venga a giacere sopra l'asse OY delle resistenze. Quest'ultima operazione non è indicata nella figura per semplicità, e la C_2 è nella sua giusta posizione. Osservo che anche commettendo un errore sulla costruzione dell'ultimo tratto R Q', ciò non può portare che una piccola influenza sopra la posizione della C_3, perchè questa in quel tratto ha una tangente molto grande, astrazione facendo dal segno.

È facile in base alle considerazioni ed ipotesi fatte, trovare una relazione analitica tra le curve C_1, C_2, C_3.

Sia

$$r = \mathrm{F}(t)$$

l'equazione della C_1 dove r rappresenta la resistenza variabile del selenio, e t il tempo. Scrivasi la stessa, ponendo come variabile indipendente la t:

$$t = f(r)$$

L'equazione delle tangenti trigonometriche x_1 a C_1, riferite all'asse OY, ossia delle cotangenti riferite ad OX è

$$x_1 = \frac{dt}{dr} = \frac{df(r)}{dr} \tag{1}$$

Sia ora

$$z = \varphi(r)$$

l'equazione della C_2; poichè nel caso della figura l'unità di misura del parametro variabile z fu scelta linearmente eguale a quella del tempo, così si potrà anche scrivere:

$$t = \varphi(r)$$

L'espressione

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{C_1} \cdot \frac{1}{\varphi(r)}$$

è per cose già viste il valore della tangente trigonometrica della C_3 con segno cambiato, nel punto di medesima ordinata a quello in cui è stata presa la derivata $\frac{dt}{dr}$ per la C_1.

E quindi l'equazione analoga alla (1) per le tangenti della C_3 è

$$x_3 = -\left(\frac{dt}{dr}\right)_{C_1} \cdot \frac{1}{\varphi(r)}$$

o cioè

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{df(r)}{dr}\frac{1}{\varphi(r)} \tag{2}$$

che integrata dà l'equazione della C_3:

$$t = -\int \frac{df(r)}{dr}\frac{1}{\varphi(r)}\,dr + \text{Cost.}$$

Non è facile determinare la natura delle tre curve C_1, C_2, C_3; avrei potuto, mediante il metodo delle costanti fisiche, trovare delle espressioni analitiche più o meno approssimate delle C_1 e C_2, e conseguentemente se l'integrazione fosse stata possibile, trovare l'equazione della C_3; ma ciò non sarebbe stato di grande importanza. Invece farò vedere che se fosse lecito supporre che la variazione della resistenza della cellula avvenisse con legge analoga a quella della propagazione del calore, vale a dire fosse proporzionale alla differenza tra la resistenza finale (in luce od in oscurità) e quella variabile in ogni istante, sarebbe facile trovare una espressione della C_2.

Sia dunque secondo l'ipotesi fatta

$$\frac{dr}{dt} = c\,(R - r) \tag{3}$$

la equazione differenziale della C_1. Le resistenze vengono contate a partire dall'origine O, e quindi nel caso della figura esse sarebbero state tutte di-

minuite di 200,000 ohm. Nella precedente espressione R è la resistenza ordinaria, quando cioè la cellula non è colpita da luce, ed r è quella variabile, c è una costante di proporzionalità. Analogamente l'equazione della C_3 è

$$\frac{dr}{dt} = -c' r \,. \tag{4}$$

Le due espressioni (3) e (4) integrate danno due equazioni esponenziali per C_1 e C_3 e cioè

$$\begin{aligned} ct &= -\log.(R - r) + H \text{ (oscurità)} \\ c't &= -\log. r + K \text{ (luce)} \end{aligned}$$

dove H K sono due costanti, od anche

$$\begin{aligned} r &= R - he^{-ct} \text{ (oscurità)} \\ r &= he^{-c't} \text{ (luce)} \end{aligned}$$

L'espressione (2) della C_2 si può anche scrivere

$$-\left(\frac{dr}{dt}\right)_{C_3}\left(\frac{dt}{dr}\right)_{C_1} = \varphi(r) = t$$

Servendosi dunque dei valori di queste due derivate dati dalle (3) e (4) si ha

$$\frac{c'r}{c\,(R - r)} = t$$

Se essa vien riferita invece che agli assi OX ed OY, ad RS, e ad un asse delle resistenze che si trova spostato rispetto ad OY verso i tempi negativi per la costante $\frac{c'}{c}$, assume la forma assai semplice;

$$tr = -\frac{c'R}{c}.$$

Il che dice che C_2 è un' iperbole equilatera i cui assintoti sono l'asse RS ed una retta parallela ad OY, e che si trova sulla sinistra di questa a una distanza eguale alla cost. $\frac{c'}{c}$.

La curva C_1, per una stessa cellula, è unica, perchè come altrove feci osservare, è logico ammettere che se una particella di selenio in un certo istante ha una resistenza diversa da quella che essa avrebbe qualora non fosse stata perturbata da azione luminosa, da quell'istante la resistenza vada aumentando, e ciò sempre alla stessa guisa, indipendentemente dall'essere stata colpita da luce più o meno intensa e per tempi più o meno lunghi.

$$-(c't + K)$$

Ma di curve C_3 ve ne possono essere infinite, poichè ad ogni intensità luminosa corrisponde una curva diversa. È chiaro però che, prescindendo dal fatto che una luce troppo intensa può alterare la sensibilità di una cellula a selenio, tali curve non possano oltrepassare una certa posizione di ox, più bassa di quella segnata nella fig. 1, che sarà la *posizione limite* dell'asse dei tempi, e ciò perchè non è ammissibile che la resistenza della cellula possa decrescere indefinitamente.

Poichè per ogni intensità luminosa vi è una curva C_2 speciale, e quindi anche una C_3, la legge con cui decresce la resistenza del selenio sotto l'azione della luce, non è in generale esattamente l'inversa di quella con cui, successivamente, cresce nell'oscurità.

In un modo simile a quello con cui ottenni la C_1, potrebbe tentarsi la ricerca diretta della C_3; termino dunque proponendo a chi volesse studiare l'argomento, la verifica sperimentale delle considerazioni fatte.

Chimica biologica. — *Sopra un fermento solubile che si trova nel vino.* Nota di Giulio Tolomei, presentata dal Socio Blaserna.

È noto che l'azione dell'aria sul vino provoca l'ossidazione della materia colorante, la rende insolubile e sviluppa dei profumi particolari. Il Martinand ha emesso l'ipotesi [1] che queste reazioni possano essere prodotte da un fermento solubile, o *enzima*, avente le proprietà di quello, chiamato *laccasi*, trovato dal Bertrand in diverse parti di molte piante [2].

Le esperienze seguenti confermano tale ipotesi. Le uve mature dànno, all'aria, con la tintura di resina di guaiaco, con l'idrochinone e col pirogallolo le reazioni caratteristiche indicate dal Bertrand per la laccasi; e tali reazioni non hanno più luogo se il liquido ottenuto da quelle uve si riscalda a 100°; il mosto non si decolora più all'aria, ma acquista di nuovo questa proprietà se si addiziona di enzima precipitato dall'alcool in un mosto d'uva non riscaldato.

Esaminando il contenuto degli acini, si riscontra che il fermento solubile in questione si trova nelle uve mature in maggior quantità che in quelle acerbe, ed è attorno ai semi che si rinviene più abbondante.

Lo studio della fermentazione del mosto dimostra inoltre che il fermento solubile si diffonde molto lentamente, anche se gli acini sono completamente immersi. La polpa dà con la tintura di guaiaco una colorazione molto intensa, mentre il liquido si colora poco; ma se si lasciano le vinacce in contatto

(1) Comptes rendus, vol. CXXI, p. 502.
(2) Ibid., vol. CXX, p. 266; vol. CXXI, p. 166.

del vino, questo si colora di più in più con la tintura di guaiaco, ed inoltre con dei lavaggi successivi della vinaccia si disciolgono sempre nuove quantità di questo enzima. Di più una fermentazione energica ne fa disciogliere nel mosto una quantità maggiore che una fermentazione lenta, ed una grande divisione della polpa agisce nello stesso senso.

Essendomi proposto di indagare da che cosa potesse prevenire l'enzima in questione, ho istituito alcune ricerche i cui risultati mi sembra che possano condurre a conclusioni molto interessanti. In questa Nota espongo brevemente quello che ho fatto, e quello che ho trovato.

Presi del fermento di moscato, come viene spedito di Francia dall'Istituto La Claire, lo aggiunsi a mosto d'uva perfettamente sterilizzato, che non dava all'aria nessuna delle reazioni indicate dal Martinand; lasciai compiere la fermentazione, e dopo avere abbandonato il tutto in riposo, fuori del contatto dell'aria, decantai il liquido sovrastante, ed ebbi così una quantità rilevante di fermento ellittico che lavai a più riprese con acqua distillata e sterilizzata. Posta la poltiglia formata dalle cellule del fermento sopra un pezzo di carta da filtri, la feci un poco asciugare; poi ripresala con acqua cloroformizzata e lasciatala riposare per un paio d'ore, la filtrai ottenendo un liquido leggermente colorato in giallo, il quale diede all'aria con la tintura di resina di guaiaco, con l'idrochinone e col pirogallolo le reazioni caratteristiche indicate dal Bertrand per la laccasi, e dal Martinand per il fermento solubile del vino. Fra queste reazioni quella che riesce sempre meglio è la prima, e consiste nella produzione di una bella colorazione azzurra della tintura di resina di guaiaco in contatto della sostanza che si studia. Tale reazione non deve essere confusa con quella indicata da Schoenbein, e che consiste nella colorazione azzurra della tintura di resina di guaiaco in presenza di una mescolanza di acqua ossigenata e di diastasi ordinaria ricavata dal malto d'orzo.

Gli stessi risultati ottenni con del lievito di birra selezionato (*Saccharomyces cerevisiae*) e col fermento apiculato (*S. apiculatus*).

Aggiungendo un eccesso d'alcool al liquido ottenuto nel modo sopra descritto, si ottiene un leggero precipitato bianco; e l'acqua madre alcoolica, che si può separare da esso, conserva le proprietà di colorare intensamente in azzurro la tintura di resina di guaiaco; ciò che dimostra che il fermento è solubile nell'alcool di media concentrazione.

Questi fatti dimostrano che anche nel fermento ellittico è contenuto lo enzima trovato dal Martinand nel vino, o almeno vi si trova un fermento solubile che gode delle medesime proprietà.

E molto probabilmente sono dovute ad un'enzima analogo a quello in quistione le proprietà scoperte qualche anno addietro dal sig. De Rey-Pailhade nell'estratto alcoolico del lievito di birra. Per preparare tale estratto

si prende del lievito di birra molto giovane, si sospende in una certa quantità d'acqua contenente disciolto del glucosio, si aggiunge dell'alcool ed il miscuglio ottenuto si conserva in un pallone, in un ambiente a 0°, agitandolo di tanto in tanto.

Il liquido filtrato, in capo a tre giorni, attraverso ad un filtro ordinario di carta e poi passato alla bugia sterilizzatrice D'Arsonval, è posto sotto la campana della macchina pneumatica, nella quale viene fatto il vuoto per togliere l'eccesso di anidride carbonica. Questo liquido, contenente circa il 20 per certo d'alcool, un poco acido e privo di ogni organismo vivente, gode delle tre proprietà chimiche seguenti: 1° in contatto con lo zolfo produce idrogeno solforato; 2° sviluppa anidride carbonica fuori del contatto dell'aria; 3° assorbe ossigeno dall'aria libera. Inoltre, come io ho potuto riscontrare, anche questo liquido dà con la tintura di resina di guaiaco una bella colorazione azzurra, e perde questa proprietà quando è scaldato per pochi minuti a 72°. Con un eccesso d'alcool dà un precipitato bianco di enzima che, aggiunto al liquido riscaldato a 72°, gli fa riacquistare le proprietà perdute col riscaldamento. Nessun dubbio quindi che le proprietà dell'estratto alcoolico del lievito di birra preparato nel modo anzidetto, non siano dovute alla presenza in quel liquido di un fermento solubile analogo alla laccasi.

*
* *

Il Martinand, volendo vedere se l'enzima da esso trovato nel vino esercita un'influenza sull'invecchiamento, ossia prende parte alle reazioni che si producono nel vino che invecchia, aggiunse dell'enzima, precipitato con l'alcool, a del vino di Borgogna del 1894, esposto all'aria, e trovò che in capo a 48 ore quel vino presentava un colore più giallo, ed aveva un profumo di vino vecchio molto più accentuato di quello del campione testimonio.

Volendomi persuadere della cosa, e nello stesso tempo vedere se l'enzima ricavato dal fermento ellittico gode delle medesime proprietà, potei constatare un fatto che mi sembra di una grande importanza per l'enologia, giacchè risolve la questione, da tanto tempo dibattuta, dell'origine del profumo del vino. Ricavato una certa quantità di enzima da un fermento di moscato ed aggiuntala a del vino bianco ordinario, riscontrai che non solo questo acquistava il gusto di vino vecchio, ma in capo ad un certo tempo, mantenendolo in contatto dell'aria, presentava il profumo particolare del moscato che prima non aveva affatto. Ripetuta l'esperienza con altri fermenti ottenni sempre il medesimo risultato.

Aiutando l'azione dell'enzima col porre i recipienti contenenti il vino sotto una campana ripiena di ossigeno, invece che di aria, l'invecchiamento e lo sviluppo del profumo particolare del vino, da cui fu tolto il fermento ellittico che servì a preparare l'enzima adoperato, ha luogo più rapidamente, e ancora più presto se l'ossigeno della campana è leggermente ozonato.

Ma vi è peraltro una differenza in peggio in confronto col vino lasciato semplicemente esposto all'aria, differenza che, sebbene sia molto piccola, è facilmente avvertita.

Non posso dir nulla relativamente a quello che succede quando il vino, invece di essere esposto all'aria, è chiuso in recipienti nei quali l'ossigeno non arriva che lentamente attraverso alle pareti o ai turaccioli di sughero; ma ho incominciate alcune esperienze in proposito, e ne darò a suo tempo i risultati.

Adoperando del vino perfettamente sterilizzato si ha sempre lo sviluppo del profumo dopo l'aggiunta dell'enzima ottenuto da un dato fermento, accompagnata dall'esposizione all'aria; ciò che dimostra che le idee che si hanno sopra i processi chimici che si producono in un vino che invecchia, devono essere modificate. Quando il vino ha finito di fermentare nel tino, l'azione del fermento figurato è finita, e comincia allora quella dell'enzima elaborato da quel fermento, azione lenta che ha per effetto il deposito della materia colorante e l'eterificazione dell'alcool.

Un altro fatto che conferma questo modo di vedere, è che, mentre l'azione della luce non è favorevole allo sviluppo dei fermenti figurati, favorisce l'azione dell'enzima. Infatti, aggiungendo dell'enzima ottenuto nel modo indicato sopra a due porzioni uguali dello stesso vino sterilizzato, ed esponendo l'una alla luce del sole e mantenendo l'altra nell'oscurità, alla stessa temperatura, si ha nel primo vino, dopo 48 ore, lo sviluppo del gusto di vecchio, mentre nel secondo non si riscontra alcuna modificazione, ed è solo dopo un tempo molto più lungo che si comincia a produrre un leggero accenno alle modificazioni anzidette. Ora, tutti sanno che un mezzo per invecchiare rapidamente il vino consiste appunto nell'esporlo, in bottiglie di vetro ben trasparente, all'azione della luce solare; quindi nessun dubbio che l'invecchiamento non sia prodotto dall'azione del fermento solubile in questione, favorita dalla luce del sole.

Questa interpretazione del fenomeno è confermata anche dal fatto seguente. Per conservare un fermento purificato e mantenergli le sue proprietà per servirsene in seguito, si paralizza la sua attività, ossia si esaurisce facendolo vivere in un mosto costituito da acqua zuccherata al 10 per cento, che si rinnova fino a che esso sia divenuto incapace di agire su questo mezzo, e di manifestare il più piccolo sintomo di fermentazione. Questo fermento, conservato sotto l'acqua zuccherata, si risveglierà quando sarà posto in un mosto contenente tutti gli elementi necessarî al suo sviluppo. Ora, durante il periodo che precede questa specie di letargo, mentre le cellule agiscono ancora un poco sull'acqua zuccherata, si produce in questa il profumo particolare del vino a cui il fermento adoperato darebbe luogo, e decantando quest'acqua zuccherata si ottiene un liquido, contenente pochissimo alcool di fermentazione, il quale dà con la tintura di resina di guaiaco, con l'idrochinone e col

pirogallolo le reazioni caratteristiche del fermento trovato dal Martinand nel vino.

Concludendo: dai fatti e dalle esperienze sopra riportate si può trarre la conseguenza che il *Saccharomyces ellipsoideus*, durante il suo sviluppo, elabora un fermento solubile, il quale, rimanendo disciolto nel vino, è capace di compiere tutte le modificazioni che si producono in un vino che invecchia.

Di più il trovarsi il fermento solubile nelle uve mature, quando appunto su di esse si comincia a constatare la presenza delle cellule del fermento ellittico, fa supporre che anche nelle condizioni di vita in cui si trova il fermento stesso sopra gli acini, sia capace di segregare la sostanza in questione, precisamente come avviene quando si paralizza l'azione del fermento nell'acqua zuccherata nel modo sopra indicato.

Inoltre, il fatto che l'azione del fermento solubile di cui si tratta è modificata a poco a poco dalla temperatura fino ad essere annullata, potrebbe far supporre che si trattasse di più fermenti invece che di uno solo, che esercitassero ciascuno una azione speciale; ma per ora non si può affermare niente di certo.

Mineralogia. — *Il granato a Caprera ed in Sardegna.* Nota di D. LOVISATO, presentata dal Socio STRUEVER.

I minerali di questo gruppo, che tanto differiscono fra loro pei componenti chimici e pei pesi specifici, sono conosciuti in taluni punti dell'isola fino dai tempi del Lamarmora.

Infatti nella sua classica opera noi troviamo citati gli schisti ricchi in granato di S. Lucia di Posada (1), la massa granatifera giallo-verdastra, accompagnante la magnetite di Perdasterri (Perda Steria) (2), l'altra analoga di Talana nella località Perda e Mengia (3) e di altri giacimenti di magnetite, nonchè il curioso granato di colore rosso d'un filone di retinite madreperlacea nell'isola di S. Pietro, non lontano dalla località detta « *I Pescetti* » (4), granato che non conosco affatto e che non mi venne fatto di scoprire nel trachitico di quella cara e simpatica isoletta.

Il Barelli ricorda i granati di Talana (5), che abbiamo già citati, e vi aggiunge quelli pei giacimenti analoghi della montagna di Capoterra (6), gli

(1) *Voyage en Sardaigne.* Troisième partie, pag. 12.

(2) Opera citata, pag. 465-6.

(3) Op. cit., pag. 471.

(4) Op. cit., pag. 479.

(5) V. Barelli, *Cenni di Statistica mineralogica degli Stati di S. M., il re di Sardegna, ovvero catalogo ragionato della raccolta formatasi presso l'azienda generale dell'interno.* Torino 1835, pag. 624.

(6) Op. cit., pag. 647.

altri della località Sos Frailes in quel di Arzana ([1]) e quelli in massa di Villanova Strisaili ([2]); oltre di che, senza precisare località, rammenta i granati in massa nelle montagne di Pula e nella val di Oridda ([3]).

D'un numero maggiore di località pei granati parla il Jervis, il quale ai banchi di granato, che accompagnano le masse di magnetite di Perdasterri ([4]), della località Perda Mengia, non lungi dalla regione Orcesi, alquanto più vicina al villaggio di Talana ([5]), già ricordati dal Lamarmora, aggiunge per giacimenti analoghi il granato di Capoterra ([6]), l'altro di Arzana in massa sul monte di Sos Frailes ([7]), già menzionato dal Barelli, nonchè un bel granato rosso vinato nel granito di Arbus ([8]) e ch'egli chiama *grossularia*, granato che certamente deve riferirsi ai superbi esemplari, che si trovano nelle granuliti sopra la miniera di Ingurtosu, ma che io non saprei affermare appartenere alla specie *grossularia*; aggiunge ancora il granato, sottospecie *grossularia* (sono parole dello stesso Jervis) in piccoli cristalli negli schisti nella regione Is Arenas di Domus novas ([9]), ch'io non conosco; quello entro roccie cristalline granatifere presso il mare verso il Capo di Monte Santo in quel di Dorgali ([10]), pure a me ignoto; l'altro in rombododecaedri rinchuisi in roccia amfibolica in vicinanza all'abitato di Villanova Strisaili ([11]), a me pure ancora incognito; l'altro compatto cristallino in vicinanza del filone argentifero a ganga di quarzo e di calcite nel permesso di S'Acqua Rubia nel comune di Villaputzu ([12]); e finalmente i granati del permesso Su Fraizzu a 10 chil. a N. O. del villaggio di Pula, risalendo il rio Mannu sulla destra del torrente, come nel permesso di Monte Santo ([13]), che prende nome dal monte in cui trovasi a circa 12 chil. da Pula.

Il Traverso ([14]) ricorda il granato di color giallo-miele amorfo od in cristalli rombododecaedri in una speciale roccia clastica, che finora fu chiamata quarzite; e Traverso junior più tardi fa menzione dello stesso giacimento, riportandolo dalla pubblicazione citata ([15]).

([1]) Op. cit., pag. 626.
([2]) Op. cit., pag. 627.
([3]) Op. cit., pag. 596.
([4]) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*. Par e 3ª, Le Isole 1881, pag. 38.
([5]) Op. cit., pag. 155.
([6]) Op. cit., pag. 36.
([7]) Op. cit., pag. 158.
([8]) Op. cit., pag. 106.
([9]) Op. cit., pag. 29.
([10]) Op. cit., pag. 154.
([11]) Op. cit., pag. 164.
([12]) Op. cit., pag. 180.
([13]) Op. cit., pag. 38.
([14]) G. B. Traverso, *Giacimento a minerali d'argento del Sarrabus*. Genova 188 , pag. 6 e 23.
([15]) S. Traverso, *Note sulla geologia e sui giacimenti argentiferi del Sarrabus (Sardegna)* Torino 1890, pag. 44.

Il De Castro rammenta lo stesso granato [1], togliendolo dal medesimo lavoro del Traverso e fa pure menzione di un altro granato colle parole [2]: *Altre volte, come presso i lavori di Su Girò* (Nicola Secci) *le felsiti dirette esattamente E-O, a contatto di scisti molto ferruginosi, si presentano di aspetto verdastro e molto granatifere,* ma anche questo granato io non conosco.

Dal complesso vediamo che il granato in Sardegna finora era conosciuto negli schisti della zona arcaica, fino a poco tempo fa riguardati come siluriani, in roccie che accompagnano filoni metalliferi, assieme alla magnetite in masse ed in banchi ed anche stando al Lamarmora in una roccia vulcanica terziaria. Quest'ultimo curioso presentarsi del granato è anche menzionato da non molto in un suo importante lavoro micrografico dal sig. ing. S. Bertolio, cui però non riuscì di trovare il granato in parola [3].

Completerò ora, per quanto oggi mi è possibile, le notizie sulla diffusione del granato in Sardegna, descrivendo particolarmente quello di Caprera.

Si sa che il granato, minerale interessante anche per la costituzione delle roccie, si trova in generale nella zona dei micaschisti, fra le roccie metamorfiche, nelle granuliti particolarmente e solo occasionalmente in roccie vulcaniche: ed in Sardegna lo si avrebbe in tutte queste forme litologiche, stando al Lamarmora per la così detta retinite dell'isola di S. Pietro.

Infatti nei micaschisti e negli schisti gneissici noi lo troviamo nella zona arcaica di Caprera e nella sua continuazione a Capo dell'Orso, a Golfo Aranci e giù per S. Teodoro a Posada, dove fu rinvenuto negli schisti anche dal Lamarmora, e giù per Siniscola, al cui scalo noi troviamo gli schisti tempestati di granati, a quella guisa che sono i micaschisti filladici dell'Istintino presso Capo Falcone e da me menzionati in altra Nota [4]. Del granato in roccie metamorfiche ricorderò quello del calcare saccaroide della vetta del pittoresco monte di Santa Maria di Gonari nel Nuorese: comparisce in masse cristalline, che talvolta lasciano vedere qualche faccia del rombododecaedro; lo si direbbe una *grossularia*, ma la mancanza di analisi non mi fa sicuro. Questa bella lente calcare contiene degli inclusi di granulite pur granatifera, granulite bellissima, talvolta bianca, ricca in frammenti di oligoclasio, come appare dalla sezione sottile: fu questa granulite che ha metamorfizzato il calcare.

(1) C. De Castro, *Descrizione geologico-mineraria della zona argentifera del Sarrabus.* Memorie descrittive della Carta Geologica d'Italia. R. Ufficio geologico. Roma 1890, pag. 18.

(2) Op. cit., pag. 28.

(3) S. Bertolio, *Studio micrografico di alcune roccie dell'isola di S. Pietro* (*Sardegna*). Estratto dal Bollettino del R. Comitato geologico. Anno 1894, nº 4; pag. 14.

(4) *La tormalina nella zona arcaica di Caprera.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. IV, 1º semestre, 1895.

A questa categoria ascriveremo il granato nelle così dette quarziti del Sarrabus. A questa stessa categoria od a quella che accompagna la magnetite, ascrivo del pari il granato in masse, che si trova non lungi dalla cima del Monte Santo di Pula, che forse può coincidere con quello di Monte Santo, citato dal Jervis: il granato quivi si presenta in masse, qua oscuro, quasi nero, là giallo verdognolo ed altrove quasi bianco, sempre in rombododecaedri. Per riguardo alla magnetite possiamo dire che quasi dovunque essa si trova accompagnata dal granato in massa, come mi piace qui ricordare quello che in vene si mette in mezzo alla magnetite nei pressi di Meana Sardo sulla strada che conduce a Laconi. Un simile granato in massa, accompagnato da amfibolo, trovasi pure presso la cantoniera Sa Rena per andare da Fonni a Correboi in schisti uroniani molto ferruginosi.

Riguardo al granato nelle granuliti, possiamo dire ch'esso si trova accidentalmente in massecole od in cristalli isolati od in gruppi di cristalli in tutte le granuliti di Sardegna, da quelle di Caprera e di Maddalena, passando per la massa del Limbara, a quelle di Lanusei e delle più meridionali di Capo Carbonara, non escluse certamente quelle della massa occidentale. Raramente però si presenta in grossi cristalli: il maggiore, derivante dalle falde del Limbara, fra Oschiri e Tempio, un trapezoedro }211{ ha il diametro di 14 mm. ed è rosso oscuro. I più belli che ho raccolto, son quelli delle granuliti a poca distanza da Dorgali per andare a Baonei, e fra Monti e Tempio sulla via percorsa dalle ferrovie secondarie. Da queste ultime deriva un cristallo splendidissimo, di color rosso vinato, tendente al giallo rosso ambrino, del diam. di 4,5 mm. in forma di trapezoedro modificato dal rombododecaedro }211{ }110{: questo cristallo più grosso si trova circondato da altri cristalli interi più piccoli, che presentano le stesse forme ed una quantità di pasta appartenente al altri granati fratturati. Quasi egualmente splendido, dello stesso colore, ma più piccolo, misurando il diametro di 3 mm., è il cristallo da me trovato nella granulite presso Dorgali. Le forme sono quelle del precedente, ma accanto a questo trapezoedro, modificato dal rombododecaedro s'annida altro cristallo molto più piccolo, presentante nettamente le faccie del rombododecaedro. Non crederei d'errare riferendo questi ultimi granati di Dorgali e del Limbara all'almandino, granato nobile, anche come quello che il più di frequente si trova nelle granuliti.

E qui ricorderò i granati che ho trovati nella interessantissima zona eruttiva, che sollevò gli schisti uroniani, sopportanti i siluriani a *Tuviois*: quivi rinvenni in una porfirite andesitica oscura, ricca in epidoto, contenuto in cavità ed anche in vene assieme a pirossene, un bel granato color miele carico in rombododecaedri e presentante interessanti anomalie ottiche.

Farò menzione anche del bellissimo granato, che alcuni anni fa fu trovato assieme alla galena nella miniera di Genna Caru sulla destra della strada da Iglesias a Flumini Maggiore. I campioni del museo, da me di-

retto, presentano generalmente il rombododecaedro combinato col trapezoedro }110{ }211{: quest'ultimo si osserva in un solo cristallo nettamente, ma sopra di esso compariscono le piccole faccie del rombododecaedro: in nessuno dei cristalli degli esemplari a mia disposizione ho potuto osservare isolatamente il rombododecaedro, come lo si trova nelle masse di granato, che accompagna la magnetite e negli schisti, nè isolatamente il trapezoedro, come avviene di incontrare nei granati delle granuliti. I granati disseminati dentro la galena, ora isolatamente ed ora a gruppi, sono di colore di miele, se piccoli; oscuri con fascie o macchie melate, se grossi, variando il loro diametro da 1 mm. a 12 mm.

Ma il granato più interessante e che forma lo scopo principale della presente Nota è quello di Caprera. Nella zona arcaica del fatidico scoglio, che abbraccia oltre una buona parte della penisola di Punta Rossa assieme all'isola della Pecora anche un lembo della parte orientale su Cala Portese, noi troviamo delle roccie ricchissime in granato, e son quelle che contengono la tormalina, di cui diedi cenno illustrativo in una Nota superiormente citata.

Andando verso oriente nella penisola di Punta Rossa, lambendo il mare, in una specie di conca rocciosa, levigata dai marosi, e che permette scendere alla spiaggia, dà all'occhio una roccia verde oscura, che va dalle porfiriti alle ortofiriti ed in dicco, che si divide in due, attraversa le granuliti ed i gneiss divenuti molto micacei, quasi micaschisti: quivi questi micaschisti gneissici sono attraversati da vene rosee, che contengono in grande quantità il granato, di cui più sotto riporto l'analisi quantitativa, eseguita dal mio assistente prof. Michelangelo Fasolo.

Il granato in minutissimi cristalli, che dal diametro di 0,25 mm. vanno a quello di 1 mm. poco più, sono semitrasparenti a translucidi, rosei, ametistini, talvolta melati per incipiente decomposizione e tal altra rosso vinato oscuro. Presentansi in trapezoedri, rarissimamente in rombododecaedri, ma non m'avvenne di trovare combinate le due forme: sono quasi sempre dentro il quarzo, pochissimi nel feldispato e più raramente ancora nella mica, che è sempre la muscovite. Questo granato è fragilissimo, ma più duro del quarzo, rigando il mortaino d'agata; è brillante, a lucentezza vitrea e frattura concoidale ineguale colla polvere bianco sporca. Nel tubo chiuso diviene oscuro; al cannello fonde facilmente in globulo quasi nero attirabile dalla calamita e ridotto in polvere finissima gelatinizza coll'acido cloridrico, mentre il granato non calcinato anche in polvere finissima non viene attaccato dagli acidi cloridrico e nitrico. In tubo chiuso il granato ridotto in polvere viene decomposto totalmente dall'acido solforico diluito nel rapporto di 3 : 1. L'acido fluoridrico discioglie rapidamente i piccoli cristalli senza bisogno di polverizzarli: la soluzione è completa senza residuo anche dopo eliminato l'acido fluoridrico con l'acido solforico, ciò che dimostra la mancanza del titanio, del bario e dello

stronzio: col borace si ha la perla ametistina. La polvere si è ottenuta nel mortaio d'agata abbastanza facilmente dopo aver frammentati i granati nel mortaio di Abich: però i granati non vennero polverizzati per la determinazione della silice, che si ottenne colla fusione del granato senza polverizzazione col carbonato sodico, e come si è veduto non vennero polverizzati i granati neppure per ottenere la soluzione fluoridrica.

Pel peso specifico dirò che, mancandomi qui gli apparecchi e i preparativi per calcolarlo più direttamente e magari su quantità minori di quelle adoperate da me, mi sono ridotto alla bilancia idrostatica. Con essa si son fatte diverse pesate e sempre su differenti quantità di granato. Il prof. di fisica di questa Università, sig. Guglielmo, su gr. 0,8270 ottenne 4,110 alla temperatura dell'acqua di 29° e 4,093 su gr. 0, 7915 alla temperatura dell'acqua di 27°. Una terza prova, fatta assieme a me dallo stesso professore sopra gr. 1,132 diede 4,072 colla temperatura dell'acqua di 16°, essendo quella dell'aria 15°. Il prof. Fasolo in una pesata da ultimo eseguita sopra gr. 1,1237, ottenne col picnometro colla bilancia Sartorius, a braccia corte, al decimo di milligrammo, 4,11009, la temperatura dell'acqua essendo di 13,7°. Io feci una sola pesata pure con la bilancia idrostatica al decimo di milligrammo sopra una quantità di gr. 1,1251, ed ottenni 4,121 essendo la temperatura dell'acqua 14,4° e quella dell'aria 15°. Questi valori, che di non molto differiscono fra loro, ci darebbero in media pel peso specifico del nostro granato

4,1016

valore che ben conviene ad un granato manganesifero come il nostro. Però conviene tener conto che la bilancia col corpo immerso nell'acqua oscilla un po' male e perde quindi di esattezza, non potendo garantire più del mezzo milligrammo.

Questo bel granato però oltrechè trovarsi nelle vene rosee sopracitate, si rinviene anche nella maggior parte dei micaschisti gneissici di quella zona: spesseggia nei chiari, nei quali spiccano l'abbondante quarzo vitreo, il feldspato bianco od azzurrognolo e la mica muscovite, talvolta in larghe lamelle sovrapposte; scarseggia e talvolta manca negli oscuri, ricchissimi in mica quasi nera: tutte queste varie forme litologiche che contengono anche la tormalina, appartengono certamente alla parte superiore dei gneiss (micaschisti), e come ho già detto altra volta, hanno subìto più o meno l'azione metamorfica della granulite.

Avendo potuto disporre per l'analisi quantitativa di due grammi e mezzo di sostanza, si poterono controllare i dati con due analisi successive. I dati percentuali, concordando nelle due analisi fino alla seconda decimale, danno alla composizione del granato un valore attendibilissimo.

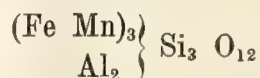
La composizione centesimale è la seguente:

	I.	II.
$Si O_2$	37,82	37,80
$Al_2 O_3$	18,06	18,03
$Fe_2 O_3$ }	29,26	3,20
$Fe\ O$ }		23,40
$Mn\ O$	17,02	17,04
$Ca\ O$	(0,48)?	0,48
$Mg\ O$	(0,34)?	0,34
	102,98	100,29
O.	2,60	
	100,38	

Dalla II. la composizione molecolare risulta: silice 126, allumina 35, ferro ferrico 4, ferro ferroso 65, manganese 48, calce 1,7 e magnesia 1,7. Il rapporto fra le basi monosside, le sesquiosside e la silice è:

$$116,4 : 39 : 126 = 2,99 : 1 : 3,23$$

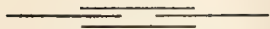
con una eccedenza di 9 molecole di $Si O_2$ sulle 117 occorrenti per la composizione del granato della formola:

$$\left.\begin{matrix}(Fe\ Mn)_3 \\ Al_2\end{matrix}\right\} Si_3\ O_{12}$$

nella quale una piccolissima porzione di Mn è sostituita da Ca e da Mg, e pure una piccola porzione di Al_2 è sostituita dal ferro ferrico. L'eccedenza della silice si può spiegare colla immensa difficoltà di liberare completamente dalle piccolissime porzioni di silice, che stanno aderenti ai circa 25000 granatini impiegati nell'analisi, avendo calcolato approssimativamente che occorrano 10,000 granati per un grammo. La silice venne determinata direttamente disaggregando il granato con carbonato sodico, agendo sopra mezzo grammo circa. Nella soluzione cloridrica venne determinato il ferro totale, l'alluminio, il calcio ed il magnesio coi soliti mezzi ed il maganese come solfuro. Da una seconda porzione di granato (circa grammi 1,5), disciolta con acido fluoridrico allo scopo di determinare i metalli alcalini, per differenza si determinò la silice dopo espulso l'acido fluoridrico con acido solforico; le operazioni chimiche eseguite per ricercare i metalli alcalini riuscirono negative anche impiegando lo spettroscopio. La soluzione precedente servì per controllare i dati percentuali ottenuti. Il ferro ferroso venne deter-

minato direttamente dalla soluzione solforica, ottenuta in tubo chiuso, dopo espulsa l'aria.

Sarebbe dunque una *spessastina* il granato di Caprera e la sua analisi concorda abbastanza bene con quelle riportate dal Dana [1] nel suo classico testo di Mineralogia per questa specie.

[1] J. D. Dana, *Descriptive Mineralogy*. New Jork, 1893; pag. 442 e 1035.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle osservazioni solari fatte al R. Osservatorio del Collegio Romano durante il 4° trimestre del 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

Ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati delle osservazioni fatte sulle macchie facole e protuberanze solari, durante l'ultimo trimestre del 1895. Nel mese di Dicembre l'atmosfera fu poco favorevole alle osservazioni, specialmente per quelle spettroscopiche, ma ciò nondimeno riteniamo i dati raccolti egualmente comparabili con quelli delle precedenti serie. Per le macchie e per le facole i risultati sono contenuti nel seguente specchietto:

1895

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Ottobre. . .	22	6,00	9,77	15,77	0,00	0,00	3,73	77,77	76,14
Novembre .	25	5,52	4, 84	10,36	0,04	0,00	3,24	41,16	66,80
Dicembre. .	16	8,31	8,25	16,56	0,00	0,00	5,81	72,88	67,81
Trimestre. .	63	6,40	7,43	13,83	0,02	0,00	4,06	62,00	70,32

Nel mese di Novembre ebbe dunque luogo un minimo secondario nel fenomeno delle macchie, e fecero comparsa i giorni col sole senza macchie e senza fori.

Nel complesso il fenomeno delle macchie ha continuato a diminuire, risultando la loro frequenza tanto rispetto al numero delle macchie che dei gruppi, inferiore a quella trovata per il trimestre precedente. Anche nelle facole si nota una leggiera diminuzione. Le osservazioni furono fatte da me in 45 giornate e in 18 dall'assistente sig. Palazzo.

1895

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media della massima altezza	Massima altezza osservata
Ottobre . .	20	4,45	36″,4	1°,7	45″,6	60″
Novembre .	21	5,10	36,1	1,8	46,7	73
Dicembre. .	13	5,38	38,0	2,0	53,8	105
Trimestre .	54	4,93	36,7	1,8	48,0	105

Paragonando questi dati con quelli della Nota precedente, si vede che il fenomeno delle protuberanze è andato diminuendo, risultando tutte le medie inferiori a quelle del 3° trimestre. Inoltre dobbiamo far notare la mancanza di corrispondenza fra il minimo secondario delle macchie e quello delle protuberanze. Le osservazioni furono fatte da me in 39 giorni e in 15 dal sig. Palazzo.

Per ciò che riguarda la distribuzione in latitudine dei fenomeni osservati, ho ottenuto i risultati seguenti per la frequenza relativa nelle diverse zone.

4° trimestre 1895.

Latitudine	Protuberanze		Facole		Macchie	
90° + 80°	0,000					
80 + 70	0,003					
70 + 60	0,000					
60 + 50	0,007					
50 + 40	0,071	0,485				
40 + 30	0,128		0,011			
30 + 20	0,117		0,098	0,516	0,031	
20 + 10	0,099		0,228		0,277	0,570
10 . 0	0,060		0,179		0,262	
0 — 10	0,057		0,141		0,092	
10 — 20	0,135		0,201		0,246	0,430
20 — 30	0,124		0,120	0,484	0,092	
30 — 40	0,089		0,022			
40 — 50	0,028	0,515				
50 — 60	0,011					
60 — 70	0,000					
70 — 80	0,014					
80 — 90	0,007					

Piccola è la differenza nella frequenza delle protuberanze nelle zone per ciascun emisfero. Come nel trimestre precedente, anche in questo le protuberanze si mostrarono sempre numerose dall'equatore a $\pm$ 50, qualche protuberanza fu notata in vicinanza del polo sud, mentre mancarono intorno al polo nord come nel trimestre precedente.

La frequenza delle facole è un poco diversa nei due emisferi solari, e la zona di grande frequenza è come nel 3° trimestre, estesa dall'equatore a $\pm$ 20, ed i limiti estremi si conservarono pressochè gli stessi.

Le macchie furono più frequenti nelle zone boreali e presentano un massimo di frequenza nelle zone ($\pm$ 10° $\pm$ 20°), ciò che si è verificato pure nei tre precedenti trimestri, e così su tutta l'annata si sono mantenuti i limiti estremi $\pm$ 30°. I massimi di frequenza delle macchie corrispondono coi massimi delle facole, le quali si estesero fra $\pm$ 40, mentre le protuberanze hanno una distribuzione ben diversa e figurano in quasi tutte le zone.

Non furono osservate eruzioni metalliche, nè fenomemi degni di nota al posto dei gruppi di macchie.

Fisica. — *Sui raggi scoperti dal prof. Röntgen.* Nota del Socio Pietro Blaserna.

Quando il prof. Röntgen mi fece conoscere i brillanti risultati da lui ottenuti e m'inviò, oltre alla sua breve ma succosa Nota, anche nove fotografie, presi tutte le misure per fare continuare le ricerche, dove l'autore le aveva lasciate. La scoperta dei raggi Röntgen ebbe in Europa un successo straordinario, specialmente nella parte che faceva intravedere grandi applicazioni alla medicina e alla chirurgia.

Lo scopo che mi proposi di raggiungere, era non solo quello di vedere, fino a qual punto di chiarezza si potesse giungere colle fotografie, ma ben anco di studiare le proprietà tanto interessanti di tali raggi. Ebbi l'ajuto efficacissimo degli assistenti dott. A. Sella e dott. N. Pierpaoli, e dei signori dott. Q. Majorana, dott. A. Fontana e dott. A. Umani, ai quali volle aggiungersi anche il dott. U. Dutto, assistente all'Istituto fisiologico.

Frutto di questi primi studî fu la piena conferma delle numerose esperienze del prof. Röntgen, tanto per la parte che riguarda le applicazioni fotografiche, quanto per quella che concerne gli effetti di fluorescenza. È col mezzo di quest'ultima, che si possono fare in maggiore numero esperienze e studî, mentre la fotografia serve a fissare i principali risultati.

Credo che non sarà discaro all'Accademia di conoscere alcuni particolari sul modo di procedere in simili indagini. I migliori tubi di Crookes, atti alla produzione dei raggi Röntgen, sembrano decisamente essere quelli registrati nei cataloghi col numero 9. Anche il prof. Röntgen ha costruito

tubi speciali, che fin qui ebbi occasione bensì di vedere, ma non di studiare. Quanto ai primi, sono palloncini di forma allungata, in cui i raggi catodici vanno a battere normalmente contro una bella parete di vetro, grande e liscia, la quale, resa fluorescente, diviene l'origine dei raggi Röntgen.

I tubi, per essere capaci di fornire questi raggi, devono contenere l'aria molto rarefatta, p. e. fino a $^1/_{1000}$ di millimetro. Se la pressione è maggiore, si hanno bensì i raggi catodici, ma non la formazione dei raggi Röntgen. I primi, secondo le belle ricerche di Lenard, sono vibrazioni dell'etere puro, che quindi consumano la loro energia, quando devono riscaldare e rendere incandescenti grandi quantità di aria (relativamente parlando) e non sono più atti a produrre i raggi Röntgen. All'incontro, quando la rarefazione dell'aria è portata ad un alto grado di perfezione, purchè la scarica ancora passi, i raggi catodici producono una forte fluorescenza del vetro, là dove lo incontrano normalmente, e provocano con ciò la formazione dei raggi Röntgen. Questi sarebbero quindi una trasformazione dei raggi catodici col mezzo della fluorescenza del vetro od anche di altre sostanze, come p. e. di alluminio.

Tuttavia non è possibile dire a priori, se un tubo Crookes sia atto oppur no, a dare il fenomeno Röntgen. Ma spesso ho trovato, che un tubo men che mediocre diviene buono ed anche eccellente, quando lo si sottoponga all'azione continuata per parecchie ore del rocchetto di Ruhmkorff. Il migliore degli apparecchi Crookes da me posseduto era precisamente uno, che in sul principio non dava pressochè niente, e che dopo un lungo trattamento col rocchetto d'induzione, produceva fenomeni di fluorescenza ed effetti di fotografia in misura veramente straordinaria. Bisogna probabilmente cercarne la causa in un leggiero disgregamento del vetro, prodottosi nel punto battuto dai raggi catodici, disgregamento impercettibile ma necessario alla formazione dei raggi Röntgen.

Checchè ne sia di ciò, è certo che molti tubi migliorano quando sono adoperati. Come apparecchio d'induzione serviva un rocchetto di Ruhmkorff di media grandezza, che dà scintille, nell'aria ordinaria, di 10 centimetri di lunghezza. L'aver prima adoperato un rocchetto molto più potente, è costato la vita a parecchi dei miei migliori tubi. Non è quindi prudente il voler forzare gli effetti: per la fotografia vi si rimedia con un prolungamento di posa; per la fluorescenza talvolta si deve ricorrere ai forti effetti, ma lo si fa sempre col pericolo di rimanere a mezza strada.

Queste sono le prime osservazioni e impressioni, che risultano dalle molte, svariate e prolungate esperienze eseguite nell'Istituto fisico, che ho l'onore di dirigere. Presento intanto all'Accademia nove fotografie originali del prof. Röntgen, che servono a illustrare i fatti più importanti da lui scoperti. Aggiungo ad esse alcune delle fotografie eseguite all'Istituto fisico. Esse servono a dimostrare il grado di precisione e di nitidezza, che si può fin d'ora raggiungere in simili lavori.

Fisica. — *Su alcune esperienze fotografiche eseguite all'Istituto di studî superiori in Firenze, per mezzo dei tubi di Crookes.* Nota del Corrispondente A. Ròiti.

Ho l'onore di presentare all'Accademia la riproduzione di una negativa ottenuta nella mia lezione di sabato 25 gennaio, facendo posare una mano (con anello d'oro e brillante) sopra una cassetta di legno contenente una lastra del Lumière, ed illuminandola con un tubo di Crookes attivato dal rocchetto di Ruhmkorff. Nella medesima lezione ho ottenuto una fotografia simile, adoperando la macchina di Holtz invece del rocchetto.

Subito dopo la lezione ho ottenuto, attraverso al legno, la fotografia di ben venticinque oggetti. Ne unisco la riproduzione colla leggenda esplicativa, avvertendo che questa riproduzione, contrariamente alla prima, è una positiva, così che il tono più chiaro rappresenta qui maggiore trasparenza per l'azione tanto maravigliosamente illustrata dal Röntgen.

Secondo le mie osservazioni ha grandissima influenza sull'intensità di tale azione, la qualità e la grossezza del vetro ond'è composto il tubo di Crookes: in maniera che la maggiore o minore rapidità dell'effetto è da ascriversi, in questi primi tempi, più che altro a fortuna. Ho in corso delle esperienze per ricercare le sostanze che meglio si prestano all'uscita dei raggi catodici dal recipiente vuotato, ma purtroppo sono inceppato, perchè non vi è qui a Firenze un buon soffiatore di vetro.

Grande influenza è pure esercitata dalla qualità della lastra o meglio dello strato impressionabile.

Ho fatto poi un'osservazione che ritengo nuova: e cioè che quando un catodo è così vicino al fondo del tubo da toccarlo quasi, esso non manifesta azione di sorta, o, se la esercita, è incomparabilmente più debole di quando si trova, come al solito, discosto dal fondo.

Ho incominciato ad applicare l'azione di Röntgen alla petrografia.

Mando anche la positiva di una manina di bambino morto a due mesi, dalla quale si vede che le falangi non sono ancora interamente ossificate.

Chimica. — *Nuovi studî sul comportamento del fenol come solvente in crioscopia.* Nota del Socio E. Paternò.

Ho accennato nelle Note precedenti le ragioni per le quali ho creduto utile lo studio del comportamento delle sostanze di diversa funzione chimica nel maggior numero di solventi. Le conoscenze che ora abbiamo intorno all'impiego, come solventi, degl'idrocarburi, e dei loro prodotti di sostituzione alogenati ed anche nitrati, sono sufficienti per formarsi un concetto abbastanza preciso dell'andamento del fenomeno. Ma non è lo stesso per altri solventi ossigenati o azotati (fenoli, acidi, amine, alcooli), per i quali mancano quasi interamente i dati per concentrazioni molto elevate, e si osservano delle notevoli lacune per intere funzioni. Così, ad esempio, nei fenoli non è stato studiato il comportamento di nessun alcool. Ho creduto quindi necessario, allo scopo da me prefissomi, di completare l' esame del comportamento delle sostanze di differente funzione anche in taluni dei solventi già sommariamente studiati da altri, e di estenderlo a solventi della più diversa costituzione chimica.

In questa Nota mi occuperò del fenol. Sul fenol, come solvente, esiste uno studio di Eykmann abbastanza completo per il tempo in cui fu fatto [1]. In seguito il fenol è stato adoperato da qualche chimico per la determinazione del peso molecolare di talune sostanze. Così Zecchinine fece uso per tentare di risolvere la quistione del peso molecolare della metaldeide [2], Garelli esaminò il comportamento del pirrolo [3] e Garelli e Montanari [4] studiarono il comportamento nel fenol della pirocatechina, della resorcina e dell'idrochinone, ricercandovi un argomento in conferma della loro regola che *ogni corpo ciclico che differisca dal solvente per un solo ossidrile deve, disciolto in esso, fornire abbassamenti termometrici più piccoli dei teorici.* Però in tutte queste esperienze non si perviene a concentrazioni molto forti; nei 18 corpi presi in esame dall'Eykmann, per 13 la concentrazione è inferiore all'8 %, e solo per 6 supera il 10 %, con una depressione termometrica che solo in sei casi sorpassa i 5°: le determinazioni con la metaldeide ed il pirrolo sono per soluzioni diluitissime, e quelle con le diossibenzine arrivano sino all'8-9 %. Da queste esperienze risulta che in generale tutte le sostanze studiate (acidi, fenoli, ammine) hanno un comportamento normale o prossimo al normale, e che poco muta col variare della concentrazione: è poi notevole il fatto che tutte le sostanze studiate forniscono una depressione molecolare che aumenta col crescere della concentrazione, eccettuati gli acidi (Eykmann) ed i fenoli (Garelli e Montanari).

(1) Zeitschrift für Phys. Chemie, IX, 501, 1889.
(2) Gazz. Chim. XXII, 2°, p. 590.
(3) Id. XXIII, 2°, p. 364.
(4) Id. XXIV, 2°, p. 236.

Ecco ora i risultati delle mie esperienze:

1. *Acqua.*

Punto di congelamento del fenol 40°,18.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
1	0,727	2,68	3,68	66,24
2	2,351	8,38	3,56	64,08
3	3,220	10,94	3,39	61,02
4	4,109	13,04	3,17	57,12
5	5,241	16,67	3,18	57,25
6	6,289	19,02	3,02	54,43
7	7,326	21,17	2,89	52,01
8	9,402	25,10	2,67	48,05
9	11,236	27,90	2,48	44,69
10	12,346	29,29	2,37	42,70
11	13,885	30,95	2,30	40,12
12	15,957	32,77	2,05	36,96
13	18,707	34,67	1,85	33,36
14	22,685	36,46	1,61	28,93
15	27,728	37,92	1,37	24,61

2. *Bromoformio.*

Punto di congelamento del fenol 39°,99.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
16	0,8208	0,20	0,243	61,48
17	2,5002	0,65	0,259	65,53
18	5,9328	1,57	0,264	66,79
19	11,9154	3,08	0,258	65,27
20	19,7419	5,03	0,254	64,26
21	32,5433	7,90	0,243	61,48

3. *Toluene.*

Punto di congelamento del fenol 39°,92.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
22	0,4782	0,36	0,752	69,18
23	1,3645	0,97	0,711	65,41
24	3,8735	2,68	0,691	63,57
25	7,6579	5,09	0,664	61,09
26	11,6716	7,44	0,637	58,60
27	15,8879	9,62	0,605	55,66
28	23,6335	13,32	0,559	52,42

4. *Paraxilene.*

Punto di congelamento del fenol 39°,20.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
29	0,6408	0,45	0,702	76,21
30	2,4435	1,57	0,642	68,05
31	4,6930	2,95	0,628	66,57
32	7,9796	4,76	0,594	62,96
33	11,4650	6,57	0,574	60,84
34	19,8724	10,42	0,524	55,54
35	24,5828	12,57	0,511	54,16

5. *Nitrobenzina.*

Punto di congelamento del fenol 40°,00.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
36	0,9364	0,55	0,587	72,20
37	2,2357	1,26	0,534	65,68
38	4,7856	2,62	0,547	67,28
39	8,9027	4,84	0,543	66,79
40	14,3148	7,58	0,529	65,07
41	18,6162	9,79	0,526	64,70
42	31,1052	15,65	0,503	61,87

6. *Bromotoluene.*

Punto di congelamento del fenol 40°,06.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
43	1,999	0,72	0,360	61,56
44	6,164	2,38	0,386	68,01
45	9,767	3,70	0,378	64,64
46	17,262	6,00	0,347	59,34
47	24,476	7,58	0,309	52,84
48	27,679	9,18	0,331	56,60
49	38,852	11,29	0,290	49,59
50	53,605	12,62	0,235	40,18

7. *Veratrol.*

Punto di congelamento del fenol 39°,66.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
51	1,886	0,62	0,447	61,68
52	6,439	3,39	0,526	72,59
53	10,371	5,66	0,546	75,35
54	14,189	8,12	0,572	78,94
55	17,112	9,92	0,580	80,04
56	22,637	13,63	0,602	83,08
57	27,827	17,29	0,621	85,70
58	33,109	22,99	0,694	95,77
59	37,571	25,49	0,678	93,56
60	42,981	28,89	0,672	92,74

8. *Ossalato di etile.*

Punto di congelamento del fenol 40°,31.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
61	0,4942	0,24	0,485	70,81
62	1,3493	0,67	0,496	72,41
63	2,9097	1,51	0,518	75,60
64	4,9103	2,56	0,523	76,36
65	6,9939	3,74	0,534	77,96
66	10,1129	5,65	0,558	81,47
67	13,3609	7,94	0,594	86,72
68	17,4097	10,64	0,611	89,21

9. *Alcool.*

Punto di congelamento del fenol 39°,74.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
69	0,346	0,52	1,502	69,09
70	0,943	1,44	1,527	74,24
71	2,076	3,26	1,570	72,22
72	2,881	4,54	1,575	72,45
73	4,191	6,86	1,636	75,26
74	10,496	17,50	1,572	72,31
75	7,750	12,11	0,561	71,80
76	9,207	14,43	1,567	72,08
77	12,554	20,25	1,613	74,19
78	17,046	27,05	1,587	73,00

10. *Alcool benzoico.*

Punto di congelamento del fenol 40°,29.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
79	0,9098	0,59	0,648	69,98
80	2,3851	1,52	0,637	68,79
81	4,0868	2,61	0,638	68,92
82	6,5152	4,22	0,647	69,87
83	10,4520	6,77	0,647	69,87
84	20,1853	13,28	0‘657	70,95

11. *Etere bietilico della gliceriua.*

Punto di congelamento del fenol 39°,72.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
85	0,218	0,16	0,734	108,63
86	0,612	0,39	0,637	94,28
87	1,225	0,73	0,595	88,06
88	1,938	1,14	0,588	87,02
89	2,958	1,77	0,598	88.50
90	4,324	2,63	0,608	89,98
91	5,448	3,34	0,613	90,72
92	7,314	4,82	0,659	97,53
93	11,175	8,12	0,726	107,45
94	12,440	8,92	0,709	104,93
95	16,654	12,39	0,741	109,67

12. *Timol.*

Punto di congelamento del fenol 39°,53.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
96	0,801	0,46	0,574	86,10
97	1,447	0,76	0,525	78,75
98	2,320	1,23	0,530	79,50
99	3,408	1,75	0,513	76,95
100	4,951	2,41	0,486	72,90
101	7.173	3,33	0,464	69,60
102	9,662	4,46	0,462	69,30
103	12,372	5,67	0,458	68,70
104	15,060	6,71	9,446	66,91
105	18,313	7,95	0,434	65,10
106	21,666	9,29	0,428	62,20
107	26,135	10,74	0,419	62,99
108	28,748	11,83	0,415	62,25
109	32,836	13,58	0,413	62,10

13. *Salicilato metilico.*

Punto di congelamento del fenol 40°,11.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
110	0,5265	0,26	0,493	74,94
111	3,4394	1,54	0,447	67,94
112	5,7162	2,51	0,439	66,73
113	8,8784	3,92	0,441	67,03
114	12,4964	5,50	0,440	66,88
115	17,8793	7,72	0,432	65,66
116	23,2442	9,84	0,423	64,30
117	30,1990	12,54	0,413	63,08

14. *Acido formico.*

Punto di congelamento del fenol 40°,21.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
118	0,5036	0,73	1,449	66,65
119	1,1728	1,66	1,415	65,09
120	2,0820	2,91	1,393	64,08
121	6,5575	8,32	1,238	56,95
122	8,8549	10,61	1,198	55,11
123	12,2465	13,80	1,126	51,79
124	16,1847	17,31	1,069	49,17

15. *Acido acetico.*

Punto di congelamento del timol 39°,73.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
125	0,874	0,89	1.018	61,08
126	2,005	2,07	1,032	61,92
127	3,227	3,39	1,050	63,00
128	4,433	4,51	1,017	61,02
129	5,826	5,61	0,963	57,78
130	8,202	7,57	0,923	55,38
131	10,907	10,49	0,961	57,66
132	13,090	12,08	0,922	55,32
133	16,491	15,02	0,911	54,66
134	22,297	19,22	0,862	51,72
135	33,363	27,92	0,836	50,16
136	35,480	29,18	0,822	49,32
137	43,538	33,93	0,779	46,74
138	51,771	38,92	0,753	45,10

16. *Acido valerianico.*

Punto di congelamento del fenol 40°,09.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
139	0,4129	0,30	0,726	74,05
140	0,9397	0,67	0,712	72,62
141	2,3732	1,59	0,669	68,24
142	4,0251	2,62	0,651	66,40
143	6,3505	3,98	0,625	63,75
144	8,9841	5,44	0,605	61,71
145	12,7908	7,43	0,579	59,06
146	16,0963	9,12	0,567	57,83
147	18,0864	10,41	0,575	58,65

17. *Piridina.*

Punto di congelamento del fenol 40°,35.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
148	0,6791	0,60	0,883	69,66
149	1,6390	1,43	0,872	68,89
150	2,8450	2,60	0,913	72,13
151	4,5587	4,36	0,956	75,52
152	6,9073	7,12	1,031	81,45
153	8,6394	9,68	1,120	88,48
154	10,6959	11,94	1,116	88,16

18. *Anilina.*

Punto di congelamento del fenol 40°,39.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
155	0,5211	0,39	0,748	69,56
156	1,7871	1,35	0,757	70,40
157	4,6336	3,57	0,770	71,61
158	7,1845	5,60	0,779	72,45
159	10,0385	8,20	0,816	75,89
160	12,1587	9,96	0,819	76,17
161	17,0943	14,22	0,831	77,29

19. *Dimetilanilina.*

Punto di congelamento del fenol 40°,21.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
162	0,5965	0,34	0,569	68,85
163	1,3188	0,87	0,659	79,74
164	2,3693	1,46	0,616	74,34
165	4,3174	2,60	0,602	73,84
166	7,6365	4,63	0,619	74,90
167	10,4270	6,36	0,609	73,69
168	15,4828	9,89	0,632	76,47

20. *Etilsuccinimide.*

Punto di congelamento del fenol 39°,70.

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare
169	1,313	0,74	0,563	71,50
170	4,512	2,72	0,602	76,45
171	9,619	6,82	0,709	90,04
172	12,755	10,26	0,804	102,11
173	18,262	15,32	0,842	106,93
174	21,065	18,92	0,898	114,05
175	28,060	27,95	0,996	126,49
176	32,764	35,41	1,080	137,16

Riservandomi a discutere in altra occasione e comparativamente ad altri solventi i risultati ottenuti, sembrami che per ora possa dedursi:

1°. Per quanto riguarda gli idrocarburi ed i loro derivati alogenici e nitrogenati, mentre che dalle esperienze di Eykmann col tetracloruro di carbonio, il difenilmetano e la naftalina, sembrava che la depressione molecolare tendesse a crescere con la concentrazione, le mie esperienze col bromoformio, la nitrobenzina, il toluene, il parabromotoluene e il paraxilene mostrano nettamente ch'essa invece diminuisce col crescere della concentrazione.

2°. Gli alcooli nel fenol hanno un comportamento assai regolare, e la depressione molecolare presenta una costanza rimarchevolissima col variare della concentrazione. Per l'alcool etilico l'abbassamento molecolare che è 74,24 per una concentrazione di meno che l' 1 $^0/_0$, è di 73 per una concentrazione superiore al 17 $^0/_0$; per l' alcool benzoico è 69,98 per la concentrazione dell' 1 $^0/_0$ (0,9098) e 70,95 per una concentrazione di più del 20 $^0/_0$; nè per lo stesso etere bietilico della glicerina, che è un alcool secondario, la variazione è molto notevole.

3°. Per i fenoli, le esperienze di Eykmann (timol, p. cresol, α naftol, bromofenol) si deduce una rimarchevole costanza, con tendenza ad aumentare con la concentrazione. Le esperienze mie sul timol e sul salicilato metilico mostrano invece che l'abbassamento molecolare va gradatamente decrescendo con l'aumentare della concentrazione. La stessa cosa avviene, secondo le esperienze di Garelli e Montanari, con le biossibenzine.

4°. In quanto agli acidi dalle esperienze di Eykmann (acido benzoico, cinnamico, fenilpropionico) si deduce un andamento costante, tranne che per l'acido benzoico, pel quale oltre ad aversi un abbassamento molecolare minore in valore assoluto della maggior parte delle altre sostanze, si nota una notevole decrescenza coll'aumentare della concentrazione. Cogli acidi formico, acetico e valerianico da me esaminati si ha lo stesso andamento; e da questo punto di vista può dirsi che nel fenol come solvente, quelli che dànno il comportamento più lontano dal normale sono propriamente gli acidi.

5°. Gli alcaloidi (metilanilina, naftilammina, p. toluina) diedero ad Eykmann per la depressione molecolare valori che aumentano notevolmente con la concentrazione. Le esperienze da me fatte con la piridina, la anilina, la dimetilanilina, quantunque io mi sia spinto a concentrazioni più forti di quelle dell'Eykmann, non mostrano questo comportamento così spiccato. È degno di nota il fatto che per l'acetoanilide (per analoghe variazioni di concentrazione) la depressione molecolare è maggiore di alcune unità che non sia per la metilanilina, la toluidina, la naftilammina. Un fatto analogo si osserva con l'etilsuccinimide per la quale l'aumento è rilevantissimo.

6°. Dalle esperienze di Eykmann risulta che talune sostanze che non rientrano nelle funzioni chimiche sopraenumerate, quali la canfora, il benzofenone, dànno una depressione molto più elevata della media e che cresce

notevolmente con la concentrazione. Lo stesso ho osservato col veratrol e con l'ossalato di etile.

7°. Finalmente è degno di nota il comportamento dell'acqua, la quale dà una depressione molecolare senza dubbio inferiore alla normale e che rapidamente decresce con l'aumentare della concentrazione. Il comportamento dell'acqua è perfettamente analogo a quello degli acidi.

Merita poi tutta l'attenzione il fatto dell'aumento della depressione molecolare, col crescere della concentrazione. Comunemente cogli altri solventi si ha un comportamento inverso, che si spiega nel maggior numero dei casi ammettendo che in molte sostanze le molecole siano riunite in complessi, che si disgregano in soluzioni diluite, mentre in soluzioni concentrate rimangono in tutto o in parte polimerizzate. Ammettere che vi siano dei casi, in cui avvenga il contrario, è tutt'altro che razionale. Si può spiegare il fatto supponendo che si formino dei complessi molecolari tra il fenol e la sostanza disciolta, i quali funzionando come una sola molecola, avrebbero il solo effetto di diminuire la quantità del solvente, ed in proporzione tanto maggiore quanto più si aggiunge di sostanza. Oppure si può in generale supporre che vi siano sostanze che mischiate influiscano l'una sull'altra, facendo mutare il rapporto relativo della complessità delle loro molecole.

Paleontologia. — *Di una caverna ossifera presso Pegazzano nei dintorni di Spezia.* Nota del Socio G. Capellini.

Dopo le mie prime fortunate ricerche nella Caverna ossifera di Cassana nel 1858 [1], persuaso che scoperte importanti restavano ancora da farsi nelle numerose caverne dei dintorni del Golfo di Spezia, visitai ripetutamente quelle della Palmaria, di Coregna, di Fabbiano, del Vallone di Biassa, di Monte Parodi nel lato occidentale, e mi interessai anche di altre da antica data segnalate nel lato orientale.

Nella descrizione geologica dei dintorni del Golfo di Spezia nel 1864 [2] resi conto di quelle mie esplorazioni sotterranee, e nel 1869 annunziai che la Grotta dei Colombi nell'Isola Palmaria era stata abitata dall'uomo preistorico nell'epoca Maddaleniana [3]. Da allora in poi, mi adoperai di interessare quanti

[1] Capellini G., *Nuove ricerche paleontologiche nella Caverna ossifera di Cassana. Lettera al prof. M. Lessona.* Genova 1859, V. Liguria medica, n. 5 e 6.

[2] Capellini G., *Descrizione geologica dei dintorni del Golfo della Spezia e Val di Magra inferiore.* Bologna 1864.

[3] Capellini G., *L'Antropofagismo in Italia all'epoca della pietra. Lettera sulle scoperte peleoetnologiche fatta nell'isola Palmaria.* Bologna 1869. Capellini, *Grotta dei Colombi à l'île Palmaria, Golfe de la Spezia; Station de Cannibales à l'epoque de la Madeleine.* Compte Rendu du V^{e} Congrès int. d'Anthrop. préhist. en 1871. Bologna 1873.

si occupavano di escavazioni nelle montagne della Spezia, perchè volessero avvisarmi qualora si fosse scoperto qualche cosa che potesse interessare per la storia geologica del mio golfo.

E difatti nel 1878 fui avvertito che i lavori per la nuova Batteria di Santa Teresa presso Pertusola avevano messo allo scoperto una interessante breccia ossifera, e dal gentilissimo generale Parodi, allora direttore del Genio a Spezia, ebbi preziose indicazioni su quanto già era stato raccolto o disperso, e ad esso sono pure debitore del disegno di un piccolo pozzo che conteneva la detta breccia ossifera, e che ora trovasi sepolto sotto la ricordata batteria.

Degli avanzi, specialmente di Ippopotamo, provenienti da quella breccia ossifera, resi conto all'Accademia di Bologna con una Memoria pubblicata nel 1879 (¹), e nello scorso anno, trattando del *Rubble-Drift* e delle Brecce ossifere della Palmaria e dei dintorni della Spezia, fui lieto di annunziare che, nel gennaio del 1894, il giovane De Champs mi aveva favorito alcuni esemplari di breccia ossifera da lui scoperti in una delle Caverne del Monte Santa Croce, e precisamente nelle cave Cozzani nel vallone di Biassa.

La nuova scoperta non mi lasciava più dubitare che, presto o tardi, le importanti escavazioni che si praticano in quel vallone per avere dalla dolomia e dal calcare nero fossilifero del Retico, eccellenti materiali per calce e per costruzioni d'ogni sorta, avrebbero pure messo allo scoperto qualche nuova importante Caverna ossifera.

Il prof. Alberti, da altra parte, avendo sempre raccomandato ai suoi scolari di campagna di tenerlo informato, qualora sentissero parlare di nuove caverne scoperte o esplorate, la mattina del 24 gennaio scorso, entrando in classe (egli è professore di storia naturale nel Liceo di Spezia), fu piacevolmente sorpreso di trovare sulla cattedra (depostevi dai suoi alunni di Pegazzano) *alcune grosse ossa di mammifero*, e due denti che sospettò poter essere di Orso speleo.

Il gentilissimo professore essendosi affrettato ad avvisarmi telegraficamente della importante scoperta, disposi subito per la mia partenza, e poichè il telegramma spiegava trattarsi di un *crepaccio enorme scoperto con una mina e ricco di ossa in terreno vergine*, temendo che potessero avvenire dispersioni di fossili e che la Caverna avesse ad essere guasta prima che io fossi arrivato per studiarla, risposi subito con altro telegramma, raccomandando di trattare coll'affittuario della cava, di nulla guastare, di impedire l'accesso a tutti, di rivolgersi all'uopo a nome mio al signor Sindaco di Spezia e al Sotto-Prefetto perchè, nell'interesse della scienza e della città, occorrendo intervenissero per ottenere quanto io desiderava.

Ed ora dirò brevemente della nuova caverna e dei fossili che già vi sono

(¹) Capellini G., *Breccia ossifera della Caverna di Santa Teresa nel lato orientale del Golfo di Spezia.* Mem. della R. Accad. delle Scienze dell'Ist. di Bologna, ser. 3ª, t. X. Bologna 1879.

stati raccolti, in parte per cura dello stesso prof. Alberti che mi ebbi compagno nella prima esplorazione e al quale rendo pubbliche vivissime grazie per avermi premurosamente avvisato.

La Caverna si trova nel lato meridionale di Monte Parodi, a breve distanza dal paese di Pegazzano, in prossimità del secondo pozzo della galleria della strada ferrata. Al punto in cui la strada militare, che da Spezia percorre la riva destra del torrente e attraversa il ponte, si ricongiunge alla vecchia strada di Biassa, nei calcari neri fossiliferi compatti che intercalati con calcare schistoso e schisti argillosi costituiscono quel gruppo fossilifero che altra volta indicai col nome di Serie del Tino e spetta all' Infralias o Retico superiore (Piano dell'Azzarola in Lombardia), vi ha una stupenda cava di pietre da costruzione di proprietà della vedova Romilda Cerretti, ed ora affittata a Lamberti Stefano di S. Marcello pistoiese.

Quasi di faccia a quella cava, nel lato destro del torrente, sul fianco settentrionale del Monte Santa Croce, vi hanno poi le importantissime cave del signor Cozzani aperte nella dolomia superiore retica con la quale si prepara la rinomata calce di Biassa.

In esse cave, come ho sopra accennato, fino dal 1894 fu scoperta la prima caverna con breccia ossifera, ed ora mi sono convinto che molto possiamo riprometterci quando anche questa venga resa accessibile e sia convenientemente esplorata.

Nel mio primo lavoro sull'Infralias nei dintorni di Spezia nel 1862 dimostrai che la catena occidentale del Golfo aveva descritto una specie di elicoide e che, per la subìta torsione, era avvenuto un importante rovesciamento di tutta la serie nella parte meridionale della catena stessa; a partire dal Monte Parodi ove si può meglio che altrove verificare la avvenuta torsione, poichè la sua parte nordica si trova ancora in serie normale ma fortemente raddrizzata, mentre nel lato meridionale si osserva il già avvenuto rovesciamento accompagnato, come è naturale, da una quantità di fratture delle quali ormai fanno rendersi conto i geologi, dopo gli studî e gli esperimenti del Daubrée e di altri che, in questi ultimi anni, si sono tanto occupati di geotettonica [1].

Tutti i torrenti che dalla catena occidentale recano contributo delle loro acque fangose al golfo, ripetono la loro origine dalle fratture secondarie, le quali si originarono per il movimento di torsione che diede luogo al parziale rovesciamento del Retico sopra il Lias, il Giurassico, il Cretacico e l'Eocene, come fu da me altra volta dimostrato; e quelle fratture si complicano con altre di ordine diverso, per modo che sarebbe opera non agevole il render conto

[1] Capellini G., *Studî stratigrafici e paleontologici sull'Infralias nelle montagne del Golfo della Spezia*, Mem. dell'Accad. delle Scienze dell' Ist. di Bologna, serie II, tomo I, Bologna 1862.

di tutte con la voluta esattezza, dovendoci contentare di studiare e far conoscere quelle che, di mano in mano, presentano un qualche particolare interesse.

Sul lato sinistro del torrente, poco prima di arrivare al secondo pozzo segnato col numero I, si vede una frattura degli strati, la quale interessa una piega sinclinale approssimativamente allineata secondo la direzione della catena montuosa; è in corrispondenza di questa frattura che, nell'interno della montagna, si trova aperta la Caverna ossifera, come ora verrò a dimostrare.

Fratture maggiori parallele a questa, e apparentemente più importanti, hanno dato origine alle vallette trasversali e ai piccoli rii che le solcano, a cominciare sotto Cà Matellina e terminando col canale di Sant'Anna, ma di esse per ora non mi interesserò.

Il piazzale della Cava, indicata col nome *Cava del Termo*, è presso a poco a livello del ponte che congiunge le due strade vecchia e nuova, a metri 127 sul livello del mare; attualmente l'ingresso della Caverna guarda a sud-sud-ovest, e si trova a circa 25 metri sul livello del piazzale della cava stessa, ossia a 150 metri sul livello del mare.

Trattandosi di una frattura in una piega sinclinale, per chi sa di geotettonica è facile di capire che, anche quando tali fratture non sono accompagnate da faglie, si ha divaricazione degli strati fratturati in basso, avvenendo il contrario quando si tratta di fratture in una piega anticlinale.

Innumerevoli e complicatissime sono le pieghe che si originarono pel movimento di torsione, che rovesciò una parte della serie stratigrafica della catena occidentale dei monti della Spezia; ove le rocce piegate erano ancora abbastanza plastiche o flessibili si ebbero pieghe sentitissime senza frattura; in caso contrario si ebbero fratture, stiramenti, laminazioni e assottigliamenti di strati fino a sparirne alcuni, per modo da avere contatti con *hiatus* cronologici, e faglie complicatissime.

Di tutto ciò si ha una splendida esposizione sul lato del seno di Porto Venere che comincia con la punta della Castagna e, passando per l'Oliva e Agonera, termina alla punta di s. Pietro con la celebre Grotta Arpaia da pochi anni battezzata col nome di *Grotta di Byron.* Nel lato meridionale dell'Isola Palmaria, in questi ultimi anni, i lavori delle cave hanno messo in evidenza le classiche pieghe delle quali aveva reso conto fino dal 1864, accompagnandone la descrizione con un disegno per me eseguito dal vice Ammiraglio Guglielmo Acton; dette pieghe ho potuto in seguito fare fotografare, come pure quelle per le quali ha avuto origine la Grotta Arpaia.

Penetrando nella caverna si scende per circa 24 metri, con forte inclinazione ma abbastanza comodamente in seguito ai piccoli adattamenti che già vi sono stati fatti dal bravo Lamberti.

Al primo pianerottolo che ho intitolato *della Statua*, perchè vi ha una massa stalagmitica la quale ricorda una donna seduta a un capo scala, ho verificato un dislivello di circa 20 metri dall'ingresso; ho misurato la base

della sezione triangolare della galleria e l'ho trovata di 5 a 6 metri, mentre l'altezza di quel triangolo isoscele il cui vertice è tagliato dalla frattura che, lungo la volta, segue l'asse della galleria si può ritenere approssimativamente eguale a 7 od 8 metri.

A sinistra, scendendo dal pianerottolo della statua, ho notato le prime tracce di breccia ossifera che ho creduto opportuno di lasciare al suo posto; quindi proseguendo per un certo tratto della galleria tutto ornato di cortine stalattitiche, percorsi circa 12 metri, si arriva alla *sala della colonna* o *dell'Organo*, essendo stata così battezzata perchè alla base di una elegantissima colonna costituita dall'incontro delle stalattiti con le stalagmiti, si ha una bella serie di piccole stalattiti le quali toccate convenientemente rispondono con note e suoni diversi, d'onde il nome di *Organo*.

Dalla volta stupenda per il rivestimento alabastrino pendono stalattiti perfino di 3 metri di lunghezza; percorso breve tratto si passa in altra sala che ho denominata la *Sala del Monumento*.

Questa sala, pure elegantissima per le stupende incrostazioni delle quali è rivestita, presenta nel mezzo un bel gruppo di stalattiti e stalagmiti, combinate in modo da giustificare il nome che le fu imposto. Meglio di ogni descrizione, la fotografia verrà in aiuto per fare apprezzare queste meraviglie sotterranee dei dintorni dell'incantevole Golfo di Spezia, e al mio figlio Carlo, che insieme al fotografo Robatel mi accompagnò in una delle visite alla Grotta, devo i primi saggi i quali, sebbene per difetto di convenienti apparecchi onde avere la completa illuminazione dell'antro non siano ancora perfettamente riesciti, valgono a dimostrare che non sarà difficile di riescire, e lasciano intravedere quanto si potrà ottenere con nuove prove. La larghezza della sala è di circa 6 metri, ma penso che, allorquando il fondo della Caverna sarà stato liberato da quanto attualmente lo ingombra, mentre si scopriranno importanti depositi di breccia ossifera, verrà ampliata la galleria e probabilmente si scopriranno dei cunicoli laterali e delle vie di comunicazione con caverne contigue, forse ora ostrutte parzialmente dalle incrostazioni e dalle brecce e terra ossifera, come ebbi a notare per talune delle sinuosità e depressioni già esplorate.

Dal monumento al termine della discenderia, per ora accessibile a tutti, si ha una lunghezza di circa 15 metri, e l'ingresso della caverna appare ancora come un punto luminoso, perchè in pieno meriggio per esso penetra un raggio che va a lambire la parete sinistra della galleria dove la Caverna si ristringe riducendosi la sua larghezza a soli 4 metri. Qui la caverna essendo ben poco incrostata, si può benissimo misurare la inclinazione degli strati troncati che costituiscono la parete sinistra, e scendono come la galleria con una inclinazione di 38° a 40°.

Grandi massi ingombrano il suolo e rendono meno agevole il passaggio al fondo attuale della Caverna; la volta è spaventevolmente fratturata, pia-

neggiante per la caduta di massi sui quali si passa, e per taluni di essi è facile di constatare che si staccarono dalla volta forse in epoca non troppo lontana. Percorsi circa altri 12 metri si arriva finalmente a un piccolo antro che ho denominato l'*Antro del pantano*; ivi la Caverna ripiglia la sua forma ordinaria, cioè con sezione triangolare; la sua altezza però è ridotta appena a 3 metri, e in alcuni punti solamente a due; in compenso vi hanno qui pure, piccole ma bellissime stalattiti.

Un importante masso di breccia ossifera si presenta di fronte e quasi al livello del suolo, ove un angusto cunicolo invita il naturalista a proseguire impavido nella sua gita sotterranea. Da quella breccia staccai una bella mandibola del vero *Orso speleo*, e altre ossa furono cavate dal prof. Alberti, dal giovane De Champs, dal Podenzana e da altri che mi accompagnavano; ma dopo tutto pensai di insistere affinchè, per ora, anche quella breccia sia lasciata al suo posto. Il barometro segna a quel punto m. 112 sul livello del mare, ossia m. 38 sotto il livello dell'ingresso attuale della Caverna.

Sul lato destro vi ha un potente ed esteso deposito di terra rossa molto argillosa e in stato di fango; essa racchiude enorme quantità di ossa le quali, con molta cura e pazienza, si potranno avere in buone condizioni. Dalla stessa parte vi ha un secondo cunicolo con un dislivello sull'antro del fango di circa quattro metri; il prof. Alberti, che volle tentarne in mia presenza la esplorazione, rilevò che si estendeva per circa una diecina di metri, abbassandosi la volta fino a diventare assolutamente per ora impraticabile; ivi pure è ricchezza di ossa fossili, la direzione sarebbe esattamente da sud-ovest a nord-est. Più oltre per ora non fu possibile di investigare, ma vi è ragione di credere che quel crepaccio si avanzi e si ramifichi ancora notevolmente in più direzioni; frattanto può dirsi che la porzione della Caverna già esplorata misura complessivamente una lunghezza di settanta a ottanta metri, ciò che in realtà è poca cosa rispetto alla lunghezza e vastità di altre Caverne, le quali però non furono scoperte nè tanto agevolmente, nè in così breve tempo come questa, che è destinata a diventare una delle più interessanti curiosità dei dintorni di Spezia d'onde è distante appena quattro chilometri. Io nutro fiducia che il Municipio di Spezia si interesserà perchè sia convenientemente esplorata, e reso facile l'accesso a quanti desidereranno di visitarla.

I fossili che finora vi sono stati raccolti si trovano presso di me e, unitamente a quanti ancora se ne scaveranno, figureranno poi nel museo civico di Spezia, ove sono pure gli avanzi della breccia ossifera di s. Teresa, e gli altri provenienti dalle brecce ossifere di Monte Rocchetta e dell' Isola Palmaria.

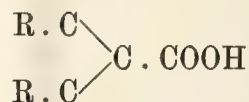
Per ora, riguardo a detti fossili mi limiterò a dire che trattasi esclusivamente di ossa di Orso. Sono in prevalenza i resti di *Ursus spelaeus* Bl., ma ho già constatato la presenza di un orso più piccolo, probabilmente iden-

tico a quello che trovai nella Caverna ossifera di Cassana nel 1858, e che fu pure scoperto or sono pochi anni nella breccia ossifera della famosa *Grotta di Gargas* nei Pirenei, illustrato maestrevolmente dal prof. Gaudry. Anche dell'*Ursus priscus* Goldf., credo di avere qualche indizio; ma poichè mi mancano ancora parti dello scheletro caratteristiche di questa specie, così mi riservo a dirne in altra circostanza.

Chimica. — *Sopra la legge dell'eterificazione di V. Meyer.* Nota di Angelo Angeli, presentata dal Socio Ciamician.

In questi ultimi anni V. Meyer ha pubblicati i risultati delle sue ricerche sopra l'andamento dell'eterificazione di un grande numero di acidi aromatici, e dall'esame di una serie di fatti è giunto a conclusioni molto interessanti.

V. Meyer ha trovato che nel mentre l'acido benzoico e molti suoi derivati si possono facilmente eterificare per mezzo dell'alcool metilico ed acido cloridrico, gli acidi benzoici ortobisostituiti

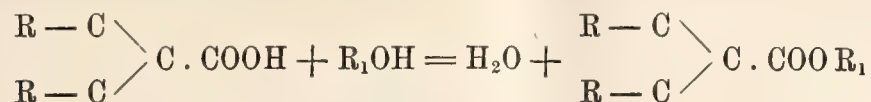
$$\begin{array}{l} R.C\diagdown \\ \qquad\quad C.COOH \\ R.C\diagup \end{array}$$

non vengono eterificati punto, oppure solamente a stento ed in piccolissima parte. Gli eteri di tutti questi acidi si possono invece agevolmente ottenere per azione del joduro di metile sopra i loro sali argentici.

V. Meyer spiega il comportamento anormale di questi acidi, ricorrendo a concetti stereochimici, ed ammette che i due gruppi R impediscano la sostituzione dell'idrogeno basico col residuo alcoolico.

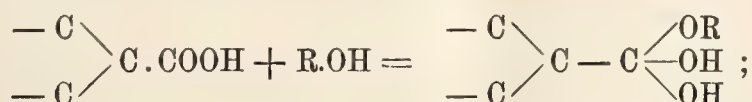
Accettando la spiegazione ingegnosa di V. Meyer, non si comprende però perchè sia impedita l'eterificazione con alcool ed acido cloridrico, mentre avviene senza difficoltà la salificazione dell'acido e la eterificazione del sale argentico con un joduro alcoolico. V. Meyer fa invero notare che la salificazione ha luogo immediatamente, mentre l'eterificazione è più lenta; ciò però non è sufficiente per fare intendere il diverso comportamento dello stesso acido nelle due reazioni.

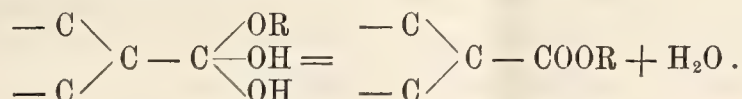
Io credo invece che dando al processo dell'eterificazione una interpretazione un poco diversa dall'ordinaria, ma che sta in accordo con tutti i fatti noti finora in proposito, si possa arrivare a spiegare meglio le eccezioni osservate da V. Meyer, e si possa dallo stesso punto di vista intendere anche le altre reazioni anomale, le quali a priori non sembrano avere nessuna analogia coll'ordinaria eterificazione.

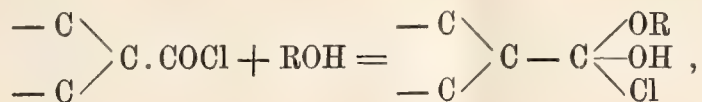
V. Meyer ammette che nella formazione degli eteri, per mezzo dell'alcool metilico ed acido cloridrico, avvenga semplicemente eliminazione di acqua fra l'alcool e l'idrogeno carbossilico:

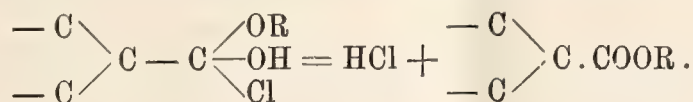
$$\begin{matrix} R-C \diagdown \\ R-C \diagup \end{matrix} C.COOH + R_1OH = H_2O + \begin{matrix} R-C \diagdown \\ R-C \diagup \end{matrix} C.COOR_1$$

Secondo questo modo di vedere, e che oggi è generalmente ammesso, in questa reazione prenderebbe parte l'atomo d'idrogeno o tutt'al più il residuo ossidrilico del carbossile.

Io ritengo invece che la reazione, molto probabilmente, non sia così semplice come a prima vista si sarebbe indotti a credere, e che l'eguaglianza accennata non esprima che l'andamento finale della reazione; secondo me, nel processo di eterificazione, oltre all'ossidrile prende parte attiva anche il carbossile del residuo carbossilico. Nell'eterificazione, a me sembra si possa ammettere, che in una prima fase avvenga addizione dell'alcool al gruppo carbossilico secondo lo schema:

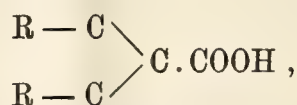
$$\begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C.COOH + R.OH = \begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C-C \begin{matrix} \diagup OR \\ -OH \\ \diagdown OH \end{matrix} ;$$

da questo composto intermedio, per eliminazione di una molecola di acqua, si formerebbe il corrispondente etere:

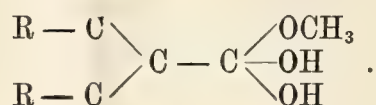
$$\begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C-C \begin{matrix} \diagup OR \\ -OH \\ \diagdown OH \end{matrix} = \begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C-COOR + H_2O .$$

È evidente che la reazione potrebbe essere più complicata ancora, quando si ammetta che l'acido minerale che si impiega non faccia l'ufficio di semplice disidratante. Così p. es. nel caso dell'acido cloridrico ed alcool metilico si può supporre che in una prima fase si formi il cloruro dell'acido, il quale per addizione all'alcool darebbe il composto:

$$\begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C.COCl + ROH = \begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C-C \begin{matrix} \diagup OR \\ -OH \\ \diagdown Cl \end{matrix} ,$$

che per successiva eliminazione di acido cloridrico originerebbe l'etere:

$$\begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C-C \begin{matrix} \diagup OR \\ -OH \\ \diagdown Cl \end{matrix} = HCl + \begin{matrix} -C \diagdown \\ -C \diagup \end{matrix} C.COOR .$$

Secondo questo modo di vedere, il problema che riguarda l'eterificazione prende da un aspetto differente.

Nella formazione degli eteri non si tratterebbe di una semplice sostituzione dell'idrogeno carbossilico col residuo alcoolico, come avviene nella salificazione

$$\begin{array}{l} R - C \diagdown \\ \qquad\quad\; C.COOH\,, \\ R - C \diagup \end{array}$$

ma invece, nei casi studiati da V. Meyer, i radicali R impedirebbero che si formi il primo prodotto intermedio della reazione:

$$\begin{array}{l} R - C \diagdown \qquad\quad \diagup OCH_3 \\ \qquad\quad\; C - C \!-\! OH \quad . \\ R - C \diagup \qquad\quad \diagdown OH \end{array}$$

Si vede subito come nella formazione di questi composti di addizione, i radicali R possano avere, anche secondo la ipotesi stereo-chimica, una influenza notevole, e si comprende assai meglio in qual modo la loro presenza possa impedire o rendere difficile l'eterificazione.

Secondo questa ipotesi i due metodi di eterificazione, l'ordinario e quello dei sali argentici, sebbene nella maggior parte dei casi conducano agli stessi prodotti finali, rappresenterebbero due processi essenzialmente diversi.

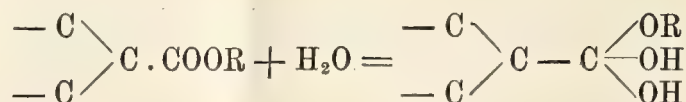
È del pari noto, e V. Meyer lo mette in evidenza, che gli eteri che difficilmente si formano anche difficilmente si lasciano saponificare.

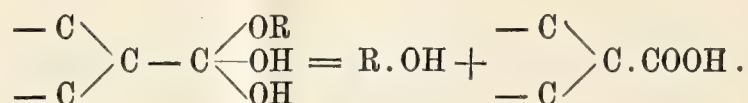
Anche questo fatto, secondo me, può trovare una spiegazione analoga.

Se invece di ammettere, come si fa finora, che in questa reazione avvenga un semplice scambio secondo l'eguaglianza:

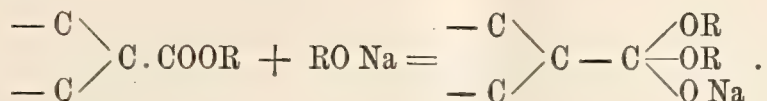
$$- C - COO\boxed{R + HO}H = - C - COOH + ROH\,,$$

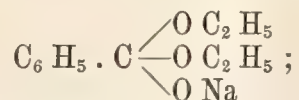
si può supporre che in una prima fase avvenga addizione di una molecola di acqua (o dell'alcali oppure dell'acido, secondo i mezzi che si impiegano) nel senso rappresentato dallo schema:

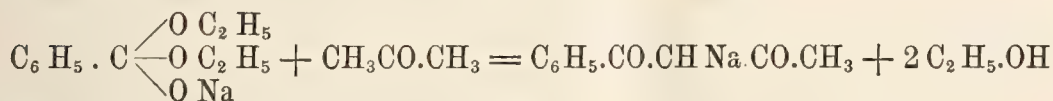
$$\begin{array}{l} - C \diagdown \\ \qquad C.COOR + H_2O = \\ - C \diagup \end{array} \begin{array}{l} - C \diagdown \qquad\quad \diagup OR \\ \qquad C - C \!-\! OH \\ - C \diagup \qquad\quad \diagdown OH \end{array}$$

e che poi si elimini alcool:

$$\begin{array}{l} - C \diagdown \qquad\quad \diagup OR \\ \qquad C - C \!-\! OH = R.OH + \\ - C \diagup \qquad\quad \diagdown OH \end{array} \begin{array}{l} - C \diagdown \\ \qquad C.COOH\,. \\ - C \diagup \end{array}$$

Si comprende subito come, a questo modo, anche la saponificazione, l'inversa dell'eterificazione, rientri nello stesso ordine di reazioni.

Questa ipotesi verrebbe avvalorata dal fatto che Claisen ha potuto con tutto rigore dimostrare l'esistenza dei composti di addizione degli eteri con gli alcoolati:

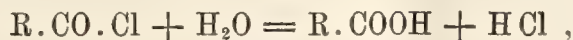
$$\begin{matrix}-C\\-C\end{matrix}\!\!>C.COOR + RO\,Na = \begin{matrix}-C\\-C\end{matrix}\!\!>C-C\!\!\begin{matrix}\diagup OR\\ -OR\\ \diagdown O\,Na\end{matrix}\;.$$

Basandosi sulla mia ipotesi si può prevedere una serie di altri fatti. Così p. e. è noto che l' etere benzoico, in presenza di etilato sodico, può condensarsi con l'acetone per dare il benzoilacetone. Secondo le interessanti ricerche di Claisen in questa reazione dapprima l' alcoolato si addiziona all'etere benzoico:

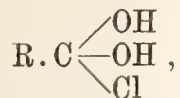
$$C_6H_5\,.\,C\!\!\begin{matrix}\diagup O\,C_2H_5\\ -O\,C_2H_5\\ \diagdown O\,Na\end{matrix}\;;$$

da questo composto, in una fase successiva, si eliminano due molecole di alcool:

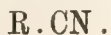
$$C_6H_5\,.\,C\!\!\begin{matrix}\diagup O\,C_2H_5\\ -O\,C_2H_5\\ \diagdown O\,Na\end{matrix} + CH_3CO.CH_3 = C_6H_5.CO.CH\,Na.CO.CH_3 + 2\,C_2H_5.OH$$

Ne risulta quindi che con gli *eteri* benzoici ortobisostituiti, essendo impedita l'addizione dell'alcoolato, questa reazione non potrebbe avvenire, oppure dovrebbe procedere in modo stentato ed incompleto.

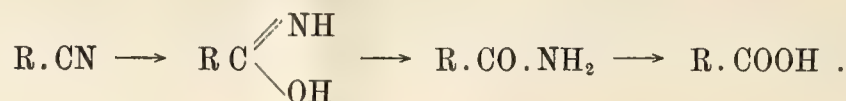
Anche la difficile saponificazione dei cloruri di alcuni radicali acidi e di taluni nitrili si potrebbe spiegare nello stesso modo.

Infatti è molto probabile che anche nel processo di trasformazione dei cloruri negli acidi corrispondenti:

$$R.CO.Cl + H_2O = R.COOH + H\,Cl\;,$$

in una prima fase si formino prodotti di addizione:

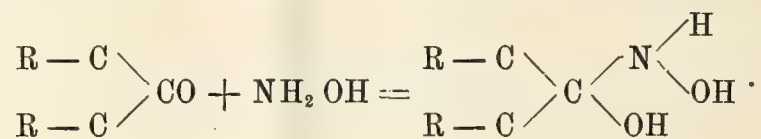
$$R.C\!\!\begin{matrix}\diagup OH\\ -OH\\ \diagdown Cl\end{matrix}\;,$$

che per successiva eliminazione di acido cloridrico dànno origine ai rispettivi acidi. Naturalmente, lo stesso vale per i nitrili:

$$R.CN\,.$$

Anche la saponificazione di queste sostanze è preceduta dall'addizione di una molecola di acqua, con formazione dell'ammide:

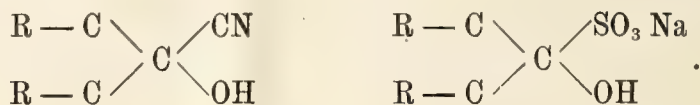
$$R.CN \longrightarrow RC\begin{cases} \!\!\!{}^{\nearrow NH} \\ \!\!\!{}_{\searrow OH} \end{cases} \longrightarrow R.CO.NH_2 \longrightarrow R.COOH\ .$$

Come si vede, queste reazioni sono molto affini e si possono riguardare tutte da uno stesso punto di vista.

Accennerò infine che anche il fatto che alcuni chetoni non reagiscono con l'idrossilammina per dare le ossime corrispondenti, probabilmente si deve intendere nello stesso modo.

Tutti infatti sono oramai d'accordo nell'ammettere che la formazione delle ossime sia preceduta da un'addizione dell'idrossilammina:

$$\begin{matrix} R-C \\ R-C \end{matrix}\!\!>CO + NH_2OH = \begin{matrix} R-C \\ R-C \end{matrix}\!\!>C\begin{matrix} / N\begin{matrix} / H \\ \backslash OH \end{matrix} \\ \backslash OH \end{matrix}\ .$$

Anche in questo caso, sarebbero appunto i residui R che impediscono questi processi di addizione e quindi anche la successiva formazione delle ossime.

Lo stesso vale probabilmente anche per alcuni chetoni che non addizionano l'acido prussico oppure il bisolfito per dare le cianidrine ed i composti bisolfitici:

$$\begin{matrix} R-C \\ R-C \end{matrix}\!\!>C\begin{matrix} / CN \\ \backslash OH \end{matrix} \qquad \begin{matrix} R-C \\ R-C \end{matrix}\!\!>C\begin{matrix} / SO_3Na \\ \backslash OH \end{matrix}\ .$$

Io comunico naturalmente queste mie vedute col massimo riserbo, fiducioso che ulteriori esperienze abbiano ad apportare loro nuove conferme.

Chimica. — *Sulla stabilità delle sei Xililsuccinimmidi isomere* (1). Nota di A. Miolati e di A. Lotti, presentata dal Socio Cannizzaro.

L'importanza della costituzione di una molecola sull'andamento di una reazione che ne modifica una sua parte venne posta, particolarmente in questi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma. — 4ª Comunicazione di A. Miolati, *Sulla stabilità delle immidi di acidi bibasici*. Vedi questi Rendiconti, vol. III, 1° sem., pag. 515 e 597 (1894); vol. IV, 1° sem., pag. 351 (1895).

ultimi tempi, in un rilievo speciale. Fu precisamente quando i lavori di V. Meyer ebbero dimostrato che la presenza di gruppi sostituenti l'idrogeno vicino al carbossile d'un acido aromatico, rendeva più difficile la sua eterificazione, che si ricordarono e coordinarono moltissimi fatti analoghi già da lungo tempo osservati e che se ne ricercarono di nuovi.

È naturale che un gruppo, il quale si trovi vicino alla posizione in cui una molecola chimica viene modificata da un agente qualsiasi, eserciti una influenza sulla facilità con cui avviene questa modificazione, ed è altresì ovvio che questa influenza dipenderà dalla natura di quel gruppo, e cambierà col cambiare di esso. Quale sia la causa di questa azione non si può stabilire a priori, soltanto pare che più della natura chimica del gruppo influisca lo spazio da esso occupato. Certamente le osservazioni sperimentali non si possono ancora considerare sufficienti a decidere la questione, la quale forse soltanto in base ad uno studio esteso ed accurato si potrà fino ad un certo punto chiarire. È certo però che in questa tanto delicata questione di meccanica molecolare, più che in qualsiasi altro problema chimico, le osservazioni debbono essere quantitative; ciò che dall'altra parte non è difficile di fare, poichè la determinazione della velocità d'una reazione o quella dell'equilibrio di due reazioni inverse, ci offre un criterio esatto e comparabile dell'andamento di un processo chimico.

In precedenti pubblicazioni uno di noi ebbe occasione di mostrare che la velocità con cui le immidi succiniche sostituite nell'azoto si trasformano per mezzo dell'idrato sodico negli ammidoacidi corrispondenti, era diversa a seconda del gruppo unito all'azoto stesso. Nel caso che il gruppo fosse alifatico, la velocità di decomposizione diminuiva coll'aumentare del suo peso. La fenilsuccinimmide invece si mostrava, in confronto alle immidi contenenti gruppi alcoolici, molto meno stabile, indicando così che la massa del gruppo sostituente non è da considerarsi il solo fattore modificante la velocità della decomposizione.

Si presentava allora interessante di ricercare quale influenza avrebbero esercitato sulla velocità di decomposizione gruppi che si fossero introdotti nel residuo fenico della fenilsuccinimmide. Lo studio delle tre toluilsuccinimmidi diede per risultato che il metile aumentava sempre la stabilità e particolarmente quando esso si trovava in posizione orto all'azoto, cioè nella posizione più vicina al punto in cui la molecola viene intaccata dall'idrato sodico.

I valori delle costanti allora ottenuti sono i seguenti:

Fenilsuccinimmide	Ac. =	2,27
o Toluil " "	"	0,8558
m " " "	"	1,098
p " " "	"	1,12

La ortotoluilsuccinimmide è dunque più stabile degli altri suoi due isomeri di posizione.

Con questo risultato concordano perfettamente le ultime osservazioni di E. Goldschmidt sulla eterificazione di alcuni acidi aromatici [1]. Diamo qui i valori delle costanti di eterificazione di alcuni acidi:

Acido benzoico	K =	0,0428
» o toluico	»	0,0111
» m »	»	0,0470
» p »	»	0,0241
» o bromobenzoico . . .	»	0,0203
» m » . . .	»	0,0553
» p » . . .	»	0,0450 (?)
» o nitrobenzoico . . .	»	0,0028
» m » . . .	»	0,0296
» p » . . .	»	0,0261

Il confronto delle tre serie di acidi isomeri, mostra che gli acidi orto hanno sempre la minore velocità di eterificazione, vale a dire che anche in questo caso il gruppo carbossilico viene modificato più lentamente quando ha sostituito l'idrogeno vicino con un altro gruppo.

Nella Nota presente noi studiamo la decomposizione delle sei xililsuccinimmidi isomere, per stabilire l'influenza dei due gruppi metilici posti in differenti posizioni reciproche.

I metodi di ricerca seguiti furono quelli esposti nelle Note precedenti sopracitate, le lettere nelle tabelle hanno il medesimo significato che in tutte le altre. Le sei xililsuccinimmidi non erano finora conosciute, e furono preparate appositamente per questa ricerca.

o. Xililsuccinimmide vicinale $\begin{matrix} CH_2 - CO \\ \vert \\ CH_2 - CO \end{matrix} \!\!> N - C_6H_3(CH_3)(CH_3)$

Fu ottenuta, insieme coll'isomera susseguente, seguendo il processo generale indicato dal Menschutkin per le succinimmidi della serie aromatica [2]. Il miscuglio delle due ortoxilidine isomere si è ottenuto dall'ortoxilolo seguendo il metodo indicato da Nölting [3]. Le xilidine distillate con acido succinico dettero le due immidi, le quali furono cristallizzate frazionatamente dall'acqua alcoolica, dove la vicinale è molto più solubile dell'altra.

Dopo una prima separazione con questo metodo, l'immide vicinale si è depurata sciogliendola ripetutamente in cloroformio e precipitandola con ligroina, finchè non mostrò un punto di fusione costante a 105°. L'immide bolle

(1) Berichte, XXVIII, 3218 (1895).
(2) Menschutkin. Liebigs Annalen CLXII-166.
(3) Nölting u. Forel, Berichte, XVIII, 2674.

al di sopra di 300° e cristallizza dal cloroformio e ligroina in piccoli prismi.

Una determinazione d'azoto dette i risultati seguenti:

gr. 0,2356 di sostanza dettero 14,5 cm³ d'azoto misurati a 25° e 760^{mm} e corrispondenti a 0,01648 di azoto.

Per cento:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_{13}O_2N$
N =	6,99	6,91

I valori trovati nella determinazione della velocità di decomposizione sono i seguenti:

A = 9,15

t	x	A-x	x : A-x	Ac
4	7,00	2,15	3,256	0,8140
5	7,39	1,76	4,199	0,8398
6	7,65	1,50	5,100	0,8500
7	7,79	1,36	5,728	0,8182
8	7,93	1,22	6,500	0,8125
9	8,06	1,09	7,394	0,8215
10	8,13	1,02	7,971	0,7971
11	8,22	0,93	8,839	0,8035
12	8,30	0,85	9,766	0,8138
13	8,35	0,80	10,43	0,8023
14	8,40	0,75	11,20	0,8000
15	8,45	0,70	12,07	0,8046

Media 0,8147.

o. Xililsuccinimmide asimmetrica

$CH_2 — CO$ \
| N-C_6H_3(CH_3)(CH_3)
$CH_2 — CO$ /

Fu ottenuta, come si è detto insieme colla precedente, e fu preparata inoltre servendosi della xilidina solida, ottenuta col metodo di Jacobsen [1], cioè gettando l'ortoxilolo nell'acido nitrico fumante e riducendo il nitroxilolo formatosi, con Fe ed CH_3COOH. L'immide distilla sopra 300°, cristallizza dall'alcool e dall'acqua alcoolica in sottili laminette splendenti che hanno il punto di fusione a 150°.

Le analisi dettero i risultati seguenti:

gr. 0,1965 di sostanza dettero gr. 0,5102 di CO_2 e gr. 0,1176 di H_2O corrispondenti a gr. 0,1391 di C e gr. 0,01306 di H.

(1) Jacobsen, Berichte XVII, 160.

gr. 0,2120 di sostanza dettero gr. 13,3 cm.³ di azoto misurati a 20° e 758 mm. e corrispondenti a gr. 0,01514 di azoto.

Per cento:

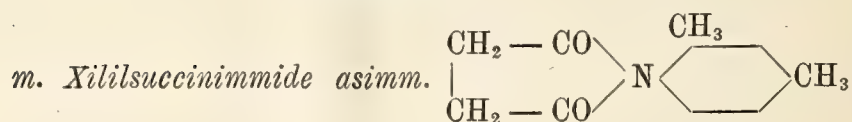
	trovato		calcolato per $C_{12}H_{13}O_2N$
C =	70,81	C =	70,89
H =	6,65	H =	6,45
N =	7,14	N =	6,91

Diamo qui le determinazioni di velocità di decomposizione:

A = 9,15

t	x	A-x	x : A-x	Ac
4	7,78	1,37	5,679	1,419
5	7,98	1,17	6,821	1,364
6	8,14	1,01	8,060	1,343
7	8,25	0,90	9,168	1,309
8	8,31	0,84	9,893	1,236
9	8,39	0,76	11,04	1,226
10	8,45	0,70	12,07	1,200
11	8,52	0,63	13,52	1,229
12	8,57	0,58	14,78	1,231
13	8,62	0,53	16,27	1,251
14	8,64	0,51	16,93	1,209
15	8,68	0,47	18,47	1,231

Media 1,270.

m. Xililsuccinimmide asimm. $\begin{matrix} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{matrix} > N < C_6H_3(CH_3)_2$

È stata pure preparata, seguendo sempre il metodo generale, e partendo dalla m. xilidina pura del commercio. Distilla anch'essa sopra 300°, si solidifica solo dopo un certo tempo e cristallizza dall'acqua alcoolica in minuti aghetti riuniti a cespuglio, che fondono a 118°.

All'analisi dette i seguenti risultati:

0,1983 gr. di sostanza dettero gr. 0,5130 di CO_2 e gr. 0,1219 di H_2O corrispondenti a gr. 0,1399 di C e gr. 0,01354 di H.

0,2243 gr. di sostanza dettero 13,8 cm.³ d'azoto misurati a 20° e 756 mm e corrispondenti a gr. 0,01567 di azoto.

Per cento:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_{13}O_2N$
C =	70,56	70,89
H =	6,82	6,45
N =	6,98	6,91

Le determinazioni di velocità di decomposizione hanno dato i risultati seguenti:

A = 9,15

t	x	A-x	x : A-x	Ac
4	7,15	2,00	3,575	0,8937
6	7,64	1,51	5,059	0,8431
7	7,90	1,25	6,320	0,9028
8	8,02	1,13	7,098	0,8872
9	8,13	1,02	7,971	0,8856
10	8,20	0,95	8,632	0,8632
11	8,27	0,88	9,397	0,8542
12	8,33	0,82	10,16	0,8466
13	8,38	0,77	10,88	0,8369
14	8,44	0,71	11,89	0,8492
15	8,49	0,66	12,86	0,8566

Media 0,8653

m. Xililsuccinimmide simmetrica $\begin{array}{l} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{array} \!\!> N - C_6H_3(CH_3)_2$

Si partì dalla m. xilidina simmetrica ottenuta col processo di Wroblewsky [1], cioè acetilando la xilidina asimmetrica, nitrando il composto acetilato, saponificandolo e diazotandolo poi ed infine riducendo il nitroxilolo ottenuto. Si ebbe in tal modo la xilidina 1. 3. 5, colla quale si preparò l'immide che distilla sopra 300° e si condensa subito in massa cristallina. Da acqua alcoolica cristallizza in begli aghi bianchi che fondono a 168°.

L'analisi dette i risultati seguenti:

0,2043 gr. di sostanza dettero gr. 0,5300 di CO_2 e gr. 0,1234 di H_2O corrispondenti a gr. 0,1445 di C e gr. 0,01371 di H.

0,2184 gr. di sostanza dettero 13,1 cm.³ d'azoto misurati a 19° e 762 mm. e corrispondenti a gr. 0,01496 d'azoto.

Per cento:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_{13}O_2N$
C =	70,73	70,89
H =	6,69	6,45
N =	6,93	6,91

(1) Wroblewsky, Ann. CCVII, 91.

A = 9,15

t	x	A-x	x : A-x	Ac
4	7,60	1,55	4,904	1,226
5	7,86	1,29	6,092	1,218
6	7,94	1,21	6,561	1,093
7	8,14	1,01	8,060	1,151
8	8,26	0,89	9,281	1,160
9	8,32	0,83	10,02	1,113
10	8,40	0,75	11,20	1,120
11	8,44	0,71	11,89	1,080
12	8,52	0,63	13,52	1,126
13	8,56	0,59	14,51	1,116
14	8,62	0,53	16,27	1,162
15	8,66	0,49	17,67	1,178

Media 1,145

m. Xililsuccinimmide vicinale $\begin{array}{l} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{array} > N - C_6H_3(CH_3)_2$

Fu preparata col solito metodo, partendo dalla base, ottenuta solo in piccolissima quantità col processo di Nölting e Forel [1] ed in quantità maggiore con un metodo speciale, del quale verrà fatta da noi in altra Memoria speciale menzione. L'immide preparata colla xilidina ottenuta col primo processo fonde a 184°-186°, ma non deve essere completamente pura, perchè partendo dalla Xilidina simmetrica vicinale ottenuta col nuovo metodo si ha un'immide che fonde a 187°.

L'immide cristallizza dall'alcool in cristalli appiattiti, bianchi, terminati a punta, che sono pochissimo solubili in alcool a freddo, molto a caldo.

Una determinazione d'azoto dette:

0,2025 gr. di sostanza dettero 12,7 cm.³ d'azoto misurati a 22° e 754 ^{mm} e corrispondenti a gr. 0,01414 d'azoto.

Per cento.

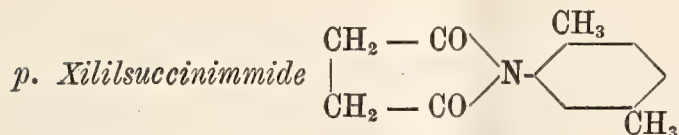
	trovato	calcolato per $C_{12}H_{13}O_2N$
N =	6,98	6,91

[1] Nöltin u. Forel Ber. XVIII, 2674.

A = 9,15

t	x	A-x	x : A-x	Ac
4	3,61	5,54	0,6516	0,1629
5	4,11	5,04	0,8155	0,1631
6	4,50	4,65	0,9677	0,1612
7	4,93	4,22	1,168	0,1668
8	5,13	4,02	1,277	0,1596
9	5,49	3,66	1,500	0,1666
10	5,58	3,57	1,584	0,1584
11	5,80	3,35	1,722	0,1574
12	5,87	3,28	1,789	0,1490
13	6,10	3,05	2,000	0,1538
14	6,25	2,90	2,155	0,1540
15	6,44	2,71	2,376	0,1584
16	6,47	2,68	2,414	0,1508
17	6,64	2,51	2,645	0,1555
18	6,70	2,45	2,735	0,1515
19	6,84	2,31	2,961	0,1558
20	6,90	2,25	3,066	0,1538
21	6,97	2,18	3,524	0,1522

Media = 0,1571

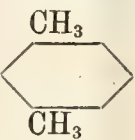
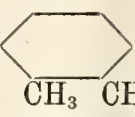
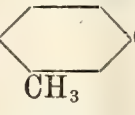
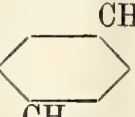
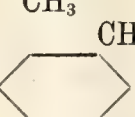
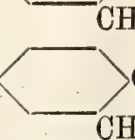
p. Xililsuccinimmide $\begin{matrix} CH_2 - CO \\ | \\ CH_2 - CO \end{matrix} \Big> N - C_6H_3(CH_3)_2$

Si ottenne, impiegando la p. xilidina preparata col metodo di Jannasch (¹), per nitrazione del p. xilolo e successiva riduzione del nitroderivato formatosi. L'immide ottenuta distilla essa pure sopra 300° e cristallizza dall'alcool in lamine splendenti che fondono a 120°.

Una determinazione d'azoto dette il risultato seguente:

gr. 0,2511 di sostanza dettero 15,3 cm.³ d'azoto misurati a 19° e 760 ᵐᵐ e corrispondenti a gr. 0,01756 di azoto.

Per cento:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_{13}O_2N$
N =	6,99	6,91

(¹) Jannasch, Ann. CLXXVI, 55.

A = 9,15

t	x	A-x	x : A-x	Ac
4	7,14	2,01	3,552	0,8880
5	7,47	1,68	4,446	0,8892
6	7,65	1,50	5,100	0,8500
7	7,89	1,26	6,262	0,8945
8	7,98	1,17	6,821	0,8526
9	8,12	1,03	7,884	0,8760
10	8,21	0,94	8,734	0,8734
11	8,30	0,85	9,766	0,8887
12	8,35	0,80	10,43	0,8691
13	8,42	0,73	11,53	0,8868
14	8,44	0,71	11,89	0,8592
15	8,50	0,65	13,08	0,8720

Media 0,8757

Le medie dei valori ottenuti sono qui ordinate in serie crescente:

$C_4H_4O_2N<C_6H_3(CH_3)_2$ (CH₃ in alto, CH₃ in basso, entrambi orto)   Ac = 0,1571

$R''=N<C_6H_3(CH_3)_2$ (CH₃ CH₃ in basso)   0,8147

$R''=N<C_6H_3(CH_3)_2$ (CH₃ in basso, >CH₃ in para)   0,8653

$R''=N<C_6H_3(CH_3)_2$ (CH₃ in alto meta, CH₃ in basso orto)   0,8757

$R''=N<C_6H_3(CH_3)_2$ (CH₃ in alto meta, CH₃ in basso meta)   1,145

$R''=N<C_6H_3(CH_3)_2$ (>CH₃ in para, CH₃ in basso meta)   1,270

I valori si possono dividere rispetto alla grandezza in 3 gruppi. Al primo appartiene la sola m-xililsuccinimmide vicinale. Essa ha i due metili in posizione orto all'azoto, e risulta perciò la più stabile. Al secondo gruppo appartengono le tre xililsuccinimmidi aventi un solo gruppo metilico in posizione orto. Esse si decompongono in confronto all'isomero meta-viccinale molto più velocemente, sono però alla loro volta più stabili delle altre due formanti il terzo gruppo, le quali non hanno nessun metile in posizione orto.

Questi risultati concordano come si vede con quelli ottenuti precedentemente e di cui si fece cenno in principio di questa nota. Vedremo se saranno confermati dalle ulteriori ricerche, che abbiamo intrapreso su questo argomento.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Bernardi G. *Estrazione abbreviata della radice cubica dei numeri.* Presentata dal Segretario.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Brioschi dà annuncio della perdita fatta dall'Accademia, nella persona del Socio nazionale Giuseppe Fiorelli, mancato ai vivi il 29 gennaio 1896; il Presidente commemora brevemente l' estinto, il quale faceva parte dell'Accademia sino dal 1875.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Bassani, Gegenbaur, Hall, e dai signori Galloni e D' Engelhardt. Presenta inoltre il vol. IX delle *Opere di Cayley* inviato in dono dall' Università di Cambridge.

CORRISPONDENZA

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; l'Accademia di scienze naturali di Filadelfia; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Manchester; l'Istituto Teyler di Harlem; l'Istituto goodetico di Potsdam; la Scuola politecnica di Delft; l'Osservatorio Radcliffe di Oxford.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

L'Ufficio idrografico di Genova; la Società di scienze naturali di Francoforte s. M.; la Società zoologica di Londra; le Università di Cambridge, di Utrecht e di Kasan.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 febbraio 1896.

Bassani F. — La ittiofauna della Dolomia principale di Giffoni. Pisa, 1895. 4°.
Bisogni C. — Intorno all'evoluzione del nucleo vitellino del Salticus scenicus e della Scutigera coleoptata. Leipzig, 1895. 8°.
Bottazzi F. — Sul metabolismo dei globuli rossi del sangue. Milano, 1895. 8°.
Carazzi D. — Fagocitosi e diapedesi nei Lamellibranchi. Firenze, 1895. 8°.

Cayley A. — The Collected mathematical papers. Vol. IX. Cambridge, 1896. 4°.

Cruls L. — Determinação das Posições Geographicas de Radeio, Entre Rios, Juiz de Fóra, João Gomes e Barbacena. Rio de Janeiro, 1894. 4°.

Id. — Le Climat de Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1894. 4°.

Id. — Méthode graphique pour la détermination des heures approchées des eclipses du Soleil et des occultations. Rio de Janeiro, 1894. 8°.

Elenco dei fari e fanali 1896. Genova, 1896. 4°.

Engelhardt B. d'. — Observations astronomiques. 3e partie. Dresde, 1895. 4°.

Fano G. — La Fisiologia nel passato e le cause dei suoi recenti progressi. Firenze, 1895. 8°.

Id. — Résumé des travaux de l'année 1895 publiés sous sa direction au Laboratoire de Physiologie de l'Institut d'études supérieurs de Florence. Turin, 1896. 8°.

Frassineto A. di. — Contributo allo studio degli albuminoidi del siero sanguigno. Firenze, 1895. 8°.

Galloni L. — La peronospora infestante. Roma, 1896. 4°.

Id. Maggese e frumento. Roma, 1895. 4°.

Gegenbaur C. — Morphologisches Jahrbuch. Bd. XXIII, 1, 2. Leipzig, 1895. 4°.

Gori F. — Antichi nomi dei fiumi di Romagna. Roma, 1895. 8°.

Hall J. — Natural history of New Yark. — Palaeontology. Vol. VIII. Albany, 1894. 4°.

Herlitzka G. — Contributo allo studio della capacità evolutiva dei due primi blastomeri nell'uovo del tritone (Triton Cristatus). Leipzig, 1895. 8°.

Klein C. — Ein Universaldrehapparat zur Untersuchung von Dünnschliffen in Flüssigkeiten. Berlin, 1895. 8°.

Langmuir A. C. — Index to the Literature of Didymium 1842-1893. Washington, 1894. 8°.

Libertini G. — Sulla localizzazione dei poteri inibitori nella corteccia cerebrale. Torino, 1895. 8°.

Magee W. H. — Index to the Literatures of Cerium aud Lanthanum. Washington, 1895. 8°.

Morley E. W. — On the densities of Oxigen and Hydrogen and on the Ratio of theiratomic Weights. Washington, 1895. 4°.

Nobile A. — Abbreviazione del calcolo di una linea geodetica quando si voglia solo una buona approssimazione. Napoli, 1895. 8°.

Id. — Contribuzioni sul numero della costante dell'aberrazione annua delle stelle. Napoli, 1895. 8°.

Id. — Osservazioni di ascensioni rette, direttamente e per riflessione, fatte nel 1883. Napoli, 1895. 4°.

Palazzo L. — Misure assolute degli elementi del Magnetismo terrestre eseguite in Italia negli anni 1888 e 1889. Roma, 1895. 4°.

Piette Ed. — Hiatus & Lacune. Vestiges de la periode de Transition dans la grotte du Mas-d'Azil. Beaugency, 1895. 8°.

Schaeberle J. M. — Report on the total Eclipse of the Sun observed at Mina Bronces, Chile (Contributions from the Lick Observ. 4). Sacramento, 1895. 8°.

P. B.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 febbraio 1896.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

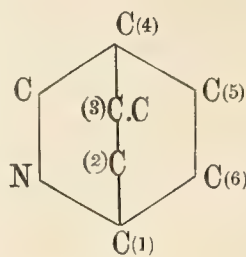
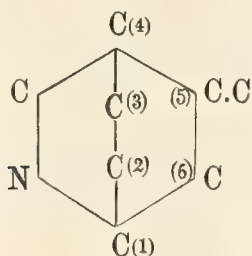
Chimica. — *Sulla costituzione della granatonina e dei suoi derivati.* Nota del Socio GIACOMO CIAMICIAN e PAOLO SILBER.

In una serie di Memorie pubblicate in questi ultimi anni (1) abbiamo dimostrato che fra i derivati della pseudopelletierina e quelli della tropina esiste una stretta relazione, in modo che i primi devono essere considerati quali omologhi superiori dei secondi. Malgrado questa esatta conoscenza dei rapporti che passano fra le due serie di sostanze, pure, fin' ora, non abbiamo creduto opportuno di esprimere le nostre vedute intorno alla costituzione degli alcaloidi del melagrano.

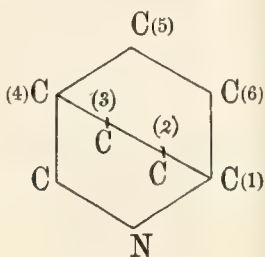
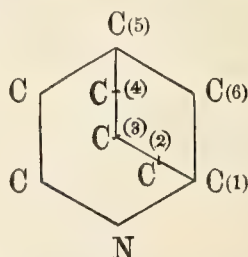
Questo riserbo è stato determinato dalla difficoltà di mettere d' accordo alcuni fatti da noi osservati, con la formola, ora quasi generalmente accettata e certamente assai probabile, che Merling ha attribuito alla tropina. Dalle nostre ricerche risulta, che la metilgranatonina (2) può essere trasformata da un lato in *α-propilpiridina*, e dall' altro in un composto non azotato, il *granatone* ($C_8H_{10}O$), il quale non è probabilmente che un diidroacetofenone ($C_6H_7 . CO . CH_3$), perchè dà per ossidazione l'*acido fenilgliossilico* ($C_6H_5 . CO . COOH$). Volendo ora esprimere con una formola la costituzione fondamentale degli alcaloidi da noi studiati, non si può ammettere che essi

(1) Gazzetta chimica italiana, vol. 22, II, pag. 514, e vol. 24, I, pag. 116 e II, pag. 350.

(2) La granatonina viene qui chiamata metilgranatonina in seguito ad alcune considerazioni sulla nomenclatura più opportuna tanto per gli alcaloidi del melagrano, che per quelli tropinici, che si trovano più avanti.

contengano semplicemente un metile di più di quelli tropinici, perchè i due seguenti schemi, che in tal caso sarebbero da prendersi in esame

se servono a spiegare come dalla granatanina possa prendere origine la α-propilpiridina, non dànno conto dell' altro fatto, ugualmente importante, cioè della formazione del granatone. Non si potrebbe comprendere come questo corpo dia per ossidazione l' acido fenilgliossilico, giacchè, secondo i due schemi, l' anello non azotato, da cui deriverebbe questo acido, dovrebbe dare, invece di un derivato monosostituito del benzolo, l' acido ortoftalico (4 — 5 oppure 3 — 4).

Per evitare queste difficoltà basta fare una supposizione, che ci apparve subito la migliore, ma che fin qui ci siamo astenuti dal menzionare, essendo ora soltanto in grado di confortarla coll' esperienza.

Se si ammette che le relazioni fra i derivati della granatanina e gli alcaloidi tropinici non sieno quelle della ordinaria omologia, ma se si suppone che si tratti invece di quella, che uno di noi, molti anni or sono, chiamò *omologia nucleare*, la granatanina apparisce costituita da due anelli esatomici, i quali anzi che da otto, come nella tropina, sono formati da nove atomi.

schema delle basi tropiniche — schema delle basi granataniche

In questo modo si viene però a stabilire un nuovo tipo di combinazioni nucleari, il quale, come si vedrà, per l' interesse speciale che presenta non poteva essere da noi accettato senza ulteriori prove e mature riflessioni.

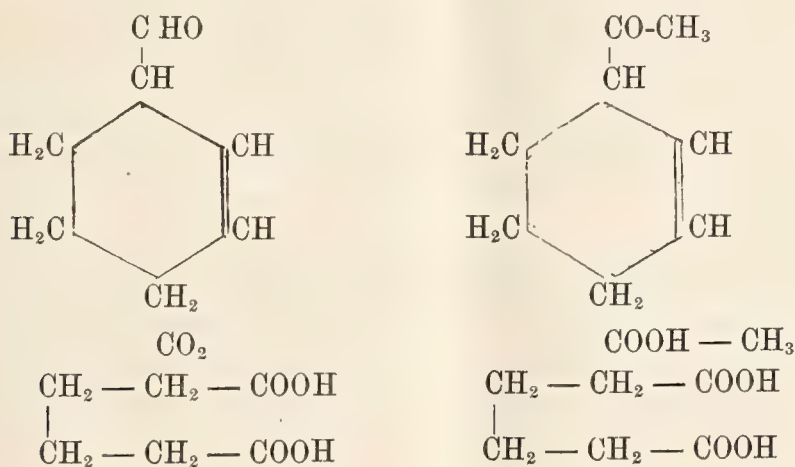
I.

Cercando dei fatti che venissero ad appoggiare una tale ipotesi abbiamo incominciato collo studio del cosidetto *granatale* ($C_8H_{12}O$), il quale è nella serie granatanica il composto che corrisponde al *tropilene* ($C_7H_{10}O$). Le ri-

cerche del Merling rendono, come si sa, assai probabile che questa interessante sostanza non sia che l'aldeide *tetraidrobenzoica* ($C_6H_9 . CHO$). Per analogia noi abbiamo sempre supposto essere il granatal l'*aldeide tetraidrofenilacetica*, oppure il *tetraidroacetofenone*:

$$C_6H_9 . CH_2 . CHO \qquad \text{oppure} \qquad C_6H_9 . CO . CH_3 .$$

Finora però tutte queste relazioni non erano state sufficientemente provate, neppure quelle riguardanti la natura del tropilene. Merling [1] non riuscì a trasformarlo in un composto aromatico, ed il Ladenburg [2], che l'ottenne pel primo dalla tropidina e lo ossidò con acido nitrico, non potè contribuire a svelarne la costituzione, non essendo egli riuscito a riconoscere quella dell'acido $C_6H_{10}O_4$, che per tale processo si origina. Noi crediamo di essere stati più fortunati. Sottoponendo il granatale ed il tropilene all'azione ossidante del permanganato potassico al 2 per cento, abbiamo ottenuto in entrambi i casi lo stesso acido, della formola $C_6H_{10}O_4$, il quale s'è dimostrato identico all'*acido adipico normale*. Le nostre esperienze confermano quindi una supposizione del Merling, che aveva preveduto la formazione di quest'acido dal tropilene. Accettando la formola che questo autore attribuisce al tropilene, e tenendo conto dei fatti da noi osservati a proposito del granatale, crediamo che quest'ultimo sia da considerarsi meglio come un tetraidroacetofenone che come un'aldeide tetraidrofenilacetica. La sua trasformazione in acido adipico riesce in questo modo più facile ad intendersi.

```
        C HO                          CO-CH3
         |                              |
         CH                             CH
H2C /        \ CH             H2C /        \ CH
   |          ||                 |          ||
H2C \        / CH             H2C \        / CH
        CH2                            CH2
        CO2                        COOH — CH3
CH2 — CH2 — COOH              CH2 — CH2 — COOH
 |                             |
CH2 — CH2 — COOH              CH2 — CH2 — COOH
```

Noteremo per ultimo che per la forma acetonica del così detto granatale parla anche il fatto, che mentre il tropilene, quale omologo ciclico di un'aldeide crotonica, ha un odore fra l'aromatico ed il pungente, manca totalmente quest'ultimo carattere al granatale; esso possiede un odore simile

(1) Berichte, vol. XXIV pag. 3116.
(2) Liebig's Annalen, vol. CCXVII, pag. 138.

a quello del tropilene, ma che non ha più nulla di pungente. Sarà forse più opportuno dare al granatale il nome, più conforme alla sua natura, di *diidro-granatone*.

II.

La formazione di acido adipico da un derivato della granatanina è un fatto che da solo non prova ancor nulla in favore della nostra formola. Era necessario perciò trovare argomenti più stringenti, e quale nuovo punto di confronto ci parve opportuno l'altro composto non azotato, da noi ottenuto dalla metilgranatonina, il già citato granatone.

Dagli alcaloidi tropinici non era stato ancora ottenuto un composto corrispondente al granatone, perchè in questa serie non si conosce ancora l'omologo inferiore della metilgranatonina, il chetone che corrisponde alla tropina. Accettando le nostre formole e le relazioni che esse esprimono era da prevedersi che il jodometilato del chetone della tropina dovesse scindersi cogli alcali in dimetilammina ed aldeide diidrobenzoica.

Il jodometilato della metilgranatonina dà, come è noto, dimetilammina e diidroacetofenone. Si trattava dunque anzitutto di compiere la serie degli alcaloidi tropinici, ed anche questa volta la soluzione del problema non è stata difficile. Dopo esserci assicurati che la metilgranatolina può essere trasformata, almeno parzialmente, in metilgranatonina, ossidandola con quella miscela cromica, con cui Beckmann [1] in altri casi riuscì ad effettuare il passaggio dagli alcooli ciclici secondarî ai corrispondenti chetoni, abbiamo sottoposto la tropina allo stesso trattamento, ed abbiamo ottenuto, con ottimo rendimento, il chetone cercato. Esso è un bell' alcaloide solido, che fonde a 42°, mentre la tropina fonde a 62-63°. Esso è assai più volatile di quest'ultima ed è deliquescente. La sua ossima, che si ottiene come la metilgranatoninossima, fonde a 118°-120°.

Ma qui, prima di procedere oltre, ci sembra opportuno intercalare una questione di nomenclatura, dovendo dare un nome al nuovo alcaloide da noi trovato. I nomi attualmente in uso per designare gli alcaloidi della tropina sono assai poco appropriati, e noi crediamo di non mancare di deferenza agli illustri chimici, che ci hanno preceduto in questo campo, se proponiamo di mutarli per metterli in relazione con quelli della serie granatanica [2]. Il vantaggio di porre in rilievo la perfetta corrispondenza di queste due importanti serie di sostanze emergerà, come speriamo, da quanto diremo in fine di questa

(1) Liebig's Annalen, vol. CCL, pag. 325.

(2) Alle volte le questioni di nomenclatura riescono spinose; così l'avere dovuto mutare nome alla pseudopelletierina ci attirò le ire dell'egregio scopritore degli alcaloidi del melagrano, il sig. Tanret (Bul. de la société chim. de Paris (3), XI, pag. 422), al quale però non crediamo di dovere rispondere, dolenti di non poterlo contentare. Speriamo d'essere più fortunati questa volta.

Nota. Ma anche i nomi da noi proposti due anni or sono per gli alcaloidi del melagrano vanno leggermente emendati. La nostra nomenclatura parte dalla pseudopelletierina, che è base terziaria per un metile imminico, e ne viene perciò di conseguenza che i nomi di tutte le basi secondarie da noi descritte sono preceduti dalla particella « *nor* », che certo sarebbe utile eliminare. Noi proponiamo ora di prendere quali composti fondamentali le due basi sature, non ossigenate, secondarie, cioè la norgranatanina da un lato, e la noridrotropidina dall'altro. A questi due composti esaciclici binucleari a 8 e rispettivamente 9 termini diamo i nomi di *granatanina* e *tropanina;* gli altri vengono di conseguenza nel modo qui indicato:

Granatanina	$C_8H_{14}NH$	*Tropanina*	$C_7H_{12}NH$ (Noridrotropidina)
Granatenina	$C_8H_{12}NH$	*Tropenina* (*)	$C_7H_{10}NH$?
Granatonina (*)	$C_8H_{12}ONH$?	*Troponina* (*)	$C_7H_{10}ONH$?
Granatolina	$C_8H_{13}(OH)NH$	*Tropolina*	$C_7H_{11}(OH)NH$ (Tropigenina)
n-Metilgranatanina	$C_8H_{14}NCH_3$	*n-Metiltropanina*	$C_7H_{12}NCH_3$ (Idrotropidina)
n-Metilgranatenina	$C_8H_{12}NCH_3$	*n-Metiltropenina*	$C_7H_{10}NCH_3$ (Tropidina)
n-Metilgranatonina (**)	$C_8H_{12}ONCH_3$	*n-Metiltroponina*	$C_7H_{10}ONCH_3$ —
n-Metilgranatolina	$C_8H_{13}(OH)NCH_3$	*n-Metiltropolina*	$C_7H_{11}(OH)NH_3$ (Tropina)

Va da sè che in modo corrispondente sono da chiamarsi anche i derivati della *ecgonina*, la quale ad es. sarebbe da dirsi *acido m-metiltropolincarbonico.*

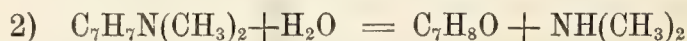
Il jodometilato di metiltroponina (joduro di dimetiltroponinammonio) si comporta, come avevamo preveduto, analogamente a quello della metilgranatonina; se lo si riscalda con un' alcali caustico, si scompone profondamente con sviluppo di dimetilammina. Però, mentre è facile ottenere col jodometilato di metilgranatonina una scissione netta, p. es. distillandolo con barite, abbiamo trovato che quello della metiltroponina viene trasformato dagli alcali caustici, ed anche dalla barite in una materia catramosa brunastra. Così pure il corrispondente idrato, ottenuto coll'ossido d'argento, non dà che assai incompletamente la scomposizione voluta. Questa si ottiene invece in modo più soddisfacente impiegando il bicarbonato sodico. Distillando il jodometilato impastato con bicarbonato sodico mediante una conveniente quantità di acqua, passa un liquido acquoso in cui sono sospese delle goccioline oleose d'un odore irritantissimo, pungente, che però nello stesso tempo ricorda quello delle mandorle amare. La soluzione acquosa contiene in quantità abbondante la *dimetilammina*, e l'olio, che si separa con etere dalla soluzione acidificata, ha la composizione e la proprietà dell'*aldeide didrobenzoica.* Esso riduce prontamente una soluzione di nitrato d'argento ammoniacale, e distilla, a 14 mm. di pressione, a 70-72°; a 124 mm. bolle a 120-122°. È da notarsi però che

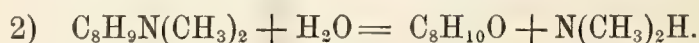
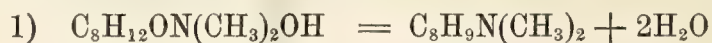
(*) Gli alcaloidi segnati coll'asterisco non sono stati ancora preparati.
(**) Pseudopelletierina.

anche operando col bicarbonato sodico, gran parte del prodotto si resinifica, e si converte in un olio denso e catramoso; evidentemente, forse anche per la natura del composto che si genera, la reazione è più delicata, e dà perciò rendimenti meno buoni, che nel caso della metilgranatonina; però anche il jodometilato di questa base si resinifica in gran parte colla potassa, mentre dà colla barite risultati migliori. Diciamo tutto ciò per fare intendere che la scissione, tanto coll'uno che con l'altro dei due jodometilati, è in fine della stessa indole. È probabile che l'aldeide da noi ottenuta sia identica a quella descritta da Eichengrün ed Einhorn [1], che l'ebbero per decomposizione del bibromuro di anidroecgonina con carbonato sodico. Il prodotto descritto da questi autori bolle, a 120 mm., a 121-122°.

Per ora non crediamo opportuno cercare di dare una esauriente spiegazione del complicato processo per cui dalla metiltroponina e dalla metilgranatonina si generano rispettivamente l'aldeide diidrobenzoica ed il diidroacetofenone. Noi crediamo che queste reazioni sieno da interpretarsi in modo analogo alla scissione del bibromuro di anidroecgonina [2] (acido n-metilbibromotropanincarbonico), e mentre ci riserbiamo in proposito uno studio ulteriore, vogliamo colle seguenti equazioni indicare schematicamente l'andamento dei due processi.

Pel jodometilato o idrato di metiltroponina si avrebbero le due fasi:

$$1)\quad C_7H_{10}ON(CH_3)_2OH = C_7H_7N(CH_3)_2 + 2H_2O$$
$$2)\quad C_7H_7N(CH_3)_2 + H_2O = C_7H_8O + NH(CH_3)_2$$

ed analogamente pel jodometilato o idrato di metilgranatonina:

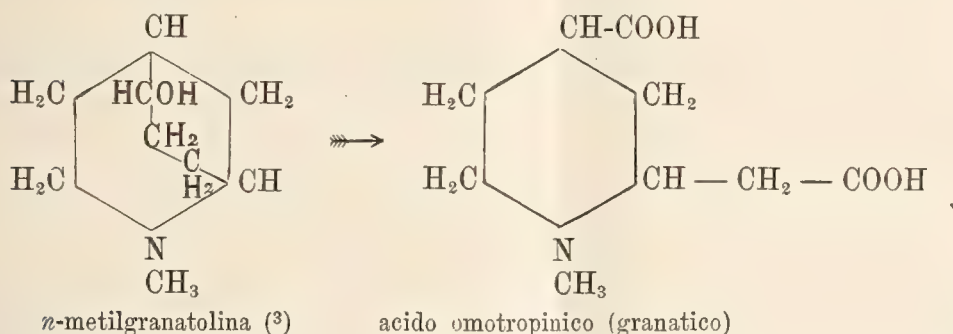
$$1)\quad C_8H_{12}ON(CH_3)_2OH = C_8H_9N(CH_3)_2 + 2H_2O$$
$$2)\quad C_8H_9N(CH_3)_2 + H_2O = C_8H_{10}O + N(CH_3)_2H.$$

I fatti esposti permettono però già ora di trarre delle conclusioni che per noi sono di qualche interesse. Secondo la nostra ipotesi, si deve ammettere che nella granatanina l'anello esametilenico sia intrecciato con quello piperidinico in posizione *meta*, e che perciò quando quest'ultimo si apre resti al primo una catena laterale formata da due atomi di carbonio: così si genera dalla metilgranatonina il diidroacetofenone. Era perciò da vedersi se, in una reazione perfettamente analoga, dalla metiltroponina, in cui è provato che i due anelli si compenetrano in posizione *para*, si ottenesse un derivato idrogenato del benzolo conosciuto, con una catena laterale costituita da un solo atomo di carbonio. E questo avviene realmente, perchè, come abbiamo ora esposto, si forma la didrobenzaldeide. La premessa è stata quindi confermata dall'esperienza.

(1) Berichte, XXIII, pag. 2880.
(2) Vedi Einhorn, Berichte, XXVI, pag. 451.

III.

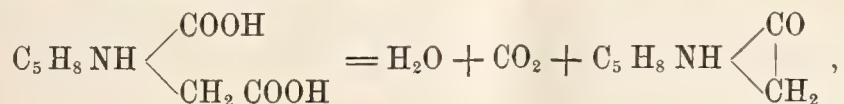
La prova più decisiva per la nostra formola era però da attendersi dalla ossidazione. Si sa dalle ricerche di Merling ([1]) che la tropina dà per ossidazione un acido bibasico, chiamato tropinico, che secondo questo autore è da considerarsi come un *acido n-metilpiperidindicarbonico*. Sebbene una prova diretta dell'esattezza di questa interpretazione non sia stata ancor data, pure le recenti ricerche di Willstätter ([2]) la rendono oltremodo probabile.

Se la tropina dà l'acido n-metilpiperidindicarbonico, evidentemente, secondo la nostra ipotesi, la corrispondente n-metilgranatolina deve dare un *acido n-metilpiperidincarbonacetico*,

CH		CH-COOH
H_2C HCOH CH_2 / CH_2 / C / H_2	⟶	H_2C CH_2
H_2C CH		H_2C $CH — CH_2 — COOH$
N / CH_3		N / CH_3
n-metilgranatolina ([3])		acido omotropinico (granatico)

ammettendo che l'ossidrile sia unito ad uno dei tre atomi di carbonio che costituiscono il così detto « *ponte* » dei chimici tedeschi.

E questo avviene realmente. Ossidando la metilgranatolina con acido cromico in soluzione solforica, si ottiene, sebbene con maggiori difficoltà che nel caso della tropina, un acido della suindicata composizione, $C_9H_{15}NO_4$, che per le sue proprietà ricorda assai da vicino l'acido tropinico, di cui è l'omologo superiore. Noi lo chiameremo *acido omotropinico*, oppure *acido granatico*. Esso si scompone verso i 240-245° con sviluppo gassoso, e dà un bel cloroaurato, che fonde a 190°.

Noi crediamo che la troponina potrà ottenersi dall'acido 3-5-piperidincarbonacetico per eliminazione d'acqua e di anidride carbonica:

$$C_5H_8NH\left\langle\begin{matrix}COOH\\ CH_2\,COOH\end{matrix}\right. = H_2O + CO_2 + C_5H_8NH\left\langle\begin{matrix}CO\\ |\\ CH_2\end{matrix}\right. ,$$

([1]) Liebig's Annalen, vol. CCXVI, pag. 348.

([2]) Berichte, vol. XXVIII, pag. 2277 e 3271.

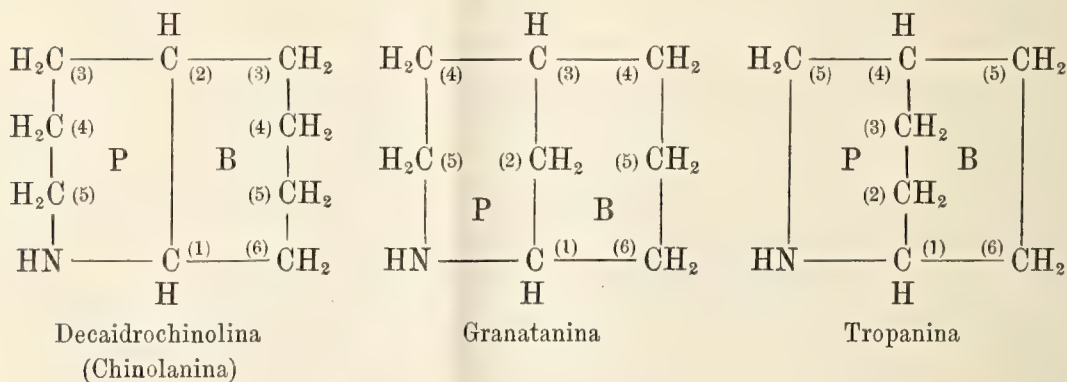
([3]) In questa formola è arbitraria soltanto la posizione dell'ossidrile; esso però non può occupare che uno dei tre posti 2, 3 o 4 (ossia 4, 5 o 6; vedi il capitolo seguente). Noi abbiamo ragione di preferire quella indicata dalla figura.

la granatonina potrà ottenersi analogamente da un acido piperidincarbonpropionico o da un acido piperidindiacetico.

Noi ci riserbiamo di fare delle esperienze in proposito.

IV.

La granatanina, la di cui costituzione noi riteniamo ora sufficientemente provata, viene, come si vede, a colmare una importante lacuna nella serie dei composti esaciclici binucleari; essa sta fra la tropanina e la decaidrochinolina, preparata da Bamberger e Lengfeld ([1]). Quest'ultima base ha, come è noto, proprietà completamente piperidiniche, come la granatanina e la tropanina, di cui è l'omologo nucleare più elevato.

Per mettere bene in evidenza queste relazioni, giovano meglio le seguenti formole, che, bene inteso, non hanno nulla di essenzialmente diverso da quelle fin qui usate in questa Nota; il così detto « *ponte* », invece d'essere scritto entro l'anello piridico, si trova in certo modo spostato di 180°, sul piano del disegno.

In questa guisa però le formole della granatanina e della tropanina (quella della tetraidrochinolina è la solita) perdono quel certo che di artificioso, che sembrano contenere se scritte nel modo ordinario. Si tratta semplicemente della congiunzione di due anelli esatomici nelle tre posizioni *orto*, *meta* e *para*, aventi in comune due, tre o quattro atomi di carbonio.

La concatenazione di due anelli esatomici *aromatici* (come anche di quelli pentatomici) non può, a quanto sembra, avvenire che nella posizione ' *orto* ', di cui sono noti esempî la chinolina e la naftalina. Quando però quel complesso speciale di legami, che determina il carattere aromatico è rotto, qualunque intreccio diventa possibile. Questi nuclei condensati costituiscono altrettanti composti fondamentali come il cicloesano e la piperidina.

([1]) Berichte, XXIII, pag. 1145.

Geodesia. — *Sopra un punto della teoria di Laplace relativa alla figura di equilibrio di una massa fluida rotante.* Nota di Paolo Pizzetti, presentata dal Socio Beltrami.

1. Consideriamo una massa animata da un moto di rotazione uniforme attorno ad un asse, e terminata da una superficie poco diversa da una sfera. Laplace ha dimostrato (*Méc. cél.*, livre III^e) che la superficie esteriore di una tal massa, supposta in equilibrio relativo deve, in un determinato ordine di approssimazione, essere quella di un ellissoide di rotazione in uno di questi casi:

1° che la massa sia omogenea, e sia o tutta fluida o fluida soltanto in superficie,

2° che la massa sia fluida e non omogenea, in guisa che la densità diminuisca in modo continuo dal centro alla superficie e che le superficie di egual densità siano poco diverse da sfere concentriche.

Nei calcoli di Laplace, vengono considerati come termini piccoli quelli che contengono a fattori gli scostamenti fra la superficie e la sfera, ovvero il quadrato della velocità angolare, e sono trascurati, rispetto a questi, i termini piccoli del 2° ordine almeno.

Pel 1° caso, ossia per la massa omogenea, si hanno, oltre le due dimostrazioni di Laplace, una dimostrazione di Liouville e un'altra di Poisson, le quali nulla lasciano a desiderare. Ma pel 2° caso, ossia per la massa fluida eterogenea, l'unica dimostrazione data da Laplace si fonda sull'uso delle funzioni sferiche ed è soggetta alla seguente gravissima obbiezione: la funzione potenziale dell'attrazione esercitata dalla massa sopra un punto interno M viene espressa da Laplace come somma di due sviluppi per funzioni sferiche; uno di questi procede secondo le potenze negative del raggio vettore r di M e serve ad esprimere la f. p. di quella porzione di massa, che è interna alla superficie S di equilibrio passante per M; l'altro sviluppo, procedente secondo le potenze positive di r, esprime la f. p. della restante porzione della massa. Affinchè il primo di questi sviluppi fosse legittimo, sarebbe evidentemente necessario che r fosse *non minore* dei raggi vettori dei varî punti della S; e *non maggiore* di tali raggi vettori dovrebbe essere r perchè fosse legittimo l'uso del secondo sviluppo. Queste condizioni non sono evidentemente verificate [1].

[1] Obbiezioni di tal sorta agli sviluppi di Laplace si trovano p. es. in Helmert, *Höhere Geodäsie*, Bd. 2, s. 135, e in Tisserand, *Mécanique céleste*, t^e. II^e, p. 317.

Siccome, per quanto sappiamo, nessun'altra dimostrazione è stata sostituita a quella di Laplace, così è interessante, e ci proponiamo di farlo qui, di tentare una parziale modificazione dei calcoli di Laplace, in guisa da evitare la ora detta obbiezione.

1. Indichiamo con r il raggio vettore di un punto qualsiasi M rispetto ad una origine collocata sull'asse t di rotazione, μ sia il coseno dell'angolo che r fa coll'asse stesso, ψ l'angolo che il piano rt fa con un piano fisso passante per t. Sia poi V la funzione potenziale dell'attrazione di tutta la massa sul punto M, ω la velocità angolare, e si indichi con W il valore che assume nel punto M la somma

$$fV + \frac{1}{2}\omega^2(1-\mu^2)r^2. \tag{1}$$

Le superficie d'equilibrio saranno rappresentate dall'equazione

$$W = \text{costante}$$

e la densità ϱ dovrà, per l'equilibrio della massa fluida, essere funzione di W soltanto. Assumiamo come variabile ausiliaria la quantità a funzione della sola W e legata a questa dall'equazione

$$W = \frac{4\pi f}{a}\int_0^a \varrho . a^2 . da + 4\pi f \int_a^A \varrho . a . da \tag{2}$$

dove A è tale che per $a = A$, W assume quello speciale valore che le compete alla superficie esterna del fluido. Pei punti esterni alla massa, ossia per $a > A$, si ha $\varrho = 0$ e alla (2) deve sostituirsi la seguente:

$$W = \frac{4\pi f}{a}\int_0^A \varrho\, a^2\, da . \tag{2'}$$

È facile vedere che tanto a quanto la sua derivata prima rispetto a W, variano in modo continuo con W.

Se la velocità di rotazione fosse nulla, se le superficie di egual densità fossero sfere concentriche, e se fosse A il raggio della sfera limite, la formola (2) darebbe il valore della funzione (1) per ogni punto distante di a dall'origine. È quindi naturale, nel caso nostro, di esprimere il raggio vettore r di un punto M, nel quale la espressione (1) assume il valore W, colla formola

$$r = a(1 + \alpha s) \tag{3}$$

dove s è funzione finita di a, μ, ψ ed α è una costante piccolissima, della quale trascureremo le potenze superiori alla prima.

Deriviamo parzialmente i due membri della (3) rispetto ad r, osser-

vando che, nel 2° membro, a è funzione di W e che questa è funzione di r, μ, ψ. Avremo

$$(4) \qquad 1 = \left(1 + \alpha s + a \alpha \frac{\partial s}{\partial a}\right) \frac{da}{dW} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} .$$

Ora ponendo $\int_0^a \varrho \, . \, a^2 \, . \, da = U$, dalla (2) otteniamo

$$\frac{dW}{da} = -\frac{4\pi f}{a^2} U .$$

Quindi la (4), a meno di termini in α^2, dà

$$(5) \qquad \frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{4\pi f}{a^2} U \left(1 - \alpha s - \alpha a \frac{\partial s}{\partial a}\right) .$$

3. Indichiamo, come d'uso, con P_n la funzione di Laplace dell'ordine n, ossia il coefficiente di r^n nello sviluppo di

$$\left[1 + r^2 - 2r\left(\mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\psi - \psi')\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Si ha, com'è noto:

$$(6) \qquad \Delta_2 (r^n P_n) = 0 .$$

Se ora nella formola di Green

$$\int (V \, . \, \Delta_2 U - U \, . \, \Delta_2 V) \, d\sigma = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) dS$$

poniamo $r^n P_n$ in luogo di V, e W in luogo di U, estendendo l'integrazione destra a tutta la superficie S di equilibrio passante per il punto M, e quindi l'integrazione a sinistra a tutto lo spazio σ racchiuso dalla S, avremo

$$(7) \qquad \int r^n P_n \, . \, \Delta_2 W \, . \, d\sigma = \int W \, . \frac{\partial}{\partial n} (r^n P_n) \, dS - \int r^n P_n \frac{\partial W}{\partial n} dS .$$

In questa formola dn indica l'elemento di normale interna alla S. Ora lungo la S si ha W = costante; sicchè il 1° integrale nel 2° membro della (7) si può scrivere

$$W \int \frac{\partial}{\partial n} (r^n P_n) \, dS = - W \int \Delta_2 (r^n P_n) \, d\sigma = 0$$

in virtù della (6). Osservando poi ancora che per la (1) si ha

$$\Delta_2 W = -4\pi f \varrho + 2\omega^2 ,$$

la (7) diverrà

$$(8) \qquad \int r^n P_n (2\omega^2 - 4\pi f \varrho) \, d\sigma = -\int r^n P_n \frac{\partial W}{\partial n} dS .$$

Ora si ha, a meno di quantità dell'ordine di α^2

$$r^n = a^n (1 + n s \alpha)$$

$$d\mathrm{S} = a^2 (1 + 2 \alpha s) d\mu \,.\, d\psi$$

$$d\sigma = r^2 \,.\, dr \,.\, d\mu \,.\, dv = a^2 \left(1 + 3 \alpha s + \alpha a \frac{\partial s}{\partial a}\right) da \,.\, d\mu \,.\, d\psi \,.$$

Osserviamo poi che si ha

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n} \cos (rn) \,;$$

e poichè $\cos (rn)$ differisce da -1 di quantità dell'ordine di α^2, potremo, nel nostro ordine di approssimazione, porre, ricordando la (5)

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n} = \frac{4 \pi f}{a^2} \mathrm{U} \left(1 - \alpha s - \alpha a \frac{\partial s}{\partial a}\right) .$$

Con queste sostituzioni la (8) diverrà finalmente

$$\int_0^a \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{P}_n (2 \omega^2 - 4 \pi f \varrho) a^{n+2} \left[1 + (n+3) \alpha s + a \alpha \frac{\partial s}{\partial a} \right] da \,.\, d\mu \,.\, d\psi$$

$$(9) \qquad = - 4 \pi f \mathrm{U} a^n \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{P}_n \left[1 + (n+1) \alpha s - a \alpha \frac{\partial s}{\partial a} \right] d\mu \,.\, d\psi \,.$$

Esprimiamo s per serie di funzioni sferiche, ossia poniamo

$$s = \sum_0^\infty \mathrm{Y}_n \,, \qquad r = a (1 + \alpha \mathrm{Y}_0 + \alpha \mathrm{Y}_1 + \alpha \mathrm{Y}_2 + \cdots) \qquad (10)$$

dove Y_n è funzione sferica, dell'ordine n, delle variabili μ e ψ, e, del resto, funzione qualsiasi di a.

Sostituendo nella (9) e ricordando che

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{P}_n \mathrm{Y}_m \,.\, d\mu \,.\, d\psi = \begin{cases} \text{zero} \,, & \text{per } n \gtrless m \\ \dfrac{4\pi}{2n+1} \mathrm{Y}_n \,, & \text{per } n = m \end{cases}$$

avremo per $n > 0$, sopprimendo un fattore comune $\dfrac{4\pi}{2n+1}$,

$$(11) \qquad \alpha \int_0^a (2 \omega^2 - 4 \pi f \varrho) \left[(n+3) a^{n+2} \mathrm{Y}_n + a^{n+3} \frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial a} \right] . \, da$$

$$= - 4 \pi f \alpha \mathrm{U} a^n \left[(n+1) \mathrm{Y}_n - a \frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial a} \right] .$$

Nell'ordine di approssimazione qui tenuto, il prodotto $\omega^2 \alpha$ è trascurabile, quindi la (11) può scriversi, con ovvie semplificazioni

$$\int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}\,Y_n)\,d\,a - a^n\left[(n+1)\,Y_n - a\frac{\partial Y_n}{\partial a}\right]U = 0\,. \tag{12}$$

Da questa derivando rispetto ad a e dividendo per $a^{n+1}\,U$,

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial a^2} + \frac{2\varrho a}{U}\left(Y_n + a\frac{\partial Y_n}{\partial a}\right) - \frac{n(n+1)}{a^2}\,Y_n = 0\,. \tag{13}$$

È questa l'equazione differenziale alla quale Laplace è pervenuto (*Méc. cél.* livre III^e, n. 29) partendo dai ricordati sviluppi, per funzioni sferiche, della funzione potenziale dell'attrazione sopra un punto interno alla massa.

Moltiplicando la (12) per a^{-2n-2} ed eseguendo la integrazione rispetto ad a, si può dare all'integrale questa forma

$$\int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{2-n}\,Y_n)\,.\,da + (2n+1)\,a^{-n-1}\,Y_n\,U - \tag{14}$$
$$- a^{-2n-1}\int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}\,Y_n)\,.\,da = c$$

dove c deve riguardarsi come funzione di μ e ψ. Indicando con A_n un'altra funzione di μ e ψ, si potrà anche porre la (14) sotto la forma

$$\int_a^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{2-n}\,Y_n)\,.\,da - (2n+1)\,a^{-n-1}\,Y_n\,U + \tag{15}$$
$$+ a^{-2n-1}\int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}\,Y_n)\,da = A_n\,.$$

Resta ora a determinare la A_n.

4. Consideriamo, a tale scopo, un punto M esteriore alla massa e tale che la sua distanza r dall'origine sia maggiore del massimo raggio vettore della superficie esterna della massa stessa. Per un tal punto sarà lecito esprimere la funzione potenziale V dell'attrazione collo sviluppo di Laplace procedente secondo le potenze negative di r. In tal modo si ottiene notoriamente:

$$V = \frac{M}{r} + 4\pi\alpha\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\,r^{n+1}}\int_0^A \varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}Y_n)\,.\,da \tag{16}$$

dove M è la massa totale. Quando ad r si sostituisca la sua espressione (10), la somma

$$fV + \frac{1}{2}\,\omega^2\,r^2\,(1-\mu^2)$$

deve risultare funzione della sola a. Vale a dire che nel solito ordine di approssimazione dev'essere

$$(17)\qquad \frac{M}{a}(1-\alpha Y_0-\alpha Y_1-\cdots)-\frac{1}{2f}\omega^2\mu^2a^2+$$
$$+4\pi\alpha\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n+1)a^{n+1}}\int_0^A\varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}Y_n)\,da=F(a).$$

Osservando che, nei termini moltiplicati per α si può sostituire al posto di M il prodotto

$$4\pi\int_0^A\varrho a^2\,da=4\pi\,U_1$$

ed eguagliando a zero, nella (17), le somme di funzioni sferiche di egual grado si ha, per $n>0$ e differente da 2,

$$(18)\qquad U_1Y_n-\frac{a^{n-1}}{2n+1}\int_0^A\varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}Y_n)\,da=0,$$

e per $n=2$:

$$(19)\qquad U_1Y_2-\frac{1}{5a^2}\int_0^A\varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^5Y_2)\,da=\frac{1}{8\pi f}\omega^2a^3\left(\frac{1}{3}-\mu^2\right).$$

Queste relazioni ci dànno modo di determinare A_n nel 2 membro delle (15). Se infatti le (15) si applicano al punto M esterno ora considerato, osservando che per $a>A$ si ha $\varrho=0$, e $U=U_1$, si ottiene

$$-(2n+1)a^{-n-1}Y_nU_1+a^{-2n-1}\int_0^A\varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}Y_n).\,da=A_n.$$

Paragonando questa colle (18) (19) si vede che per $n>0$ e diverso da 2 si ha $A_n=0$, e per $n=2$, $\quad A_2=-\frac{5\omega^2}{8\pi f}\left(\frac{1}{3}-\mu^2\right)$.

Sicchè finalmente la (15) si scinde nelle due seguenti:

$$(20)\qquad \int_a^A\varrho\frac{\partial Y_2}{\partial a}da-\frac{5}{a^3}Y_2U+\frac{1}{a^5}\int_0^a\varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^5Y_2)\,da=\frac{5\omega^2}{8\pi f}\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right).$$

$$(21)\qquad \int_a^A\varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^{2-n}Y_n)da-(2n+1)a^{-n-1}Y_nU+a^{-2n-1}\int_0^a\varrho\frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3}Y_n)da=0$$

per $n>0$ e diverso da 2.

Queste equazioni, nella teoria di Laplace, direttamente si deducono dagli sviluppi esprimenti la f. p. dell'attrazione per un punto qualunque *interno* alla massa. Da esse si parte per dimostrare che, per n maggiore di zero e differente da 2, dev'essere $Y_n=0$, e che Y_2 deve essere della forma $h\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$ dove h è funzione di a soltanto; il che dimostra, nel nostro

ordine di approssimazione, che le superficie di equilibrio sono ellissoidi di rivoluzione aventi per asse l'asse t di rotazione. Le dette equazioni, essendo ora dedotte, in modo non soggetto alle obbiezioni mosse al metodo di Laplace, rimandiamo il lettore, per il seguito della dimostrazione, o al libro III già citato della *Méc. cél.*, ovvero alla esposizione che della teoria di Laplace ha dato il sig. Tisserand nel cap. XVIII del II vol. del suo *Traité de Mécanique céleste*. Le nostre equazioni (12) (13) (20) (21) corrispondono rispettivamente alle (49) (D) (B) (A) di Tisserand.

5. Aggiungeremo che all'equazione differenziale (13) si può direttamente pervenire in un altro modo abbastanza semplice. Nella formola

$$(22) \qquad \Delta_2 W = -4\pi f \varrho + 2\omega^2$$

pongasi per $\Delta_2 W$ la sua espressione in coordinate polari

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial W}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2}.$$

In modo analogo a quello tenuto per dedurre la formola (5), si calcolino, derivando successivamente la (3), le espressioni di $\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$, $\frac{\partial W}{\partial \mu}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \mu^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2}$ e si sostituiscano nella (23). La (22) diverrà così, trascurando sempre le quantità dell'ordine di α^2, eseguendo alcune riduzioni e dividendo per f,

$$\frac{\omega^2}{2f} = 2\varrho'\alpha\left(s + a\frac{\partial s}{\partial a}\right) + \frac{\alpha}{a} U \frac{\partial^2 s}{\partial a^2} -$$
$$-\frac{2\mu\alpha}{a^3} U \frac{\partial s}{\partial \mu} + \frac{1-\mu^2}{a^3} U \frac{\partial^2 s}{\partial \mu^2} + \frac{1}{a^3(1-\mu^2)} U \frac{\partial^2 s}{\partial \psi^2}.$$

Sostituendo ora ad s il suo sviluppo ΣY_n, ricordando che una funzione sferica dell'ordine n soddisfa all'equazione

$$n(n+1) Y_n + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial \psi^2} = 0,$$

ed eguagliando a zero la somma delle funzioni sferiche di egual grado, si ricade nella (13), per $n > 0$.

6. La nostra deduzione della formola (12) suppone in realtà che non solo siano piccolissimi gli scostamenti lineari fra le superficie S di equilibrio e le sfere di un sistema concentrico, ma che anche gli angoli (nr) fra le normali ed i raggi vettori siano quantità piccole i cui quadrati si possano trascurare. Ciò equivale a supporre che oltrechè la funzione αs, anche le sue derivate $\alpha\frac{\partial s}{\partial \mu}$, $\alpha\frac{\partial s}{\partial \psi}$ assumano ovunque valori tanto piccoli, da potersene trascurare i quadrati.

La nostra dimostrazione cadrebbe dunque in difetto, quando le effettive superficie d'equilibrio fossero accidentate in guisa da presentare *ondulazioni*, delle quali l'estensione superficiale non fosse molto grande di fronte all'altezza loro. Ma è da osservare che anche la deduzione di Laplace, di dubbia legittimità in ogni caso, è, in questa ipotesi delle superficie ondulate, assolutamente inaccettabile. Giacchè non vi ha alcun ragionamento che possa giustificare l'applicazione degli sviluppi di Laplace pel calcolo, sia pure approssimato, della f. p. dell'attrazione sui punti che occupano le regioni più basse delle supposte ondulazioni.

Fisica. — *Ricerche sui raggi di Röntgen.* Nota preliminare dei dott. A. Sella e Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna [1].

1. I signori Benoist e Hurmuzescu a Parigi ed il prof. Righi a Bologna hanno mostrato che i raggi Röntgen godono della proprietà di scaricare i corpi elettrizzati. Guidati dall'analogia dei raggi Röntgen colle radiazioni ultraviolette, per quanto riguarda l'azione fosfogenica e fotografica, noi avevamo iniziato delle ricerche in questa direzione, ma ora che la detta proprietà è stata da più parti scoperta e resa di pubblica ragione, non staremo a riferire le esperienze che la dimostrano e che sono d'altronde assai facili a riprodursi.

Questa nuova proprietà dei raggi Röntgen ha una portata molto grande, quella cioè di fornire un mezzo assai delicato e sensibile per determinare l'intensità delle radiazioni, immensamente superiore per precisione all'apprezzamento della fluorescenza e della posa fotografica. Ed è precisamente con questo mezzo, che abbiamo intrapreso le nostre ricerche, di cui ora esponiamo i primi risultati.

Un elettrometro Mascart veniva posto in una cassa di lastra di zinco robusta in comunicazione col suolo, per eliminare sia le azioni elettrostatiche interne, sia il passaggio dei raggi Röntgen. Una parete laterale della cassa portava una finestra quadrata ricoperta da una sottile lastra d'alluminio, la quale mantenendo uno schermo assoluto contro azioni elettrostatiche permetteva il passaggio dei raggi Röntgen in un punto determinato.

All'interno, poco discosta dalla lastra d'alluminio, era disposta una lastra metallica in comunicazione coll'ago dell'elettrometro. I tubi di Crookes da noi adoperati erano della forma raccomandata dal prof. Blaserna nella sua comunicazione a questa Accademia; cioè quella che nei cataloghi va col numero 9, a guisa di pera, essendo catodo un disco di alluminio normale all'asse, anodo la croce, ovvero un'altro disco di alluminio paralleli all'asse.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico dell'Università di Roma.

I tubi, ove occorreva, furono rievacuati in questo Istituto fisico con una buona pompa a mercurio Alvergniat sino a pochi micron di mercurio, avendo per criterio della loro bontà sia l'azione fosfogenica, sia poi più semplicemente la distanza esplosiva nell'aria in un circuito in derivazione, mentre funzionava il rocchetto d'induzione.

2. Colla descritta disposizione ci ponemmo subito a ricercare, se i raggi Röntgen sono capaci di riflettersi. Il tubo veniva disposto orizzontale parallelamente alla finestra e di fianco, in modo da ridurne per quanto possibile l'azione diretta. Poi si poneva a circa 45° sulla finestra e sull'asse del tubo lo schermo, che doveva funzionare da specchio. Le misure si facevano per differenza, misurando cioè la velocità di scarica dell'elettrometro, quando c'era o no lo schermo. Come risultato ebbimo un'azione di riflessione molto netta per schermi di zinco, ottone, argento, stagnola, ma in misura poco ed incertamente diversa dall'uno all'altro; così pare non influisca lo stato superficiale del metallo. Il vetro ed il legno non ci diedero una riflessione sensibile.

Traccie di riflessione erano già state notate dal Röntgen stesso; poi il fatto venne da chi confermato, come p. e. dai prof. Battelli e Garbasso, e da chi contraddetto; le nostre osservazioni non lasciano alcun dubbio in proposito.

3. Avendo notato che quando il fondo del tubo, su cui battono i raggi catodici, emette raggi di Röntgen intensi, esso si elettrizza fortemente, rivolgemmo tutta la nostra attenzione sovra questo fenomeno, per scoprire se esso fosse di natura secondaria ovvero essenziale. Furono eseguite in proposito le seguenti esperienze.

a) Ricoprendo la parete radiante con un foglio di stagnola ben aderente o meglio argentandola, le radiazioni non vengono impedite; ricoprendo il velo di argento con uno strato sempre più spesso di rame, le radiazioni vanno mano a mano diminuendo.

b) Ponendo il rivestimento metallico in comunicazione con un'armatura di una boccia di Leida essendo l'altra a suolo, ovvero direttamente col suolo, l'intensità delle radiazioni viene notevolmente diminuita e talvolta quasi distrutta; e bisogna tenere presente che una lamina di stagnola, se non è a contatto col vetro, si comporta come un corpo trasparente sia se isolata, sia se al suolo.

Per discutere il significato di queste esperienze conviene però ricordare che se si pone una porzione del vetro del tubo al suolo, si altera la distribuzione per così dire della carica nel tubo stesso, generando nuove sorgenti di raggi catodici ecc. L'esperienza *b*) si può facilmente ripetere coll'aiuto di un disco fluorescente.

4. Constatammo il fatto osservato dal Righi, che i raggi Röntgen oltre allo scaricare con velocità sensibilmente eguale corpi elettrizzati sia negativamente sia positivamente, caricano di elettricità positiva un conduttore scarico,

p. e. carbone di storta o rame, quando operavamo col metodo Righi, cioè ponendo rocchetto e tubo Crookes nell'interno di una cassa a pareti di piombo avente una finestra di alluminio. Operando invece colla nostra disposizione prima descritta, ottenemmo dei fenomeni molto complessi; il carbone di storta si carica positivamente, il rame negativamente; lo zinco si carica diversamente a seconda della distanza dalla finestra; e, quello che è più interessante, si ottenevano talvolta cariche di segno opposto rovesciando il senso della scarica nel tubo Crookes; p. e. con raggi catodici si aveva ad una determinata distanza e collo zinco, elettrizzazione negativa e positiva coi raggi per così dire anodici. Stiamo ora studiando dettagliatamente gli effetti osservati per eliminare le azioni secondarie e perturbatrici.

Fisica. — *Sulla dipendenza della conducibilità elettrica delle fiamme dalla natura degli elettrodi* (1). Nota del dott. P. Pettinelli, presentata dal Socio Blaserna.

M. Becquerel nelle sue classiche ricerche sulla conducibilità dei gaz caldi trovò che se si scaldano al calor bianco un filo di platino dentro un tubo di platino, e si isolano bene l'uno dall'altro, la corrente passa più facilmente attraverso l'aria interposta fra il tubo ed il filo, se si collega il polo negativo della pila col tubo, vale a dire con la superficie metallica più estesa, che nel caso contrario (2).

Andrews aveva trovato precedentemente che la corrente di 20 coppie decomponeva dell'ioduro di potassio passando, da un filo di platino avviluppato dalla fiamma di una lampada d'Argant al tubo d'ottone saldato all'orifizio della lampada, se a questo era unito il polo negativo della pila; nel caso contrario la decomposizione non avveniva (3).

Avendo, con la collaborazione del sig. B. Marolli, cominciato una serie di ricerche sulla conducibilità dei gaz caldi, ho osservato alcuni fatti, che si collegano direttamente con quelli già noti e sopra citati, ma che per la loro spiccata singolarità e per le applicazioni, alle quali possono dar luogo, credo meritino d'esser conosciuti.

Se si prendono due asticelle di ferro ed alle estremità di queste si fissano con filo di ferro due cilindretti di carbone di legna, e si isolano bene le asticelle una dall'altra, affacciando le estremità libere dei carboni ad un centimetro di distanza dentro la fiamma di un bruciatore Bunsen, il gaz caldo

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Fisica del R. Istituto Tecnico Bordoni di Pavia.

(2) Annales de chimie et de phisique, 3a s., t. XXXIX, p. 355.

(3) De La Rive, *Traité d'électricité*. Paris 1856, tomo II. pag. 103.

interposto fra i carboni presenta una resistenza circa cinquecento volte più piccola di quella che presenterebbe se i cilindretti fossero di ferro.

Ho trovato che la resistenza elettrica presentata dalla fiamma di un bruciatore Bunsen interposta fra due lastre di carbone di legna, distanti l'una dall'altra di circa mezzo centimetro e di due centimetri quadrati di superficie ciascuna, era di circa trecentomila Ohm. Così adoperando un sensibile galvanometro ho potuto misurare correnti, che attraversavano la fiamma, di F. E inferiore a $\frac{1}{100}$ di Volta, e anche con queste piccole forze elettromotrici non ho riscontrato indizio di polarizzazione durante il pasaggio della corrente.

Se poi si adoperano due elettrodi, uno di carbone di legna e l'altro di ferro, e se si collega il polo negativo della pila coll'elettrodo di carbone di legna, la fiamma presenta alla corrente una resistenza relativamente piccola, come se tutti e due gli elettrodi fossero di carbone di legna; se invece si unisce il polo negativo con l'elettrodo di ferro, la resistenza offerta dalla fiamma è centinaia di volte più grande.

Così facendo passare attraverso tale conduttore una serie di correnti alternate, passano soltanto quelle dirette dal ferro al carbone. E siccome tale conduttore può essere facilmente improvisato e la sua resistenza può non superare i 100,000 Ohm, potrà servire in molti casi; per esempio in diverse circostanze il galvanometro, interponendo nel circuito questo conduttore, potrà sostituire l'elettrodinamometro.

Adoperando elettrodi di carbone di storta, di platino, ferro, rame, nickelio, la conducibilità delle fiamme è assai piccola e poco differente. Con due laminette di palladio, gentilmente favoritemi dall'illustre prof. Bartoli, ho trovato che la fiamma acquista una conducibilità circa dieci volte più grande che adoperando laminette di ferro. Peraltro nei primi istanti in cui la fiamma avviluppa le laminette di palladio si ha la maggiore conducibilità, che poi rapidamente diminuisce, riprendendo il valore di prima se si raffreddano e si lasciano un certo tempo in riposo le lamine.

Servendosi di lamine d'alluminio per elettrodi, appena queste si introducono nella fiamma, la conducibilità del gaz è piccola, ma quando alla temperatura di fusione si ricoprono di una pellicola, la conducibilità della fiamma è circa venti volte più grande, che adoperando elettrodi di ferro.

Con un elettrodo d'alluminio o di palladio e l'altro di ferro, si ha un comportamento analogo a quello osservato adoperando un elettrodo di carbone di legna e l'altro di ferro; soltanto la conducibilità della fiamma è circa 60 volte minore.

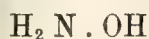
Riservo le considerazioni teoriche suggerite dall'esame di questi e di altri fenomeni a quando avremo completate le ricerche sulla conducibilità dei gaz caldi.

Chimica. — *Sull'azione del nitrato di etile sopra l'idrossilammina.* Nota di Angelo Angeli, presentata dal Socio G. Ciamician.

È noto da parecchio tempo che gli eteri organici

$$R \,.\, COOR\,,$$

possono reagire con l'idrossilammina

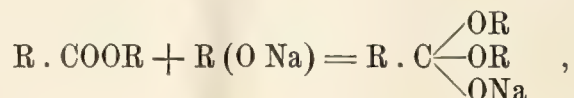
$$H_2N \,.\, OH$$

secondo l'equazione generale:

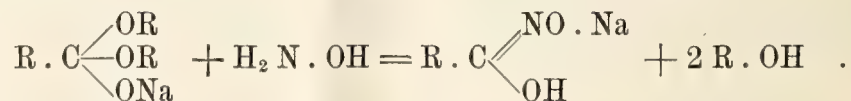
$$R \,.\, COOR + NH_2 \,.\, OH = R \,.\, CO \,.\, NH \,.\, OH + R \,.\, OH\,,$$

per dare origine a quella classe di composti che vengono chiamati *acidi ossammici*. A queste sostanze, analogamente a quanto vale per le ammidi, si possono attribuire due formole di struttura:

$$R \,.\, C \begin{cases} NOH \\ OH \end{cases} \quad \text{oppure} \quad R \,.\, C \begin{cases} NH \,.\, OH \\ O \end{cases} \,.$$

Siccome anche questa reazione generalmente si effettua in presenza degli alcoolati, è molto probabile, per quanto ho esposto in una mia precedente comunicazione, che in una prima fase si formi il composto di addizione

$$R \,.\, COOR + R(O\,Na) = R \,.\, C \begin{cases} OR \\ OR \\ ONa \end{cases} \,,$$

dal quale in una fase successiva per azione dell'idrossilammina, si eliminano due molecole di alcool con formazione dell'acido ossammico:

$$R \,.\, C \begin{cases} OR \\ OR \\ ONa \end{cases} + H_2N \,.\, OH = R \,.\, C \begin{cases} NO \,.\, Na \\ OH \end{cases} + 2\,R \,.\, OH \,.$$

A quanto io mi sappia, questa reazione è stata applicata finora solamente agli eteri degli acidi organici, ed ha naturalmente sempre condotto a derivati organici dell'idrossilammina; io ho tentato ora di estenderla anche agli eteri degli acidi minerali.

Sebbene le mie esperienze in questa direzione non sieno ancora molto inoltrate, tuttavia le ricerche eseguite lasciano intravedere che la reazione in parola è applicabile anche agli eteri inorganici, e che molto probabilmente

per questa nuova via si potrà pervenire ad una serie di acidi minerali contenenti il residuo dell'idrossilammina

$$—NH.OH\ .$$

Naturalmente, anche in questi casi, conviene operare per mezzo dell'idrossilammina libera. Siccome però la preparazione dell'idrossilammina libera se non è difficile, richiede tuttavia molte cautele e spesa di tempo; io ho preferito di impiegare la soluzione, che si ottiene per semplice trattamento del cloridrato di idrossilammina, con alcoolato sodico. Il cloruro sodico che tosto si forma viene separato per filtrazione. In tal modo si ha anche il vantaggio che si ottengono direttamente i sali dei composti.

La nuova reazione avviene con molta facilità impiegando p. e. il nitrato di etile

$$C_2H_5.O.NO_2\ .$$

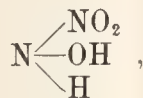
Alla soluzione alcoolica, piuttosto diluita, di due atomi di sodio, si aggiunge la soluzione pure alcoolica di una molecola di cloridrato di idrossilammina; si separa per filtrazione il cloruro di sodio, e la soluzione limpida ottenuta viene trattata con una molecola di nitrato di etile.

Il liquido, dapprima trasparente, poco a poco si intorbida, e dopo breve tempo lascia depositare un precipitato bianco che viene filtrato alla pompa e lavato con alcool.

Il sale sodico in tal modo ottenuto si presenta sotto forma di una polvere bianchissima, cristallina, molto solubile nell'acqua.

Per trattamento con gli acidi minerali, ed anche con l'acido acetico stesso, immediatamente si decompone con sviluppo tumultuoso di vapori rossi. Con nitrato d'argento dà un precipitato che al primo istante appare giallo, ma che poi subito annerisce con sviluppo gassoso.

È molto probabile che il nuovo composto, sia per il modo di formazione, come anche per il suo comportamento, sia il sale bisodico della *nitro-idrossilammina* od *ossinitrammite*,

$$N \begin{cases} NO_2 \\ OH \\ H \end{cases} ,$$

che ancora non si conosce.

Anche impiegando gli eteri dell'acido nitroso si ottiene un sale, il quale, probabilmente ha costituzione analoga. Il composto che in tal modo si ottiene, impiegando p. e. il nitrido d'amile, si presenta sotto forma di una polvere d'un bianco lievemente giallognolo; appena preparato esplode con violenza

per riscaldamento; fa effervescenza con gli acidi, e con nitrato d'argento dà un precipitato giallo, voluminoso che dopo breve tempo annerisce. L'iponitrito d'argento invece, come è noto, è un sale stabile e mantiene a lungo ed anche a caldo il suo colore giallo caratteristico.

Il sale sodico in parola è molto alterabile, e per azione dell'aria si converte in parte nel carbonato.

Io comunico con tutto riserbo questa Nota preliminare, allo scopo di riservarmi lo studio di queste nuove reazioni, nonchè la loro applicazione ad altri eteri degli acidi minerali ed ai derivati ammidati sia minerali come organici.

Fitochimica. — *Sopra la fermentazione delle olive e l'ossidazione dell'olio di oliva.* Nota di GIULIO TOLOMEI, presentata dal Socio BLASERNA.

Fra le diverse cause che contribuiscono a rendere cattivo l'olio di oliva di molte regioni d'Italia, la principale è senza dubbio la fermentazione delle olive, la quale viene praticata in quei luoghi in cui grande è l'estensione degli oliveti in confronto dei mezzi di raccolta e di manipolazione del frutto, ed in quelli in cui è radicata la credenza che colla fermentazione le olive diano una quantità d'olio superiore a quella che darebbero se fossero molite fresche.

Secondo taluni agronomi, con la fermentazione delle olive la resa si aumenta realmente, sebbene di poco, mentre si ottiene olio di pessima qualità; ma ormai è dimostrato da numerose esperienze che anche la resa diminuisce; e che debba essere così lo provano i fenomeni chimici che si producono durante la fermentazione, fenomeni poco o nulla conosciuti, dei quali mi propongo di parlare in questa Nota.

Per far fermentare le olive si ricorre nelle varie parti d'Italia a diversi metodi, i quali tutti, per altro, hanno per iscopo di tenerle bene in contatto le une con le altre, senza impedire totalmente l'accesso dell'aria negli interstizî rimasti fra esse, ossia di fare in modo che non vada disperso il calore che si sviluppa per certe azioni chimiche a cui va soggetto il loro contenuto. Così in Basilicata si rinchiudono, ben pigiate, in grandi sacchi entro i quali si lasciano fino al momento di frangerle; nella Maremma toscana si ammucchiano sul pavimento delle stanze, ed in Calabria si conservano entro vasche in muratura di diverse capacità, dette *zimbuni*, ed a più riprese si pigiano con un mazzapicchio, il quale non batte direttamente sulle olive, ma sopra bruscole fatte, in generale, di fettucce di castagno. In queste condizioni sono conservate perfino dei mesi, e durante questo tempo

si sviluppa in essa la fermentazione accompagnata da un notevole innalzamento di temperatura.

Le olive in fermentazione si presentano alla superficie dei sacchi, dei mucchi o delle vasche, intere, avvizzite e lucenti e non hanno alcun odore disgustoso pronunziato. Ma a misura che si scende nella massa si trovano contuse ed ammaccate sempre più, ed alla profondità di circa 50 cm. sono aderenti le une alle altre, hanno la polpa schiacciata, e formano una massa, più o meno pastosa, da cui emana un odore acuto, disgustoso che è proprio dell'olio d'oliva fabbricato nelle regioni sopra indicate.

Introducendo un termometro nella massa delle olive a diverse profondità si riscontra che fino a circa 10 cm. al disotto della superficie la temperatura è presso a poco quella dell'ambiente, ma al disotto va aumentando fino a circa 50 cm., dove si ha un massimo, per poi tornare a diminuire fino al fondo della vasca o della stanza in cui sono ammucchiate le olive. Di più nei primi giorni la temperatura cresce con una certa rapidità, ma poi va a mano a mano diminuendo quando la massa delle olive è abbandonata a sè.

In certi luoghi, quando non è possibile procedere subito alla molitura delle olive, appena si avverte il forte innalzamento di temperatura, si torna a battere ben bene la massa che cede facilmente essendosi nella fermentazione rammollita la polpa. In tal modo la fermentazione è disturbata e la temperatura si abbassa; ma in capo a qualche giorno torna ad innalzarsi lentamente.

La massima differenza trovata fra la temperatura delle olive e quella dell'ambiente non oltrepassa, almeno per quanto ho potuto riscontrare in tutte le determinazioni fatte fin qui, i 20° centigradi, e si ha ad una profondità di 35 a 50 cm.; al disotto è molto minore. Questo fatto ha grande importanza per la spiegazione che io do del fenomeno in questione.

Data la temperatura esterna che si ha in generale all'epoca della raccolta delle olive, la massima temperatura a cui sono portate quest' ultime durante la fermentazione oscilla fra i 35 ed i 40°.

L'olio ottenuto dalle olive fermentate conserva l'odore sgradevole di queste; ha un sapore bruciante, attacca la gola e riscaldato emana un odore molto disgustoso. Esso contiene inoltre una quantità di acido oleico che è circa quattro volte e mezzo quella contenuta nell'olio ottenuto dalle olive fresche, e col tempo, specialmente se lasciato in contatto dell'aria ed in ambienti dove la temperatura è piuttosto elevata, si altera profondamente

Ciò posto ecco quali sono i fatti che permettono di dare una spiegazione dei fenomeni sopra esposti.

***

Nella polpa delle olive mature è contenuto un fermento solubile ossidante, o enzima, la cui presenza può essere svelata per mezzo delle reazioni

caratteristiche che questi fermenti danno con la tintura di resina di guaiaco, con l'idrochinone e col pirogallolo. La prima reazione specialmente, che consiste nella produzione di una bella colorazione azzurra della tintura di resina di guaiaco in contatto della polpa delle olive mature, può essere verificata con grande facilità.

Riducendo in poltiglia la polpa delle olive, ponendola a macerare per qualche ora in una certa quantità d'acqua e filtrando, si ottiene un liquido di colore rosso-violaceo, che col tempo s'imbruna, il quale ha proprietà ossidanti molto energiche, dando una colorazione azzurra molto intensa con la tintura di resina di guaiaco, dei cristalli di porporogallina con l'acido pirogallico, del chinone e del chinidrone con l'idrochinone, ed infine una colorazione bruno-cupa con l'acido gallico. Se la polpa delle olive od il liquido ottenuto nel modo anzidetto sono stati scaldati per pochi minuti ad una temperatura di circa 75°, non si ha più nessuna di queste reazioni.

Questi fatti dimostrano che esiste nella polpa delle olive mature un fermento solubile ossidante la cui presenza, intraveduta dietro le osservazioni fatte sopra la fermentazione delle olive ed i fenomeni che l'accompagnano, non era ancora stata constatata per mezzo di reazioni che ne mettessero fuori di dubbio l'esistenza.

Per preparare una certa quantità dell'enzima in questione si estrae dalla polpa delle olive il succo che contiene, si tratta con alcool assoluto, si decanta il liquido soprastante ed il precipitato è ripreso con acqua distillata. Si filtra, ed il filtrato si raccoglie in circa cinque volte il suo volume di alcool assoluto, e si ottiene così un nuovo precipitato nel quale è contenuto l'enzima che si rivela con le reazioni sopra ricordate.

È a questo enzima ossidante che si deve la fermentazione delle olive, come lo provano i fatti seguenti.

Presa una certa quantità di olive raccolte in uno stesso giorno, le divisi in due parti eguali; una porzione la scaldai per circa tre quarti d'ora in una stufa a 75° e l'altra no; poi, non potendo lasciarle fermentare spontaneamente perchè in troppo piccola quantità, le misi in due cassette di legno che posi in una incubatrice, la cui temperatura fu mantenuta per otto giorni a 38°. In capo a due giorni la temperatura delle olive non scaldate era salita di 4° e dopo sei giorni di 7°,5 al disopra di quella dell'incubatrice, mentre non aveva variato affatto quella delle olive prima scaldate. Inoltre le prime presentavano l'aspetto ed avevano il puzzo speciale delle olive fermentate, mentre le altre furono tolte dalla cassetta nelle stesse condizioni in cui vi erano state poste. Da una metà di ciascuna porzione di olive fu estratto l'olio, e determinata in esso la quantità di acido oleico fu trovato che, mentre nelle olive scaldate a 75° la proporzione era di 0,978 per cento, nelle olive che avevano fermentato era di 3,265 per cento. Di più l'olio ottenuto da queste ultime aveva il sapore piccante e l'odore sgra-

devole di quello prodotto nelle regioni in cui ancora oggidì è in uso la fermentazione delle olive.

Della metà delle olive scaldate rimaste furono fatte due parti, delle quali una fu lasciata inalterata, mentre le olive dell'altra furono ammaccate in modo da romperne in parte la buccia e vi fu versata sopra dell'acqua contenente l'enzima ossidante ricavato da altre olive mature, rimestando ben bene la massa perchè tutte le olive venissero bagnate dal liquido, col quale furono lasciate in contatto per circa due ore. Poi, fattele asciugare quasi completamente, furono poste in una cassetta di legno, che, insieme all'altra contenente il resto delle olive scaldate, fu messa di nuovo nell'incubatrice, dove fu mantenuta per otto giorni alla temperatura di 38°. Le olive così trattate subirono tutte le modificazioni che si producono in quelle che fermentano naturalmente, mentre le olive dell'altra porzione rimasero inalterate. Nessun dubbio quindi che i fenomeni che si producono nella fermentazione delle olive non siano dovuti all'enzima ossidante contenuta nella loro polpa.

Si potrebbe domandare perchè le olive fermentano solo quando sono ammassate o pigiate dentro vasche o sacchi, mentre il fenomeno non si produce se le olive sono distese sopra graticci o sul pavimento delle stanze in istrati di piccolo spessore. La risposta è facile a darsi. Il fermento ossidante a cui io attribuisco il fenomeno della fermentazione delle olive, agisce molto lentamente alla temperatura che si ha d'ordinario all'epoca della raccolta delle olive, mentre la sua azione è molto energica, come quella di tutti gli enzimi, alle temperature comprese fra i 35° e i 60°, e per conseguenza quando le olive sono poste in locali aperti, bene aereati e non ammassate in istrati molto profondi, l'ossidazione prodotta dall'enzima non può dare origine ad uno sviluppo di calore sufficiente per portare la temperatura della polpa a quel grado a cui l'enzima produce il massimo effetto. Invece, quando le olive sono ammassate, l'ossidazione a cui dà luogo l'enzima, lenta in principio, va a mano a mano esaltandosi per il calore stesso da essa sviluppato e che non può disperdersi. È tanto vero questo, che nelle vasche in cui si conservano le olive la temperatura, che alla superficie non differisce da quella dell'ambiente, aumenta con la profondità e col crescere di essa, diviene maggiore il grado di alterazione della polpa, che raggiunge il suo massimo negli strati dove massima è la temperatura.

Si potrebbe domandare perchè nelle vasche l'aumento della temperatura, e quindi l'alterazione delle olive, si verifica fino ad una certa profondità oltre la quale la differenza con la temperatura dell'ambiente va diminuendo fino a divenire trascurabile sul fondo se le vasche sono abbastanza profonde. La risposta è facile, quando si pensi che l'enzima che si trova nelle olive mature ossida la sostanza grassa della polpa prendendo l'ossigeno dall'aria e quindi fino ad una certa profondità tale ossidazione può compiersi, l'ossigeno che penetra fra gli interstizî delle olive essendo in quantità sufficiente, ma

oltre un certo limite no, perchè o l' ossigeno non arriva o arriva in quantità troppo piccola.

Questo modo di vedere è confermato dal fatto che quando le olive devono essere mantenute entro le vasche per un tempo troppo lungo prima di essere sottoposte alla frangitura, sono pigiate nuovamente quando hanno cominciato a fermentare. In tal modo la fermentazione viene disturbata e la temperatura si abbassa notevolmente, ma poi torna a salire, sebbene con maggiore lentezza della prima volta. Ciò avviene perchè con la seconda pigiatura, essendo la polpa delle olive rammollita e quindi cedendo facilmente alla pressione, vien cacciata la maggior parte dell'aria che si trova negli interstizî rimasti fra le olive, ed è necessario un certo tempo perchè l' aria che rimane e nella quale l' ossigeno non è più contenuto che in piccola quantità, possa essere rinnovata per diffusione. Questo tempo è maggiore di quello necessario affinchè si produca la prima fermentazione, e la temperatura sale molto più lentamente perchè dopo la seconda pigiatura sono ridotti ad un volume molto più piccolo gli interstizî rimasti fra le olive.

Aggiungerò che lasciando le olive nelle vasche per lungo tempo (in certi luoghi perfino tre mesi) l' alterazione di cui è parola si propaga in tutta la massa fino negli strati più profondi, e si capisce che deve essere così, se si riflette che le modificazioni prodotte dagli enzimi non sono mai complete, ma si arrestano quando una certa quantità della materia sulla quale producono la loro azione è trasformata. Per tale ragione, quando in uno strato situato ad una certa profondità si è raggiunto tale limite nell' alterazione della polpa, l' azione dell' enzima cessa e allora l' ossigeno, non rimanendo più fissato dalle olive poste in quello strato, può arrivare a mano a mano a strati più profondi e compiere per mezzo dell' enzima l' ossidazione della sostanza grassa delle olive poste a profondità sempre maggiori.

Se l' azione dell' enzima sulla sostanza grassa delle olive si manifesta in modo così energico solo quando le olive sono ammassate, perchè allora non va disperso il calore che si produce nell' ossidazione, non bisogna credere che sia nulla quando le olive sono poste in istrati sottili ed in locali bene aereati, giacchè anche in queste condizioni, sebbene più debolmente, l' enzima produce il suo effetto dando luogo allo sviluppo di anidride carbonica ed alla formazione di acido oleico, come può facilmente verificarsi determinando la quantità di quest' acido nell' olio ottenuto dalle olive frante appena colte ed in quello dato dalle olive lasciate in riposo sui graticci per qualche tempo. Aggiungerò anzi a tale proposito che in tutte le regioni d' Italia in cui si fa l' olio senza far prima fermentare le olive, si lascia sempre il frutto qualche giorno sui graticci o steso sul pavimento di apposite camere prima di frangerlo, perchè si ritiene che in tal modo l' olio riesca migliore. Forse è per dar modo all' enzima ossidante di dar luogo alla formazione della piccola quantità di acido oleico che si rinviene nell' olio d' oliva

che si procede in tal modo, perchè, molto probabilmente, l' olio privo affatto di acidi liberi, non sarebbe così apprezzato come quello che ne contiene una quantità che non oltrepassi certi limiti.

Le trasformazioni chimiche che si producono nella polpa delle olive asssoggettate alla fermentazione sono molto complesse, essendo di natura molto differente le sostanze che costituiscono la polpa stessa; quello che è certo, e che si può constatare facilmente, è che il fenomeno è accompagnato dalla formazione di anidride carbonica, acido oleico, acido acetico e acido sebacico. Si generano inoltre, in piccola quantità, altri acidi grassi volatili superiori, i quali dànno alle olive fermentate l'odore caratteristico che presentano. Aggiungerò che le proporzioni di questi acidi sono molto differenti a seconda della durata della fermentazione, ciò che porterebbe o ad ammettere l'esistenza di diversi enzimi che produrrebbero ciascuno una modificazione speciale ad una determinata temperatura, o a supporre che lo stesso enzima fosse capace di produrre modificazioni differenti a misura che è modificata la natura della sostanza sulla quale agisce. La questione non si può risolvere tanto facilmente; ma sta il fatto che mentre nelle olive che sono alla superficie delle vasche non si ha, anche dopo parecchi giorni, che la formazione di acido oleico con sviluppo di anidride carbonica, in quelle situate ad una certa profondità si riscontra la presenza degli altri acidi sopra ricordati. Se poi si fanno dei saggi sopra le olive poste ad una stessa profondità, a mano a mano che procede la fermentazione, si trova che mentre va dapprima crescendo abbastanza rapidamente la proporzione di acido oleico, si arriva ad un punto in cui la produzione di questo corpo si riduce quasi a zero, mentre ha luogo con una certa energia quella degli altri acidi. Anche l' apparizione di questi avviene successivamente, ma data la loro piccola quantità non mi è stato possibile determinare l' ordine che seguono nel formarsi. Quello che si può affermare è che per ciascuno di essi si ha una quantità limite, raggiunta la quale la sua produzione cessa. Sarebbe interessante determinare con esattezza tale quantità per ciascuno dei composti che si formano, ma la cosa non è troppo facile.

Le trasformazioni descritte non devono essere confuse con quelle prodotte dall' enzima scoperto dal Green nei semi oleosi, al quale fu dato il nome di *saponasi*, che ha per effetto di trasformare l' oleina in acido oleico e glicerina in presenza dell' acqua, fuori del contatto dell' aria. L' enzima che si trova nella polpa delle olive è invece un vero e proprio fermento ossidante, il quale per agire ha bisogno dell' ossigeno. Per tale ragione la fermentazione non si produce se le olive sono poste entro recipienti contenenti azoto o anidride carbonica, anche se la loro temperatura è fatta salire a quel grado a cui l' enzima agisce con la massima energia.

Il nome più appropriato per tale enzima mi pare che sarebbe quello di *oleasi*.

*
* *

L' oleasi si trova nell' olio d' oliva, specialmente in quello non chiarificato, ed è la causa delle alterazioni a cui l' olio stesso va soggetto coll' andar del tempo.

Come è noto, l' olio d' oliva esposto all' azione dell' ossigeno e conservato in ambienti a temperatura piuttosto elevata, acquista un sapore acre, piccante e un cattivo odore che lo rendono inadatto all' alimentazione. Inoltre si decolora rapidamente, dando luogo ad un abbondante deposito di materia colorante. Tali fenomeni si producono tanto più rapidamente quanto maggiore è la quantità di sostanze mucillagginose e parenchimatose rimaste nell' olio.

Alcuni fatti conosciuti, ma non ancora spiegati, dimostrano che le modificazioni sopra citate sono dovute all' azione di un enzima ossidante. Cosi, per esempio, si è osservato che l' olio estratto dalle olive acerbe si conserva più a lungo di quello ottenuto dalle olive perfettamente mature. E si capisce che deve essere così se si riflette che mentre nelle olive acerbe non si riscontra affatto la presenza dell' oleasi, se ne trova invece una quantità rilevante in quelle mature. Anche lo scoloramento, che è abbastanza rapido nell' olio ottenuto dalle olive mature, avviene invece molto lentamente nell'olio ricavato dalle olive acerbe, ciò che dimostra che l' oleasi esercita un' azione sulla precipitazione delle materie coloranti dell' olio.

Che l' oleasi sia contenuto nell' olio d' oliva lo dimostrano i fatti seguenti. Agitando un olio non chiarificato con un poco di acqua e lasciandolo poi riposare, si rinviene in questa, in quantità più o meno grande a seconda delle condizioni dell' olio trattato, dell' oleasi la cui presenza è svelata dalle reazioni sopra indicate. Se si ripete l' operazione parecchie volte, l' enzima può essere portato via quasi completamente, ma in tal modo l' olio rimane molto alterato perchè col rimescolamento della massa e con la sua divisione si favorisce il contatto con l' ossigeno e quindi l' ossidazione. Operando invece con acqua priva affatto d' aria e dentro bottiglie in cui sia impedito l' accesso dell' ossigeno, l' olio si libera quasi totalmente dall' enzima che contiene senza alterarsi affatto e si conserva per lungo tempo senza subire alcuna modificazione. Così pure si conserva inalterato se si riscalda per pochi minuti ad una temperatura compresa fra i 70° e i 75°; ma questo metodo non sarebbe consigliabile in pratica, perchè l' olio scaldato acquista un sapore che lo fa diminuire notevolmente di prezzo.

Di più se all' olio scaldato, o a quello privato del fermento solubile nel modo indicato sopra, si unisce una certa quantità d' acqua contenente disciolto l'oleasi ricavato dalle olive mature e si agita, l' alterazione si produce di nuovo.

Sulla rapidità dell' alterazione dell'olio ha inoltre una grande influenza la luce, la quale favorisce notevolmente l' azione dell' oleasi. Difatti, esponendo alla luce, in recipienti aperti per facilitare l' accesso dell' ossigeno, dell' olio

contenente dell' oleasi, l' ossidazione si produce in pochissimo tempo e l' olio invecchia rapidamente, presentando in breve i caratteri che non avrebbe acquistato altro che in capo a qualche anno. Ma se l' olio è stato privato affatto dell' enzima o l'ossigeno non può penetrare, neppure in piccola quantità, nell' interno dei recipienti, la luce non ha sopra di esso nessuna azione. Aggiungerò che le alterazioni che subisce l' olio esposto all' azione della luce sono accompagnate da una decolorazione molto rapida che lo rende in poco tempo quasi perfettamente bianco. Se invece l' olio è stato privato dell' oleasi, si può tenere quanto si vuole esposto all' azione della luce senza che il suo colore si alteri minimamente. Ma se si aggiunge l' enzima la decolorazione incomincia.

Le trasformazioni chimiche che si producono nell'olio d'oliva col tempo, sono della stessa natura di quelle che hanno luogo nella sostanza grassa che si trova nella polpa delle olive, cioè si ha sviluppo di anidride carbonica accompagnato dalla produzione di acido oleico, acido acetico, acido sebacico e altri acidi grassi superiori. Questi ultimi per altro sono sempre in quantità minima e qualche volta non si formano affatto.

Fisiologia. — *Fotografie del sistema arterioso ottenute coi raggi Röntgen.* Nota del dott. Uberto Dutto, presentata dal Socio Blaserna.

L'esperienza ha oramai dimostrato che le ossa sono relativamente opache ai raggi di Röntgen.

Ciò è dovuto alla composizione chimica delle lamelle fondamentali ossee, costituite prevalentemente da sali di calcio (fosfato, carbonato, floruro di calcio).

Così è stato da altri osservato il grado di opacità di parecchi cristalli di sali di calcio, fra i quali lo spato di Islanda.

Restava a vedersi se un sale di calcio, introdotto nei tessuti, anche allo stato polverulento, avrebbe permesso di fotografare l'ombra.

Questo fu fatto all'Istituto Fisico romano nel modo seguente:

Fu injettato per l'arteria brachiale di un cadavere un impasto liquido di solfato di calcio (scagliola) abbastanza tenue, affinchè potesse penetrare anche nei piccoli vasi.

Avvenuto l'indurimento, si fotografò la mano, nella posizione oramai classica, cioè colla palma rivolta verso la lastra fotografica, avendo cura di tener il tubo di Crookes a distanza grande, per avere l' ombra nettamente accentuata.

La fotografia riuscì benissimo, e la parte di solfato di calcio, indurita, risultò più opaca dello stesso tessuto osseo.

Si vedono l'arteria radiale, il ramo dorsale, il ramo ulnare, le arterie interossee del dorso, le arterie digitali del dorso, ed anche qualche piccolo ramo muscolare.

È chiaro che questo metodo generalizzato e portato in altre regioni ed in altri sistemi vasali, può essere di efficace ajuto all'Anatomia.

A titolo di prova, presento all'Accademia una copia della fotografia ottenuta.

P. B

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

Nel quarto volume, recentemente uscito, delle *Leçons sur la théorie générale des surfaces* il Darboux, esponendo il nuovo metodo di Weingarten per la ricerca di intere classi di superficie applicabili, tratta l'esempio delle superficie applicabili sulla sfera (l. c., pag. 321) e fa osservare come tale problema viene così ricondotto all'altro:

Determinare le superficie Σ dotate della proprietà che ogni segmento di normale, compreso fra i due centri principali di curvatura, sia visto da un punto fisso O *dello spazio sotto angolo retto.*

L'equazione a derivate parziali del secondo ordine, caratteristica per queste superficie Σ, si scrive:

$$(1)\qquad (\varrho'+p)(\varrho''+p)=p^2-2q\,,$$

ove ϱ', ϱ'' indicano i raggi principali di curvatura, p la distanza del piano tangente dal punto fisso O e $2q$ la distanza del punto di contatto da O stesso.

Il Darboux dopo avere così trasformata la ricerca delle superficie a curvatura costante nella integrazione della equazione (1) soggiunge: *Il n'y a là qu'un fait curieux, l'équation précédente étant plus compliquée que celle des surfaces à courbure constante.* Tuttavia la ricerca effettiva delle relazioni geometriche fra le superficie Σ della classe (1) e le superficie a curvatura costante conduce, come si vedrà, a risultati ben semplici che meri-

tano di essere osservati. Qui mi limiterò a dare gli enunciati dei teoremi fondamentali, riserbando ad altro luogo le dimostrazioni e gli sviluppi.

1.

Indicherò in questa Nota, per brevità, col nome di *superficie* Σ ogni superficie della classe (1). E innanzi tutto osserverò che limitandosi, come sembra opportuno in queste ricerche, a superficie *reali*, le superficie Σ non vengono già a collegarsi, secondo il metodo di Weingarten, colle superficie applicabili sulla sfera, sibbene con quelle applicabili sulla pseudosfera, ossia colle pseudosferiche ([1]).

Il modo di derivazione delle superficie Σ dalle pseudosferiche è il seguente. Presa una superficie pseudosferica S qualunque, si tracci sopra di essa un sistema di geodetiche parallele $\beta = \cos^{te}$ (uscenti da un punto all'infinito della superficie) e le loro traiettorie ortogonali $\alpha = \cos^{te}$ (oricicli). Assumendo convenientemente i parametri α, β, il quadrato dell'elemento lineare di S prenderà la nota forma parabolica

$$(2) \qquad ds^2 = d\alpha^2 + e^{-2\alpha} d\beta^2 .$$

Indicando con ξ, η, ζ le coordinate di un punto mobile sopra S, pongasi

$$(3) \quad x = e^{\alpha}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right), \quad y = e^{\alpha}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right), \quad z = e^{\alpha}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}\right)$$

e saranno x, y, z le coordinate di un punto mobile sopra una superficie Σ della classe (1). Viceversa ogni superficie Σ si ottiene da una conveniente pseudosferica S, *su cui sia tracciato un determinato sistema di geodetiche parallele* colle formole (3). Ma si noti che per tal modo dalla superficie S si deduce non una sola Σ, ma un'intera serie di tali superficie Σ *parallele*, giacchè mutando β in $\beta + \text{cost}^{te}$, la (2) non si altera, mentre la superficie (3) si cangia in una parallela. È evidente del resto, per la definizione geometrica delle superficie Σ, che ogni superficie parallela ad una Σ è nuovamente una Σ. Ciò significa che l'equazione a derivate parziali (1) è *invariante* rispetto alle trasformazioni parallele.

2.

Formando l'equazione differenziale delle linee di curvatura della superficie Σ data dalle (3), si trova l'importante risultato: *Sopra la superficie* Σ

([1]) E invero nelle formole corrispondenti (l. c., pag. 322) il Darboux pone $\varphi = \sqrt{p^2 - 2q}$; ma poichè per ogni superficie *reale* Σ è $p^2 < 2q$, così φ è puramente immaginaria e le superficie corrispondenti hanno puramente immaginarie le coordinate dei loro punti corrispondenti a valori reali di p, q, talchè dividendo queste coordinate per $\sqrt{-1}$ si ottengono in effetto superficie *reali* a curvatura costante negativa (pseudosferiche). Se così non fosse, sarebbe trovato ciò che fino ad ora è stato da più parti inutilmente cercato cioè *un metodo efficace di trasformazione per le superficie a curvatura costante positiva!*

le linee di curvatura corrispondono alle linee di curvatura della superficie pseudosferica S, *da cui deriva secondo le formole* (3).

Ora alle geodetiche $\beta = \text{cost}^{\text{te}}$ di S si tirino le tangenti; la congruenza così formata ha per prima falda della superficie focale la S e per seconda falda una nuova superficie pseudosferica S′ *complementare* della S. D'altronde si vede subito che la corrispondenza di punto a punto della Σ e della S′ è tale che le normali in due punti corrispondenti sono parallele, e poichè alle linee di curvatura di S corrispondono, come è noto, quelle di S′, ne deduciamo il teorema:

A) *Ogni superficie Σ ha la stessa immagine sferica delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica* [1].

Questa proprietà fondamentale spiega appunto il perchè la teoria delle superficie Σ viene necessariamente a collegarsi con quella delle superficie pseudosferiche.

Di più si osservi che presa una qualunque superficie pseudosferica S′, vi sono ∞^1 sistemi di superficie Σ parallele aventi a comune con S′ l'immagine sferica delle linee di curvatura, e ciò prescindendo da un'omotetia col centro in O, che cangia manifestamente una superficie Σ in un'altra.

3.

Ho dimostrato nel mio libro [2] che la congruenza delle normali ad ogni superficie, avente la medesima immagine sferica delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica, è una congruenza ciclica (l. c., pag. 333), che cioè esiste uno *ed un solo* sistema ∞^2 *normale* [3] di circoli, aventi per assi le dette normali. Ne segue che le normali ad una superficie Σ costituiscono appunto una congruenza ciclica. Come si caratterizzano i circoli C del sistema normale corrispondente? Il risultato è estremamente semplice, poichè si trova che questi circoli C vanno tutti a passare pel punto fisso O. Inoltre, e questa è la proprietà più notevole, le ∞^1 superficie ortogonali ai circoli C sono nuovamente superficie Σ rispetto al medesimo punto fisso O. Si ha dunque la costruzione seguente:

B) *Presa una qualsiasi superficie Σ della classe* (1), *dal punto fisso* O *si conduca ad ogni sua normale m la perpendicolare* OP *e, fatto centro nel piede* P *di questa, si descriva, nel piano normale a m, il circolo che passa per* O. *Il sistema* ∞^2 *di circoli* C *così costruiti ammette una*

(1) Anche il Weingarten era pervenuto dal canto suo a questo teorema, come ho saputo dopo avergli comunicati i risultati da me ottenuti.

(2) *Lezioni di geometria differenziale.* Pisa, Spörri, 1894.

(3) Un sistema ∞^2 di circoli dicesi normale se ammette una serie di superficie ortogonali.

serie ∞^1 *di superficie ortogonali* Σ', *che appartengono nuovamente alla classe* (1).

Così da una superficie Σ si ottengono ∞^1 nuove superficie della medesima classe e ciò con operazioni che richieggono manifestamente una sola quadratura.

Si osservi poi che mentre la superficie Σ ha a comune con una superficie pseudosferica S la immagine sferica delle linee di curvatura, le superficie Σ', derivate da Σ colla costruzione B), hanno a loro volta le stesse immagini delle linee di curvatura delle ∞^1 superficie pseudosferiche S′ complementari di S. Si può dunque dire:

C) *La trasformazione delle superficie* Σ, *fornita dalla costruzione* B) *corrisponde precisamente alla trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche.*

Le considerazioni superiori conducono altresì al teorema:

D) *Se pel punto fisso* O *si conducono i circoli normali ad una superficie* Σ, *tutte le* ∞^1 *superficie ortogonali ai circoli appartengono alla classe* (1).

4.

L'ultima costruzione D) deriva facilmente dal seguente teorema di Weingarten ([1]):

Un' inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad ogni sfera col centro in O *cangia una superficie* Σ *in un' altra della medesima classe.*

In altre parole l'equazione fondamentale (1) è invariante non solo rispetto alle trasformazioni parallele, ma anche rispetto alle inversioni.

Ora è chiaro che invertendo il nostro sistema ciclico (Σ') del teorema B) per raggi vettori reciproci si ottiene una serie di superficie Σ parallele; così la costruzione (D) risulta d'immediata evidenza.

A quale trasformazione delle superficie pseudosferiche corrisponde l'inversione delle Σ? Facilmente si dimostra che:

Un' inversione per raggi vettori reciproci delle superficie Σ *corrisponde ad una trasformazione delle superficie pseudosferiche composta di due successive trasformazioni complementari.*

Così per le superficie Σ la trasformazione elementare rimane quella definita dalla costruzione B); due tali successive trasformazioni B) si combinano in un'inversione per raggi vettori reciproci.

Combinando le costruzioni geometriche sopra indicate se ne possono ottenere delle nuove. Osserveremo ancora la seguente:

E) *Ad ogni normale* m *di una superficie* Σ *si cali dal punto fisso* O *la perpendicolare* OP *sulla quale si assuma un punto* P′ *tale che* $OP.OP' = \text{cost}^{te}$,

([1]) Esso mi fu comunicato dall'autore in occasione della citata corrispondenza.

se per P′ *si conduce la retta* m' *normale insieme a* OP *e alla* m, *queste rette* m' *saranno le normali di una serie di nuove superficie* Σ'.

Le due serie (Σ) (Σ') di superficie Σ parallele si deducono appunto da due superficie pseudosferiche S, S′ complementari, secondo le formole (3); esse hanno a comune con S, S′ l'immagine sferica delle linee di curvatura. Osserviamo poi che invertendo per raggi vettori reciproci una delle due serie di superficie (Σ) o (Σ') si ottiene quel sistema ciclico che ha per assi le normali dell'altra serie (n° 3). Inoltre si dimostra: *La proprietà descritta nella costruzione* E) *è caratteristica della superficie* Σ.

5.

Riserbando ad altra occasione uno studio più dettagliato delle superficie Σ, mi limiterò qui ad indicare la notevole forma che assume l'elemento lineare dello spazio riferito ad un nostro sistema ciclico Σ' (n. 3).

Sia θ una funzione di u, v che soddisfi alla nota equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

e si determini la funzione ω dalle equazioni simultanee di Darboux

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \operatorname{sen}\omega \cos\theta \\ \frac{\partial\omega}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\cos\omega \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \right.$$

Indicando con w la costante arbitraria (parametro) che entra nella soluzione più generale ω delle (4) e con ω_0 una soluzione particolare, pongasi

$$\alpha = \int (\cos\omega_0 \cos\theta\, du + \operatorname{sen}\omega_0 \operatorname{sen}\theta\, dv).$$

La formola

$$ds^2 = e^{2\alpha} \left\{ (\cos\omega + \cos\omega_0)^2 du^2 + (\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\omega_0)\, dv^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2 \right\}$$

definirà appunto un sistema ciclico Σ' [1]. Esso è derivato per trasformazione di Combescure dal sistema ciclico pseudosferico:

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2 dw^2 .$$

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota del Corrispondente Vito Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Le superficie Σ' ortogonali ai circoli sono le $w = \text{cost}^{\text{te}}$.

Astronomia. — *Sulla nube solare del 10 ed 11 febbraio 1896.* Nota del Socio P. Tacchini.

Favoriti dal bel tempo abbiamo potuto eseguire le osservazioni solari spettroscopiche in tutti i primi 20 giorni del mese di febbraio, ripetendo l'esame del bordo più volte nella stessa giornata, atteso alla continua eccezionale serenità durante il periodo suddetto. Nei giorni 8 e 9 sul bordo est al nord dell' equatore solare non si vedeva che cromosfera semplice, e sul disco del sole non vi erano nè macchie nè fori in quel quadrante. Il giorno appresso invece, alle $11^h.15^m$ trovai alla latitudine di $+27°,3$ una bella protuberanza, che innalzandosi a forma di albero ripiegava a sud, estendendosi così fra $+21°$, e $+28°$. Col mezzo dei passaggi ne calcolai l'altezza, che mi risultò di 103″. Era di carattere nebuloso-filoso e non viva, ma dotata di quella luce speciale piuttosto smorta, come se l' oggetto si vedesse attraverso a nebbia molto al di là del bordo; così che non era da ritenersi, che la protuberanza sorgesse in quel punto del bordo solare. Al mezzodì si ripetè l' osservazione e si trovò la stessa forma ed altezza, ed anche alle $15^h.20^m$ non presentava cambiamenti rimarchevoli, e l' altezza fu pure trovata poco diversa, risultando allora di 108″.

Nel mattino seguente, 11, non mi fu possibile di osservare presto il sole, ma verso mezzodì in quella stessa posizione trovai una nube la cui forma non lasciava dubbio sulla identità colla protuberanza osservata il giorno avanti, la quale per effetto della rotazione solare ed anche forse per moto proprio, si presentava in quel giorno, come una vera nube a molta distanza dal bordo del sole. Alle $11^h.53^m$ la punta più bassa della nube corrispondeva alla latitudine di $+32°$, e la più alta a quella di $+25°$; la nube era distante dal bordo solare di circa 100″, mentre la parte più elevata ne era lontana di 290″. oltre cioè a 200 mila chilometri.

La nube presentava nella parte centrale, inferiormente, luce più intensa ed era tutta di carattere nebuloso; alle $12^h,13^m$ l' altezza era diminuita, fu cioè trovata di 227″ e di soli 130″ alle $12^h,43^m$; allora il pedunculo era disceso sottile e sembrava sorgesse dalla cromosfera a $+32°$, unita cioè colla punta cromosferica visibile a $12^h,13^m$. La protuberanza estendevasi in alto fra $+29°$ e $+35°$, e alle $12^h.54^m$ la sua altezza non era più che di 114″, alle $13^h.2$ solo di 92″ ed alle $13^h.22^m$ non si vedeva altro che la cromosfera. È ben vero, che le condizioni dell' aria andavano naturalmente peggiorando, ma la visibilità della cromosfera ci dava la prova, che la nube si era veramente disciolta o resa invisibile per mancanza di illuminazione.

Nello stesso giorno al bordo ovest si era presentata un' altra protuberanza nebulosa e di carattere stabile; essa occupava il tratto $+$ *23,9* $+$ *28,6* e in alto allargavasi fra $+20°,9$ e $+29°,4$; essa dunque stava a latitudini quasi

eguali a quelle della nube al bordo est. La sua altezza poco prima del mezzodì fu trovata di 66″. Ora verso le 3^h quando esaminai ancora il sole all' est, per avere un paragone collo stato del cielo al mattino, puntai alla protuberanza all'W, ma con mia sorpresa la trovai scomparsa, mentre anche in quel posto la cromosfera vedevasi assai bene.

Nel giorno successivo non si ebbe traccia alcuna delle due protuberanze, e nemmeno furono osservate macchie e facole in quelle regioni. Si trattava dunque di un fenomeno, dirò così isolato nell' atmosfera del sole, di lunga durata rispetto alla nube all' est, senza i corrispondenti fenomeni alla superficie dell'astro. È certo un fatto assai curioso, quello della scomparsa contemporanea di queste due protuberanze, ciò che mi fa anche questa volta supporre, che non si tratti di scomparsa delle nubi, ma solo di mancata illuminazione per causa di ordine generale a quella latitudine, escludendo intieramente il carattere eruttivo o trasporto di materia.

Meteorologia. — *Sulla insolazione a Roma nel periodo 1887-1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

Appellasi insolazione il numero delle ore, che il sole splende sull'orizzonte di un luogo in un dato periodo di tempo, che può essere il giorno, la decade, il mese, l'anno; ma d'ordinario si cerca di determinare il valore medio diurno dell' insolazione, cioè il numero medio per giorno delle ore, in cui il sole splende su di un dato orizzonte. È chiaro, che se il cielo si mantenesse sempre sereno e che se l'orizzonte del luogo fosse intieramente libero da ostacoli qualsiasi, la durata dell' insolazione corrisponderebbe alla durata del giorno pel detto luogo. Invece le nubi e gli ostacoli naturali o artificiali vengono a turbare la detta eguaglianza, ed è perciò di speciale interesse, specialmente rispetto all' igiene e all' agricoltura, il conoscere la durata media dell' insolazione nei diversi mesi dell'anno. Per determinare il numero delle ore di insolazione giorno per giorno, si fa uso di un apparecchio, chiamato presso di noi *Eliofanografo*: esso si compone di una lente sferica fissata in un asse, che si dispone parallelo all'asse del mondo, e questa lente sferica, se colpita dai raggi del sole, produce dall'opposta parte una bruciatura su di una carta, a mezzo della quale si rileva facilmente la durata dell' insolazione e le ore o parti di ore in cui il sole agì sull'apparecchio e per conseguenza anche su di un' ampia estensione di terreno tutto attorno al luogo di osservazione. L'apparecchio funziona infatti come un orologio solare, e deve essere collocato in luogo intieramente libero, in modo cioè che possa sempre essere colpito dai raggi solari, quando l'astro splende.

Le osservazioni furono incominciate al nostro Osservatorio nel 1887, e qui ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati ottenuti a tutto il 1895,

cioè nel periodo di nove anni, per il quale ho calcolato l' insolazione per ciascuna decade di ogni mese. Questi dati trovansi riuniti nella seguente tabella, ove ho aggiunto il rapporto dell' insolazione media osservata alla durata del giorno; che potrebbe chiamarsi anche il coefficiente d' insolazione.

Tabella A.

1887-1895		Insolazione		Insolazione per giorno	Rapporto fra l'insolazione e la durata del giorno.	1887-1895		Insolazione		Insolazione per giorno	Rapporto fra l'insolazione e la durata del giorno
		antim.	pom.					antim.	pom.		
		h	h	h				h	h	h	
Gennaio	1ª dec.	1,33	1,24	2,57	0,28	Luglio	1ª dec.	5,61	5,35	10,96	0,73
	2ª »	2,39	2,28	4,67	0,50		2ª »	5,67	5,74	10,41	0,77
	3ª »	2,00	2,04	4,04	0,42		3ª »	5,52	5,29	10,81	0,74
Febbraio	1ª »	2,50	2,38	4,88	0,48	Agosto	1ª »	5,59	5,15	10,74	0,76
	2ª »	2,65	2,73	5,38	0,51		2ª »	5,43	5,31	10,74	0,78
	3ª »	1,86	2,88	4,74	0,43		3ª »	4,86	4,66	9,52	0,71
Marzo	1ª »	2,59	2,54	5,13	0,45	Settembre	1ª »	4,18	3,91	8,09	0,63
	2ª »	2,13	1,85	3,98	0,34		2ª »	3,94	3,77	7,71	0,62
	3ª »	3,06	2,81	5,87	0,48		3ª »	3,52	3,47	6,99	0,58
Aprile	1ª »	3,01	3,07	6,08	0,47	Ottobre	1ª »	2,82	2,80	5,62	0,49
	2ª »	3,26	3,10	6,36	0,48		2ª »	3,14	3,02	6,16	0,56
	3ª »	3,09	3,17	6,26	0,46		3ª »	2,81	2,51	5,32	0,50
Maggio	1ª »	3,27	3,33	6,60	0,47	Novembre	1ª »	2,39	2,06	4,45	0,44
	2ª »	4,50	3,95	8,45	0,58		2ª »	2,70	2,57	5,27	0,54
	3ª »	3,87	3,68	7,55	0,51		3ª »	1,97	1,73	3,70	0,39
Giugno	1ª »	4,40	4,70	9,10	0,61	Dicembre	1ª »	1,89	1,94	3,83	0,42
	2ª »	4,69	4,77	9,46	0,63		2ª »	1,86	1,88	3,74	0,41
	3ª »	5,02	5,13	10,15	0,67		3ª »	1,50	1,52	3,02	0,33

Il *minimo* dell' insolazione ha luogo nella prima decade del mese di gennaio, il *massimo* nella prima del luglio. Descritta una curva coi valori della colonna terza, risulta più chiaro all'occhio l'andamento annuo dell' insolazione e si vede come dal minimo al principiare dell'anno salga con lievi variazioni discendendo poi ad un minimo secondario nel mezzo del marzo. Dal marzo l'insolazione cresce fino al massimo assoluto della prima decade di luglio, e si ha il periodo dalla terza decade di giugno alla seconda di agosto, durante il quale l' insolazione si mantiene sempre superiore a 10 ore. Inoltre è degno di nota l'anomalia nella seconda e terza decade del maggio, fatto che potrebbe essere in relazione col periodo meteorologico così detto dei santi di ghiaccio, cioè dei santi Servazio, Pancrazio e Bonifacio, la cui festa ricorre nei giorni 12, 13 e 14 maggio, e che in Germania sono chiamati santi di ghiaccio, perchè in quel periodo avvengono assai di frequente delle gelate, che per la stagione inoltrata sogliono arrecare gravi danni alla

vegetazione. A partire dalla seconda decade di agosto l' insolazione diminuisce fino alla fine dell'anno, risultando il valore dell'ultima decade di dicembre poco diverso dal minimo assoluto nella prima del gennaio. In questa discesa è da notarsi il massimo secondario della seconda decade del novembre, che corrisponderebbe al così detto estate di s. Martino.

Il mese di maggiore insolazione è il luglio, e quello della minima il dicembre; tenuto però conto della minor durata del giorno, anche il valore dell' insolazione in dicembre è rilevante, avendosi in media 4 decimi circa della giornata con sole, ciò che costituisce una delle belle qualità del clima di Roma.

Riguardo all'insolazione avanti e dopo il mezzodì vero, che trovasi registrata nella prima e seconda colonna, sembra che si possa dire che dal dicembre a tutto giugno ci sia maggiore tendenza al sereno nelle ore pomeridiane, e dal luglio a tutto novembre in quelle antimeridiane.

Dai valori contenuti nella tabella A non si può certo avere indizio della variabilità o frazionamento dell'insolazione per giorno, e perciò ho creduto opportuno di calcolare anche il numero medio delle ore intiere di sole per giorno in ciascuna decade e i risultati sono contenuti nella seguente tabellina:

Medio numero per giorno delle ore intiere di sole per ogni decade dalle osservazioni del periodo 1887-1895.

TABELLA B.

Gennaio	1ª decade	1,81	Luglio	1ª decade	8,77
	2ª »	3,62		2ª »	9,82
	3ª »	2,72		3ª »	9,03
Febbraio	1ª »	3,21	Agosto	1ª »	9,12
	2ª »	3,99		2ª »	9,06
	3ª »	3,52		3ª »	7,62
Marzo	1ª »	3,73	Settembre	1ª »	5,83
	2ª »	2,40		2ª »	5,86
	3ª »	4,15		3ª »	5,33
Aprile	1ª »	4,28	Ottobre	1ª »	3,80
	2ª »	4,31		2ª »	4,50
	3ª »	4,08		3ª »	3,77
Maggio	1ª »	4,44	Novembre	1ª »	2,50
	2ª »	6,12		2ª »	3,68
	3ª »	4 71		3ª »	2,78
Giugno	1ª »	6,90	Dicembre	1ª »	2,48
	2ª »	6,88		2ª »	2,26
	3ª »	8,10		3ª »	1,97

Nessuna decade dunque manca di ore intiere di sole, anzi la differenza coll'insolazione totale si mantiene sempre piuttosto piccola, ciò che costituisce un'altra ottima qualità del nostro clima. Le maggiori differenze trovansi per

i mesi di aprile, maggio e giugno, durante i quali l'atmosfera sarebbe relativamente più variabile. Anche coi dati della tabella B si arriva alle stesse conclusioni riguardo all'andamento annuo dell'insolazione, che abbiamo dichiarato in base a quelli della tabella A.

Fra la serenità e l'insolazione non si può ammettere un accordo rigoroso che nei limiti estremi, cioè di serenità continua o continua nebulosità totale durante la giornata: ma in considerazione dei forti valori in ciascun mese delle ore intiere di sole era da ritenersi, che un discreto accordo vi potesse essere fra la serenità, come viene determinata a stima in poche osservazioni, e l'insolazione data dall'eliofanografo. Nella mia Memoria sul clima di Roma ([1]) trovansi i dati per la serenità a Roma, ricavati dal periodo 1858-1879, che metto qui appresso a confronto coi valori del coefficiente d'insolazione mese per mese:

	Serenità	Coefficiente d'insolaz.
Gennaio	0,50	0,40
Febbraio	0,51	0,48
Marzo	0,45	0,42
Aprile	0,54	0.47
Maggio	0,57	0,52
Giugno	0,65	0,63
Luglio	0,82	0,75
Agosto	0,79	0,75
Settembre	0,67	0,61
Ottobre	0,53	0,52
Novembre	0,46	0,46
Dicembre	0,48	0,39

Come si vede l'accordo è maggiore di quanto poteva aspettarsi, e in conclusione non si commetterebbe un grande errore nel calcolare per Roma la durata dell'insolazione, assumendone per coefficiente il valore della serenità.

Astronomia. — *Osservazioni delle comete Perrine nov. 16 e Lamp-Perrine febb. 13, fatte all'equatoriale del R. Osservatorio del Collegio Romano.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

La cometa Perrine, di cui resi conto in passato all'Accademia, rifattasi astro del mattino, fu da me osservata come segue:

1896 febbraio 16 $17^h 42^m 46^s$ RCR ; α apparente $19^h 45^m 29^s.52$ (9.597 n)
δ apparente $-1^\circ 33' 17''.7$ (0.775)

([1]) Vedi Annali dell'Ufficio di Meteorologia e Geodinamica. Roma, 1881.

L'astro, per la distanza cresciuta tanto dal sole, quanto dalla terra, apparve meno lucido dell'epoca della scoperta e senza coda; tuttavia presentava un nucleo di 11ma grandezza, avvolto da nebulosità irregolare.

Il 13 febbraio la cometa Perrine trovavasi assai vicina ad un'altra cometa più lucente, locchè diede luogo ad equivoco che venne ben presto tolto di mezzo. Pare che il primo a scoprirla sia stato il dott. Lamp, ma che l'accertamento della non identità spetti all'astronomo Perrine del Lick Observatory.

Il nuovo astro fu da me osservato come segue:

1896 febbraio 18 $17^h 42^m 8^s$ RCR; α apparente $19^h 56^m 37^s.94$ (9.621 n)
δ apparente $+9^\circ 31' 25''.0$ (0.733)

Il nuovo astro mi apparve senza coda, con nucleo un po' mal definito, con nebulosità circolare ampia 2′ circa.

Fisica. — *Sulla dispersione dell'elettricità prodotta dai raggi di Röntgen.* Nota del Corrispondente Augusto Righi.

1. *Dispersione delle cariche elettriche.* In una mia recente Nota [1] ho fatto conoscere alcune mie esperienze, dalle quali risulta dimostrato che:

I raggi X hanno in comune coi raggi ultravioletti la proprietà di determinare la dispersione delle cariche negative, e di dare origine a cariche positive nei conduttori non elettrizzati.

Come pure che:

I raggi X, a differenza dai raggi ultravioletti, provocano la dispersione anche dai corpi elettrizzati positivamente.

[1] Rend. della R. Accad. di Bologna, seduta del 9 febbraio 1896. Appena stampata questa mia Nota, e cioè l'11 febbraio, mi giunse il n. 5 dei Comptes Rendus dell'Accad. di Parigi, nel quale sono narrate delle esperienze dei signori Benoist e Hurmuzescu dimostranti pure la dispersione delle cariche elettriche prodotta dai raggi di Röntgen. Ho saputo or ora che, sempre indipendentemente e quasi nello stesso tempo, altri hanno scoperto lo stesso fenomeno, e cioè J. J. Thomson a Cambridge, Borgmann e Gerchun a Pietroburgo, e O. Lodge. A Thomson ed a Lodge è però sfuggita la fase finale del fenomeno, giacchè hanno bensì constatata la dispersione della carica di corpi elettrizzati, ma non la produzione di una carica positiva finale, in un corpo inizialmente scarico o comunque elettrizzato. I due fisici di Pietroburgo (vedi Comp. Rend. n. 7 del 17 febbraio 1896) hanno invece riconosciuto che il corpo elettrizzato raggiunge una certa carica finale sotto l'azione delle radiazioni di Röntgen. Però, secondo i medesimi, questa carica finale sarebbe negativa anzichè positiva, e la dispersione delle cariche positive sarebbe più rapida che quella delle cariche negative, per cui i loro risultati sarebbero in completa opposizione con quelli trovati da me e dagli altri fisici nominati più sopra. È importante il notare che i due fisici di Pietroburgo non dicono di avere prese le necessarie precauzioni per eliminare l'azione che sull'elettroscopio possono produrre il tubo di Crookes e il rocchetto che fornisce le scariche, nè quella che può provenire dai raggi che forse colpivano direttamente lo strumento indicatore, e specialmente le parti comunicanti col suolo.

Nella stessa Nota ho poi fatto osservare come questo nuovo effetto prodotto dai raggi X possa fornire un metodo per ottenere una misura relativa della loro intensità. Di questo metodo mi sono di poi occupato.

2. *Misura dell' intensità dei raggi di Röntgen, basata sulla dispersione dell'elettricità da essi provocata.*

Si potrebbe procedere in diverse maniere, e cioè 1° misurare la velocità della dispersione, e cioè la diminuzione di potenziale nell' unità di tempo prodotta in un dato corpo elettrizzato ad un dato potenziale; 2° misurare il potenziale positivo al quale un dato corpo, per esempio allo stato naturale, è portato dalle radiazioni; 3° misurare con un galvanometro l'intensità della corrente che passa pel filo che congiunge il corpo esposto alle radiazioni col polo isolato di una pila.

Il primo metodo è poco pratico ed esatto, perchè richiede letture a tempi stabiliti, ed è esposto a diverse cause d'errore; il secondo pure non sembra suscettibile d'esattezza, e richiede tempo notevole per ogni lettura; il terzo richiede un galvanometro sensibilissimo e a filo lunghissimo, ed io non lo posseggo. Ho quindi preferito un quarto metodo, che ho riconosciuto esatto e facile, e che permette rapide misure. Eccone la descrizione.

Un disco *R* di circa 11 c. di diametro, per esempio di rame (fig. 1), riceve le radiazioni di Röntgen, che escono da una finestra di 10 c. di diametro, chiusa

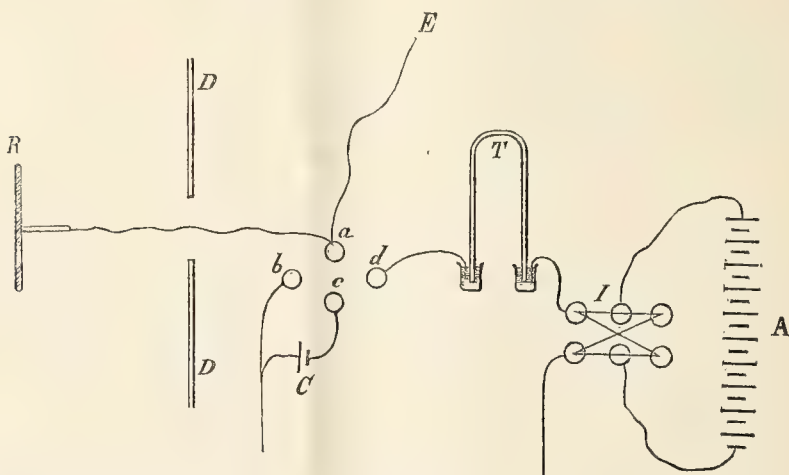



Fig. 1.

con sottile alluminio, e praticata in una parete di piombo (spessore 0,5 c.) d'una grande cassa metallica comunicante col suolo, entro la quale stanno tutti gli apparecchi occorrenti alla produzione dei raggi X. Il tubo di Crookes si trova entro la cassa in tal posizione, che la parete di esso che è colpita dai raggi catodici, sia a piccola distanza dall' alluminio.

Il disco *R* comunica coll'elettrometro di Mascart *E*, e, a seconda della posizione data ad un ponte metallico isolato, con uno dei tre pozzetti di

mercurio *b*, *c*, *d*, il primo dei quali comunica col suolo e con un polo di una coppia campione *C*, il secondo col polo isolato di questa, ed il terzo *d* con uno dei poli di una serie *A* di 10 piccoli accumulatori, di cui il polo opposto è in comunicazione colla terra. Un inversore *I* permette d' invertire le comunicazioni, e di utilizzare così a piacere o il polo + o il —.

Nella comunicazione fra gli accumulatori e il pozzetto *d* è intercalata una forte resistenza, costituita da un tubo *T* (lungo 80 c. con foro del diametro di 0,1 c.) pieno di alcool assoluto del commercio.

Se il ponte mobile è fra *a* e *b*, il disco (e quindi anche l'elettrometro) è a terra; se è fra *a* e *c*, l' elettrometro dà la deviazione prodotta dalla coppia campione, ciò che fornisce il mezzo di tradurre in Volta le deviazioni dell' istrumento. Se infine il ponte è fra *a* e *d*, il disco è caricato dagli accumulatori ad un potenziale, che indicherò con v_0.

Il valore di v_0 si può variare a piacere entro certi limiti, facendo uso d' un numero più o meno grande di accumulatori. Una disposizione semplice, non indicata nel diagramma, permette di variare facilmente questo numero.

Infine, un diaframma metallico non isolato *DD*, ripara gli apparecchi descritti dalle radiazioni di Röntgen, e un simile ufficio compie un tubo metallico comunicante col suolo (non rappresentato nel diagramma), che circonda il filo che va dal pozzetto *a* all' elettrometro *E*.

Posto il ponte in *ad*, si osserva una deviazione che corrisponde al potenziale v_0 dato dagli accumulatori. Se allora si fanno agire le radiazioni X sul disco *R*, si nota una diminuzione della deviazione, ed il potenziale diventa v_1. La nuova deviazione resta immutabile finchè il tubo di Crookes è in azione (se non si verificano cambiamenti d' intensità della radiazione, p. es. per essere in cattive condizioni l' interruttore del rocchetto), giacchè si stabilisce una compensazione fra l'elettricità sottratta nell'unità di tempo dalle radiazioni al disco *R*, e quella che nella unità di tempo la sorgente fornisce attraverso il tubo *T*. Quest' ultima è evidentemente proporzionale a $v_0 - v_1$, per cui la diminuzione di potenziale $v_0 - v_1$ misura la dispersione, che nell' unità di tempo il disco subisce quando il suo potenziale è v_1.

Ho verificato che, almeno fra 4 Volta e 16 Volta, $v_0 - v_1$ è sensibilmente proporzionale a v_1. Perciò $\frac{v_0 - v_1}{v_1}$ si può prendere come misura della dispersione, qualunque sia v_1.

La dispersione prodotta dai raggi X, e cioè la quantità $\frac{v_0 - v_1}{v_1}$, *è proporzionale alla loro intensità.* Infatti, mediante un semicerchio ed un quadrante di piombo, tagliati da un disco grande quanto la finestra da cui partono i raggi di Röntgen, ed applicati contro l' alluminio in modo da ridurne l' area libera successivamente ai tre quarti, alla metà, oppure ad un quarto, ho ottenuto per $\frac{v_0 - v_1}{v_1}$ valori sensibilmente eguali ai tre quarti,

alla metà, od al quarto, di quello avuto lasciando interamente libera la finestra.

La determinazione di $\frac{v_0 - v_1}{v_1}$ fornisce dunque una misura dell'intensità della radiazione di Röntgen ricevuta dal disco di rame, ed è evidente che questo metodo è incomparabilmente più sicuro ed esatto di tutti quelli ai quali, in mancanza di meglio, si ricorse finora.

Riserbandomi di comunicare in altro tempo i risultati di ricerche, che ora sono appena iniziate, mi limiterò ora a dare alcuni esempî.

Con sette accumulatori e col disco di rame a circa 40 c. dalla finestra, ho una deviazione che corrisponde a $v_0 = 14{,}98$ V. Fatte agire le radiazioni ho $v_1 = 10{,}87$ V. (l'elettrometro dà 30 mm. di deviazione per un Volta, per cui le radiazioni hanno fatto diminuire la deviazione di circa 123 mm.) [1]. L'intensità della radiazione sul disco è dunque rappresentata da $\frac{v_0 - v_1}{v_1} = 0{,}376$. Posta fra la finestra ed il disco una lastra di cristallo da specchio grossa 0,85 c., trovo $v_1 = 14$ V., e quindi la nuova intensità della radiazione sul disco è $\frac{v_0 - v_1}{v_1} = 0{,}07$. Il rapporto $\frac{0{,}07}{0{,}376} = 0{,}186$, cioè quasi $^1/_5$, rappresenta dunque il rapporto nel quale la lastra di vetro riduce l'intensità della radiazione.

Similmente, per una lastra di paraffina di circa 3,9 c. di spessore, il detto rapporto fu di 0,553.

Ho poi constatato che per potenziali un po' elevati, p. es. da 12 V. in su, la dispersione dell'elettricità negativa è appena più rapida di quella dell'elettricità positiva, mentre per potenziali più bassi la differenza si fa più notevole. Ciò si accorda col fatto da me constatato della carica finale positiva, la quale produce un potenziale generalmente di una frazione di Volta.

Un'altra particolarità degna di nota è questa, che mentre adoperando i raggi ultravioletti è necessario pulire spesso i corpi sui quali devono produrre la dispersione fotoelettrica, questa necessità è quasi nulla nel caso dei raggi X.

3. *Azione dei raggi X sui dielettrici.* Dimostrai altravolta che i raggi ultravioletti provocano anche cadendo sui corpi isolanti quella dispersione elettrica che era stata dimostrata nel caso dei corpi conduttori. Lo stesso ho fatto ora per rapporto ai raggi X, giacchè ho riconosciuto che una lastra dielettrica, elettrizzata in $+$ o in $-$, si scarica allorchè è colpita dai

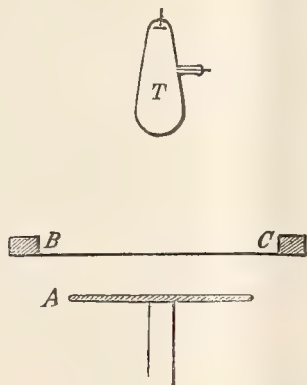
[1] Per dare idea della sensibilità del metodo qui descritto dirò, che col disco di rame collocato a due metri dalla finestra, dietro la quale sta il tubo di Crookes, la diminuzione della deviazione elettrometrica prodotta dai raggi X fu di 3 mm. della scala; per cui si sarebbe distinto certo un effetto anche a distanza doppia. Ora è chiaro che a così grandi distanze l'effetto sui corpi fluorescenti sarebbe quasi nullo, e quello sulle lastre fotografiche richiederebbe parecchie ore di posa per manifestarsi.

nuovi raggi, o più esattamente è ridotta ad un certo stato elettrico positivo, che essa raggiunge anche se è presa allo stato naturale.

Di più, dimostrai altravolta [1] che sotto l'azione dei raggi ultravioletti si genera una energica convezione di elettricità negativa dalla superficie di una lastra isolante che non ha carica propria, ma è semplicemente polarizzata per trovarsi in un campo elettrico. Sono riescito ad ottenere un analogo fenomeno anche mediante i raggi di Röntgen, e qui descriverò la relativa esperienza con dettaglio, in quanto che con essa si ottengono delle imagini, che se finora non sono riescite così perfette e dettagliate come quelle che dà la fotografia, hanno però il pregio di richiedere un tempo d'azione generalmente minore.

4. *Ombre elettriche prodotte coi raggi di Röntgen.* Una lastra metallica AB isolata è mantenuta elettrizzata da una piccola macchina elettrica, fino ad un potenziale corrispondente all'incirca a quello necessario per una scintilla nell'aria da 6 a 8 millimetri. Per regolare questo potenziale ho l'uso di mettere gli eccitatori della macchina a 8 mm. di distanza, e di girare tanto lentamente la manovella, che fra essi non scocchino scintille.

A 3 o 4 c. al di sopra della lastra A si trova un telaio BC nel quale è teso un cartone nero, coperto, nella sua faccia inferiore, di foglie d'allu-

minio, in comunicazione col suolo. Più su ancora, e a 14 o 15 c., è collocato il tubo di Crookes T.

Per eseguire l'esperienza si mette, a metà dell'intervallo fra A e BC, una lastra d'ebanite, che un momento prima è stata asciugata e scaricata sopra una fiamma, e sopra il cartone si pone un oggetto qualunque, per esempio una busta di compassi chiusa. Si fa agire il tubo di Crookes per un paio di minuti; poi si toglie di posto la lastra d'ebanite, e si proietta sulle sue due faccie il noto miscuglio di solfo e minio.

[1] *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*, II Memoria. Atti del R. Istituto veneto, serie 6ª, t. VII. — N. Cimento, 3ª serie, t. XXV, p. 194 (1889).

Apparisce immediatamente su ciascuna faccia una imagine o ombra degli oggetti posti sul cartone, per esempio della scatola di compassi. Non solo si riconosce il contorno della busta, ma più marcatamente l'ombra dei compassi in essa contenuti. Se la lastra *A* era carica negativamente, l'ombra dei compassi e della busta è rossa in fondo giallo sulla faccia dell'ebanite che era rivolta in su, e gialla in fondo rosso sulla faccia opposta.

Queste nuove ombre elettriche riescono particolarmente bene allorchè la lastra d'ebanite è posata sulla lastra metallica *A*. È bene che in tal caso l'ebanite porti incollata sulla faccia inferiore una foglia di stagno, e allora si proietteranno naturalmente le polveri solo sulla faccia nuda.

Con quest'ultima disposizione, e facendo durare l'azione del tubo di Crookes per 4 o 5 minuti, ho ottenuto una bella ombra della mia mano distesa sul cartone BC. In essa appariscono d'un rosso più carico (se *A* è —) le parti corrispondenti alle ossa della mano, per cui s'intravvede il contorno di queste.

5. *Esperienza dimostrativa sulla dispersione prodotta dai raggi X.* Per mostrare a più persone questo fenomeno, si può adoperare un semplice elettroscopio a foglie d'oro, e così feci davanti alla R. Accademia di Bologna. Ma si può fare invece quest'altra esperienza.

Una grande lastra isolata riceve i raggi di Röntgen, e comunica con un elettrodo di un piccolo tubo di Geissler, di cui l'elettrodo opposto comunica con una armatura di un condensatore carico. Naturalmente la seconda armatura di questo deve comunicare col suolo.

Se la carica è assai forte, il tubo s'illumina in seguito alla dispersione energica che ha luogo dal contorno della lastra; ma dopo poco il tubo diviene oscuro. Se a questo istante si eccita il tubo di Crookes, il tubo di Geissler s'illumina nuovamente, per effetto della dispersione provocata dai raggi di Röntgen.

Ho descritto qui questa esperienza perchè mi gioverà richiamarla nel seguente paragrafo.

6. *Azione dei raggi di Röntgen sul radiometro.* I signori Gossart e Chevallier hanno descritto recentemente delle esperienze interessanti [1], dalle quali essi deducono la conseguenza, che entro un radiometro posto presso un tubo di Crookes in azione, si manifesta *un campo di forza meccanica*, in virtù del quale il molinello, che prima girava sotto l'azione d'una sorgente luminosa qualunque, si arresta, non appena il radiometro è colpito dai raggi X. Fra le altre osservazioni c'è anche questa, che, una volta arrestato, il molinello non riprende a girare, anche dopo che si è cessato di eccitare il tubo di Crookes, che in capo a quasi cinque minuti.

I fenomeni elettrici, dei quali qui mi sono occupato, mi hanno suggerito

(1) C. R. n. 6 (1896).

una spiegazione di quel fatto singolare, che metto avanti però con riserva. Siccome ogni corpo si elettrizza positivamente allorchè è colpito dai raggi X, così è certo che la parte del palloncino del radiometro, rivolta verso il tubo di Crookes, si elettrizzerà. Il prodursi di questa carica e il suo successivo disperdersi, deve provocare un movimento di elettricità, o una convezione elettrica, nel gas rarefatto, press' a poco come accade entro il tubo di Geissler della precedente esperienza. Questa convezione deve poi determinare un orientamento del molinello, di cui una delle alette si immobilizza verso la parte elettrizzata.

È noto che si può ottenere questa orientazione elettrizzando direttamente il vetro, e che essa ha luogo, quantunque per altra causa, scaldando un punto del palloncino (1).

D'altronde, se anche non si vuol tener conto dei moti molecolari del gas, basta riflettere che una carica elettrica localizzata in una porzione della parete del palloncino, deve orientare il molinello.

Per mettere alla prova la spiegazione proposta, ho eseguito più volte l'esperienza, alternativamente col palloncino ben asciutto esternamente, o completamente bagnato. Il molinello girava lentamente sotto l'azione della luce diffusa e si arrestava, non appena il tubo di Crookes era posto in azione, se la superficie esterna del vetro era ben asciutta. Se questa era bagnata, il molinello continuava a girare liberamente anche sotto l'azione dei raggi X. Evidentemente, non si poteva in tal caso localizzare una carica in una porzione di parete, e la forza orientatrice mancava.

Non voglio asserire che l'elettrizzarsi del palloncino sia la causa unica del fenomeno osservato dai signori Gossart e Chevallier; ma almeno mi sembra che abbia una parte notevole nella produzione del fenomeno stesso.

Fisica. — *Sulla produzione delle ombre di Röntgen, per mezzo della dispersione elettrica provocata dai raggi X.* Nota del Corrispondente AUGUSTO RIGHI.

Dopo compiuta la redazione della precedente Nota, *Sulla dispersione della elettricità prodotta dai raggi di Röntgen*, mi è stato possibile il semplificare e perfezionare alquanto l'esperienza descritta nel § 4 di quella Nota.

Prima di tutto ho soppresso la piccola macchina ad influenza colla quale si crea il campo elettrico nel quale è collocata la lastra di ebanite che riceve la radiazione. Anche se le due lamine conduttrici A e BC (vedi la seconda figura della Nota citata) sono entrambe in comunicazione col suolo, si ottiene, dopo qualche minuto d'azione del tubo T, una imagine sull'ebanite,

(1) *La scienza applicata*, vol. I, parte II, fasc. 8.

nell'atto in cui si proietta su di essa il miscuglio di minio e solfo. Ritengo che l'effetto sia dovuto alla formazione di una carica positiva nelle parti del dielettrico che sono colpite dalle radiazioni. Però le imagini così ottenute sono sempre assai deboli. Qualche volta esse riescirono con cariche inverse di quelle che la spiegazione data farebbe prevedere, per cui, se quella spiegazione si vuol mantenere, bisogna attribuire questi casi eccezionali a cariche eletttriche rimaste nella ebanite, ad onta delle precauzioni prese per eliminarle.

Per avere belle imagini conviene dunque caricare la lastra metallica su cui è posata l'ebanite. A questo scopo basta mettere in comunicazione col suolo, oltre che la lamina BC, anche l'anodo del tubo di Crookes T, e mettere i due dischi di un condensatore ad aria (p. es. il comunissimo condensatore di Epino), in comunicazione, l'uno col catodo del tubo T e l'altro colla lastra metallica A, e per conseguenza coll'armatura di stagnuola incollata nella faccia inferiore dell'ebanite.

Allo scopo poi di ottenere ombre ben nette, ho sollevato la lastra A finchè la faccia superiore dell'ebanite (la quale è bene sia grossa almeno un centimetro, affinchè non perda troppo facilmente la sua forma piana) si trovi a uno o due millimetri di distanza dalla lastra BC. Però, quanto più piccola è questa distanza, e tanto più piccola deve essere la differenza di potenziale massima fra A e BC, giacchè se si oltrepassa un certo limite, si producono piccole scariche fra l'ebanite e il conduttore BC (la così detta pioggia di fuoco, visibile nell'oscurità).

Occorre dunque regolare a dovere la distanza fra i due dischi del condensatore ad aria, e perciò si comincia col metterli assai vicini, per poi allontanarli poco a poco, sinchè si constati la formazione di ombre perfette.

Coll'ebanite tanta vicina alla lamina BC (che, secondo la descrizione della precedente Nota, è di cartone nero rivestito inferiormente di foglie d'alluminio) è impossibile ottenere l'ombra della mano, giacchè, quando essa è posata sul cartone, determina, col proprio calore, una specie di distillazione dell'umidità del cartone, che si condensa sull'ebanite, e la rende superficialmente conduttrice. Ho tolto di mezzo questo inconveniente sostituendo alle foglie di alluminio, una lamina del medesimo metallo, grossa circa un decimo di millimetro. È bene che sopra questa lamina resti il cartone, giacchè questo impedisce le deformazioni che essa potrebbe subire in causa del peso o della pressione esercitata dagli oggetti dei quali si vuole ottenere l'ombra sull'ebanite.

Ho riconosciuto poi che si guadagna assai nella perfezione delle ombre, sostituendo alle solite polveri il miscuglio di licopodio e minio.

In conclusione, l'esperienza viene eseguita nel modo seguente. Regolata una volta per tutte la distanza fra le due armature del condensatore ad aria, si asciuga e si scarica sopra una fiamma l'ebanite, e la si colloca colla sua

armatura in contatto della lastra A, in modo che la faccia nuda della ebanite si trovi vicinissima all'alluminio. Poi si colloca sul cartone *BC* la mano o l'oggetto qualunque del quale vuol prodursi l'ombra, e si mette in azione il tubo di Crookes. Nel caso mio, essendo il tubo a circa 15 c. di altezza sul cartone, per avere una buona ombra della mano occorrono sette a otto minuti, mentre per l'ombra dei compassi chiusi nella loro busta, basta assai meno. Dopo ciò si ritira l'ebanite e si proietta su di essa la polvere.

Le parti che furono colpite dai raggi di Röntgen divengono gialle, mentre le parti ombreggiate da grossi oggetti metallici si coprono di rosso. Le due tinte sono più o meno intense, a seconda della maggiore o minore trasparenza od opacità degli oggetti collocati sul cartone. Ad un certo grado medio di trasparenza corrispondono nell'ebanite regioni nere, perchè prive di polvere.

Come ho spiegato altra volta a proposito delle ombre elettriche, il depositarsi del minio nelle parti non colpite dalla radiazione, non indica che ivi realmente si trovi una carica negativa. Accade infatti che, mentre dai punti dell'ebanite colpiti dai raggi di Röntgen si disperde dell'elettricità negativa, restandovi altrettanta elettricità positiva, la carica positiva così formata induce una carica negativa nell'armatura della lastra, allorchè questa è tolta dall'apparecchio allo scopo di spolverarla. Può darsi benissimo che questa carica negativa dell'armatura attiri e trattenga la polvere di minio, nei luoghi ove l'ebanite non ha carica positiva.

Ad ogni modo, la presenza dei due colori fa sì, che mentre queste mie ombre elettriche mostrano la presenza di masse metalliche nascoste, forse con maggior evidenza di quella che offrono le fotografie, esse hanno un aspetto assai diverso da quello delle ombre ottenute col processo fotografico. Ho quindi voluto cercare di ottenere le ombre elettriche ad una sola tinta, e vi sono riescito come segue.

Proiettando sulla lastra, dopo che ha ricevuto le radiazioni, una polvere unica, per esempio licopodio, ho *qualche volta* ottenuto l'intento, ma non sempre, giacchè in certi casi la polvere usciva dal soffietto senza essere abbastanza elettrizzata. Bisognava dunque, per avere risultati sicuri, continuare a far uso di un miscuglio di due polveri; ma basta che una di queste abbia lo stesso colore della lastra, e cioè sia nera, nel caso dell'ebanite, affinchè il risultato in vista venga raggiunto.

Il miscuglio di minio e solfuro d'antimonio, già indicato da Böttger [1], mi ha dato un discreto risultato, giacchè mentre il solfuro poco si distingue sulla ebanite, il minio, che aderisce nelle ombre, si vede nettamente. Ma, dopo numerosi tentativi, sono giunto a trovare un miscuglio di polveri che, anche pel loro colore, dà ottimi risultati. Questo miscuglio si ottiene con pesi all'in-

[1] Pogg. Ann. t. XCVIII, p. 170 (1856).

circa eguali di talco, e di biossido di manganese, in polveri impalpabili. Le particelle bianche di talco escono dal soffietto elettrizzate negativamente, mentre le particelle nere del biossido assumono carica positiva.

Con questo miscuglio si ottengono ombre con gradazioni simili a quelle che mostra la copia positiva allorchè si procede col metodo fotografico. Ed invero, mentre la polvere nera che si accumula nelle ombre intense non si distingue sull'ebanite, la polvere bianca si addensa nelle parti che ricevettero colla massima intensità le radiazioni, e forma uno strato di densità via via minori in quelle regioni nelle quali le radiazioni giunsero con intensità di più in più piccola. Benchè i luoghi ove la polvere bianca è in maggior quantità non assumano che una tinta color cenere, le ombre sono così nere, che fra questi due estremi può stare tutta una ricca gamma di tinte intermedie.

Naturalmente se, come oggetto proiettante l'ombra, si prende una mano, si distinguono nell'ombra elettrica i contorni delle ossa.

Appendice — (aggiunta correggendo le bozze il 4 marzo 1896). — Dò qui, per prendere data, una breve notizia di esperienze eseguite sulla dispersione elettrica provocata dai raggi Röntgen su conduttori circondati da aria rarefatta.

Partendo dalla pressione ordinaria, che poi grado a grado si diminuisce, si osserva dapprima un leggiero aumento della dispersione elettrica sino ad un massimo, dopo di che torna a diminuire. La fase di diminuzione, che comincia quando la pressione è ridotta a qualche millimetro, è la più importante, giacchè essa è assai rapida. Infatti, quando la pressione è ridotta a qualche centesimo di millimetro, la dispersione elettrica è quasi annullata. Ciò indicherebbe la necessità della presenza delle molecole gassose in numero sufficiente, per effettuare il trasporto dell' elettricità dalla superficie del conduttore che riceve le radiazioni.

Anche il potenziale positivo finale, al quale è portato un conduttore esposto alle radiazioni di Röntgen, varia colla pressione del gas che lo circonda. Ho constatato infatti che esso cresce moltissimo al diminuire della pressione, risultato identico a quello che ottenni altra volta coll' impiego dei raggi ultravioletti.

Tutto ciò sarà esposto in altra Nota, nella quale renderò conto anche dell' influenza che sulla dispersione elettrica, prodotta dai raggi di Röntgen, ha la natura del gas ambiente.

Fisica. — *Sulle direzioni d'estinzione, relative alle onde elettriche, nei cristalli di gesso.* Nota del Corrispondente Augusto Righi.

In una Nota presentata a questa Accademia il 17 novembre 1895, ho fatto vedere come in una lastra di gesso colle sue faccie parallele alla sfaldatura

principale, posta fra l'oscillatore ed il risonatore incrociati, le due direzioni di estinzione (e cioè quelle direzioni che sono parallele l'una al risonatore e l'altra all'oscillatore, allorchè, girata opportunamente la lastra nel proprio piano, l'azione sul risonatore è nulla come in assenza della lastra) sono press'a poco l'una parallela e l'altra perpendicolare alla direzione della sfaldatura secondaria non fibrosa (1). Di più ho formulato l'ipotesi che soltanto con onde infinitamente lunghe, il parallelismo fra una delle direzioni d'estinzione e la direzione della sfaldatura non fibrosa sarebbe rigoroso, per cui questa nuova relazione geometrica fra il comportamento delle onde nel gesso e la sua forma cristallina, che a giudizio di alcuni cristallografi avrebbe una certa importanza, costituirebbe forse una legge limite.

Mi ha sembrato interessante il misurare colla maggior possibile precisione gli angoli che fa la sfaldatura non fibrosa colle due direzioni d'estinzione, onde vedere se e quanto questi due angoli differiscano de 0° e 90°. Ho proceduto nel modo seguente:

Da una lastra di gesso grossa circa 3,5 c. ho tagliato un disco di 11,5 c. di diametro, ed ho segnato sulle sue due faccie con una punta finissima il diametro parallelo alla sfaldatura non fibrosa.

Per fissare questa direzione ho profittato della sfaldatura fibrosa, provocata sollevando in porzione del disco un sottile strato di gesso, giacchè questa sfaldatura riesce netta e rettilinea, mentre l'altra assume spesso forme curve, ed ho tracciato sul gesso, oltre alla direzione della sfaldatura fibrosa, una retta ad essa perpendicolare. Su queste due rette ortogonali ho misurato, aiutandomi con una lente, due cateti, calcolati in modo che l'ipotenusa, che ne congiungeva le estremità, facesse colla sfaldatura fibrosa un angolo (circa 67°) eguale a quello noto che fanno fra loro le due sfalda-

(1) Nella citata Nota rilevai come il prof. Garbasso, che per primo scoprì la doppia rifrazione delle onde elettriche nel gesso, fosse giunto ad un risultato diverso, e cioè che le linee d'estinzione per le onde elettriche facevano angoli eguali a 45° con quelle relative alle onde luminose, il che porta ad una differenza di circa 6° rispetto ai risultati più esatti che riferirò più oltre. Per spiegare quella notevole differenza, cercai di attribuirla ad una causa di errore che poteva essere sfuggita al Garbasso senza sua colpa, e che a me non era passata inosservata, perchè l'avevo studiata in precedenza. Alludo qui ai fenomeni prodotti dai dielettrici di forma allungata, che descriverò in una prossima pubblicazione.

Ad onta di ciò, il prof. Garbasso, in una recente Nota insiste nel combattere alcune mie asserzioni. Non entrerò in una polemica la quale, cessando di essere puramente obbiettiva, offrirebbe poco interesse ai lettori, e non avrebbe in queste pagine il posto conveniente, tanto più che sento di non avere nulla a mutare a quanto esposi nella mia Nota citata. E neppure mi fermerò a dimostrare come fosse ragionevole il prevedere, come mi accadde di fare, la non coincidenza fra le linee d'estinzione relative alla luce e quelle relative alle onde elettriche, ragionevolezza che mi sembra evidente, e che tale è stata riconosciuta da quelli che hanno fatto delle recensioni dal mio lavoro, mentre è messa in dubbio dal mio egregio contradditore.

ture. Questa ipotenusa ha segnato così la direzione della sfaldatura non fibrosa.

L'operazione, eseguita con la massima attenzione sulle due faccie della lastra, ha dato due direzioni che sono riescite perfettamente parallele, giacchè l'una si può far coincidere coll'altra, osservando la lastra per trasparenza.

Il disco di gesso è stato allora fissato concentricamente ad un anello, del diametro esterno di 43 c. e colla periferia divisa in gradi, mobile intorno al proprio centro in una finestra circolare di diametro un po' maggiore praticata in un diaframma verticale collocato fra l'oscillatore ed il risonatore. Si può così misurare con precisione (i decimi di grado si valutano ad occhio) la rotazione data al gesso, il quale è messo in modo che la direzione tracciata sulle sue faccie, che segna la direzione della sfaldatura non fibrosa, coincida col diametro 0°-180°.

Siccome l'indice, fisso sul diaframma, col quale si leggono i gradi sull'anello mobile, è collocato in corrispondenza al punto più basso di esso, così quando sulla graduazione si legge 0° oppure 180°, la sfaldatura non fibrosa è sensibilmente verticale.

Contro il gesso ho collocato una grande lastra di rame con un foro circolare del diametro di 8 c., cioè alquanto minore del diametro del gesso.

Prima che il gesso fosse messo al suo posto si era dato all'oscillatore [1] una tal posizione che il suo asse, e cioè la retta passante pei centri delle quattro sfere metalliche, fosse sensibilmente verticale; poi si era disposto il risonatore in modo da essere esattamente perpendicolare all'asse dell'oscillatore [2].

Girando il gesso nel proprio piano, ho determinato le due orientazioni (fra loro ortogonali) che deve avere, affinchè l'azione sul risonatore rimanga nulla, ed ho trovato che in una di quelle due orientazioni la direzione tracciata sul gesso riesce quasi verticale. Anzi ho letto sulla graduazione (media di quattro misure) 1°,6.

Questo valore può non essere quello cercato, in quanto che nulla assi-

(1) Per la descrizione dei miei apparecchi vedi Mem. della R. Acc. di Bologna, serie V^a, t. IV, pag. 487 (1894).

(2) Se tutte le scintille che rapidamente si succedono nell'oscillatore generassero onde di eguale intensità, per determinare la direzione del risonatore perpendicolare e quella dell'oscillatore, basterebbe prendere la media fra le due direzioni, poste l'una da una parte e l'altra dalla parte opposta rispetto alla direzione cercata, per le quali spariscono le scintille nel risonatore. Ma così non è, giacchè mano a mano che il risonatore si avvicina ad essere perpendicolare all'oscillatore, le scintille, che in esso si osservano, divengono grado a grado più rare e più deboli, ciò che produce incertezza nella determinazione. Ma trovai modo di superare questa difficoltà, ed ecco come.

Si sposta il risonatore di piccoli intervalli per volta, per esempio di un mezzo grado, finchè si giunga al punto che nessuna scintilla si presenti in esso, anche aspettandola per circa un minuto primo, e perciò è comodo contare le battute d'un orologio

cura che il diametro dell'anello, passante per lo zero della graduazione, sia esattamente parallelo all' asse dell' oscillatore. Perciò ho dovuto procedere alla seguente determinazione.

Levato il gesso, l'ho sostituito con un risonatore, collocato in modo da essere esattamente sul diametro 0°-180° dell' anello graduato, ed ho determinato l'orientazione che esso deve avere onde sia nulla l'azione che sul medesimo esercita l'oscillatore. Questa orientazione sarebbe stata corrispondente alla lettura di 90° o di 270°, se la condizione menzionata circa la posizione relativa dell'anello graduato e dell'oscillatore fosse stata verificata. Ho trovato invece (come media di quattro misure) una differenza di 0°,3, di senso tale da ridurre l'angolo fra una delle direzioni d'estinzione e la direzione della sfaldatura non fibrosa, a 1°,3.

Questo angolo è di segno tale che la detta direzione di estinzione fa colla sfaldatura fibrosa un angolo di 67° — 1°,3 = 65°,7.

Ammesso, come risulta dalla media fra le determinazioni di vari fisici, che una delle direzioni d'estinzione per la luce (e precisamente la bisettrice dell'angolo acuto degli assi ottici) faccia un angolo di 38° colla perpendicolare alla sfaldatura non fibrosa, risulta che le direzioni d'estinzione per le onde elettriche fanno con quelle relative alle onde luminose (di media rifrangibilità) angoli di 39°,3 di 50°7.

Concludendo, la direzione della sfaldatura non fibrosa non coincide esattamente con una delle direzioni d'estinzione per le onde elettriche, ma fa con essa un angolo di circa un grado.

Sarebbe interessante, ma difficile, stante la poca probabilità di trovare grandi cristalli di gesso, ripetere le misure con onde più lunghe di quelle da me adoperate (10,6 c.), onde vedere se una delle direzioni d'estinzione si accosti anche più alla direzione della sfaldatura non fibrosa. Con onde più brevi (2,6 c.) di quelle adoperate prima, non ho ottenuto risultati che diano affidamento di sufficiente esattezza.

---

a pendolo che sia a poca distanza. Letta la posizione che occupa allora il risonatore, si ripete una simile determinazione collocando il risonatore dalla parte opposta rispetto alla direzione cercata, e si prende la media delle due letture. Si vengono così a fissare le due orientazioni, per le quali cessano di prodursi scintille nel risonatore in corrispondenza alle più intense delle onde generate dalle successive scintille dell'oscillatore. Coll'attesa di circa un minuto prima di constatare l'assenza delle scintille, la precisione delle determinazioni è sufficiente, giacchè ripetendo le misure, raramente si trovano differenze che superino un mezzo grado.

In modo simile si procede allorchè, come è detto più oltre, il risonatore resta fisso, ed invece si muove il gesso onde determinare la direzione delle sue linee d'estinzione. Così pure ho l'uso di procedere in ogni altra determinazione, per esempio in quelle delle lunghezze d'onda, e degli indici di rifrazione, col metodo di Boltzmann.

È preferibile far uso di un risonatore già a lungo adoperato, poichè la sensibilità di uno nuovo, scema troppo rapidamente in sul principio.

Fisica. — *Alcune esperienze coi tubi di Hittorf e coi raggi di Röntgen.* Nota del Corrispondente A. Ròiti.

Mi permetta l'Accademia d' indicarle alcune fra le molte esperienze che ho fatto in questo mese, sebbene siano ancora imperfette ed impari al lavoro che m' hanno costato, e sebbene io possa essere stato prevenuto da altri, che probabilmente avranno raccolto frutti migliori de' miei.

1. *Ombre e penombre.* Röntgen dice che i raggi X partono dal posto ove la parete del tubo è colpita dai raggi catodici, e soggiunge che se i raggi interni sono deviati da una calamita, i raggi X partono da un altro posto, cioè di bel nuovo dalle estremità dei raggi catodici. Tutti gli altri osservatori confermano questa circostanza; alcuni suppongono anzi che la causa dei raggi di Röntgen sia la fluorescenza destata nel vetro dai raggi catodici, altri ammettono che tale fluorescenza sia una condizione necessaria per la loro emissione, altri pochi sono più riservati, e fra questi ultimi sono io che inclino a ritenere la fluorescenza un fenomeno puramente concomitante.

Ma prima di affrontare questa questione ho voluto, per mia soddisfazione, cercare di stabilir bene il luogo geometrico d' onde emanano i raggi di Röntgen ed il modo dell' emanazione. I raggi X partono dalla parete del tubo; ma partono da ciascun punto di essa come prolungamenti dei raggi catodici interni, oppure li emette la parete in direzione normale, o in tutte le direzioni?

Viene subito in mente di osservare le ombre portate e le penombre: ed infatti, limitando il fascio impressionante con opportuni schermi metallici opportunamente forati, mi sono persuaso che le penombre vi sono sempre, anche se i raggi catodici partono da un punto, per poco che il corpo opaco si trovi discosto dalla lastra. A primo aspetto si penserebbe di aver davanti un fenomeno di diffrazione, perchè si osservano quasi sempre nelle penombre delle alternative di maggiore e minore intensità; ma bisogna andar guardinghi sapendo che i raggi catodici interni si riflettono sul metallo e sul vetro.

La cosa si complica ed è giustificato il dubbio per l' ignoranza in cui siamo relativamente alla possibile lunghezza d' onda, poichè i contorni sarebbero sfumati anche per grandi frequenze se la velocità di propagazione fosse grandissima. Ad ogni modo ho tentato di ridurre ad un punto il luogo di emanazione dei raggi X, prendendo per catode uno specchio sferico col centro di curvatura sulla parete d' un palloncino di vetro [1].

[1] Grandi difficoltà ho dovuto sormontare per costruire qui dei tubi vuoti, ma dopo innumerevoli insuccessi, il sig. Adolfo Calamandrei, conservatore del Museo degli strumenti antichi, comincia con rara perseveranza ad uscire dal noviziato e riesce a soffiare qualche tubo che regge, e che è abbastanza regolare. È doveroso che gliene esprima la mia riconoscenza.

Il palloncino è rappresentato ad un terzo del vero dalla fig. 1, il suo specchio concavo d'alluminio ha 40 mm. di raggio di curvatura, l'anode filiforme si trova nella tubulatura laterale. Dopo averlo vuotato il più che mi fosse possibile, esso presentava una splendida fluorescenza; ma la presentava su tutta quanta la superficie, e direi quasi più intensa nella tubulatura contenente l'anode. Ho notato però che, tenendo l'anode in comunicazione col condotto del gas illuminante, la fluorescenza si raccoglieva sopra una callotta opposta al catode, pronta a risplendere per tutto se alitavo contro il palloncino.

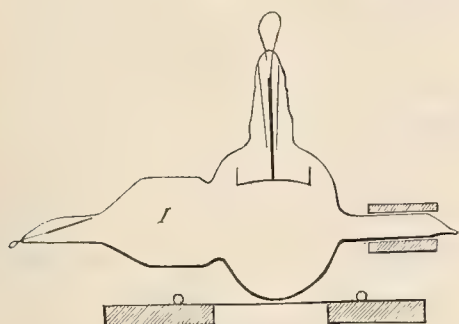



Fig. 1ª
(1/3 del vero)

Immergendo poi il fondo del palloncino nell'acqua depositata sopra una sottilissima lamina di mica, la fluorescenza scompariva quasi interamente. In queste condizioni ho potuto ottenere delle impressioni ben delineate, finchè gli oggetti erano vicini alla lastra fotografica; ma sfumate quando n'erano discosti. Per esempio, una rete metallica a maglie di 1 mm., incliata a 45° sulla lastra e sull'asse dello specchio, ha dato l'ombra ben distinta solamente nei punti vicini; ma ad 1 cm. circa dalla lastra non si distinguevano già più le maglie: e la lastra era a 14 cm. dal fondo del palloncino.

Le sfumature provengono forse dalla circostanza che i raggi non partono dal solo punto del palloncino ov'è il centro di curvatura dello specchio catodico? oppure dalla periodicità dell'azione, non abbastanza regolare per dare le frangie di diffrazione, ma sufficientemente lunga nello spazio per turbare la nettezza dei contorni?

Una lampadina elettrica col bulbo spulito, delle dimensioni del palloncino, posta alla stessa distanza, mi ha dato le ombre presso a poco sfumate come quelle fissate sulla lastra suddetta. E quantunque le condizioni non fossero identiche, perchè la lampadina splendeva tutto intorno, mentre il palloncino era debolmente fluorescente solo nelle immediate vicinanze del centro dello specchio, pure mi pare che anche nel caso dei raggi di Röntgen le sfumature sieno da attribuirsi alla diffusione della parete di vetro, la quale per emanarli non abbisogni di essere fluorescente [1]. In conferma di ciò posso citare le ombre a contorni ben definiti che ho ottenuto anche da distanze

[1] A titolo di curiosità presento la positiva di un'impressione di noci, nocciuole, mandorle, castagne nel loro guscio, ottenuta con questo palloncino mentre non era quasi niente luminoso. Delle foglie di oleandro e di leccio hanno lasciato sulla negativa qualche lieve traccia delle loro nervature: ed è certo che si potranno ottenere belle fotografie dello scheletro delle foglie, variando opportunamente la durata della *posa*.

ragguardevoli, quando limitava il fascio impressionante con uno schermo avente una piccola apertura. Ma di ciò dirò più oltre.

2. *Contegno d'un tubo durante la sua vuotatura.* Il tubo che chiamo H (fig. 2 ad un sesto del vero) è cilindrico, lungo 150 mm. e del diametro di 40 mm., ha uno specchio sferico di 4 cm. di raggio di curvatura, ed il centro di curvatura si trova nel centro d'un anello di filo d'alluminio, che serve da anode. Dallo specchio al fondo del tubo (che è una callotta sferica) corrono 122 mm.

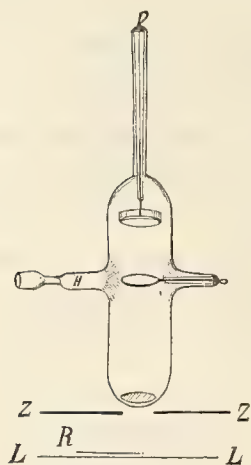



Fig. 2
(1/6 del vero)

Ho adoperato questo tubo tenendolo sempre attaccato ad un'ottima tromba di Geissler, così da farne variare la rarefazione a piacere. E per seguirne le varie fasi di luminosità, l'ho inserito in serie con uno spinterometro a palline sul secondario di un grande rocchetto di Ruhmkorff eccitato in modo da dare, con un interruttore rapido di Deprez, delle scintille di 6 cm. fra punte nell'aria. L'inserzione dello spinterometro è necessaria se nei primi stadî si vuole eliminare la luminosità prodotta dalle correnti di chiusura che, per la persistenza delle imagini sulla retina, si sovrapporrebbe alla luminosità destata dalle correnti di apertura. Lo specchio era il catode per quest'ultime correnti, e l'anode era l'anello comunicante collo spinterometro.

Trascuriamo gli stadî preliminari nei quali si manifestava ancora la luminosità positiva, e fermiamoci al *primo stadio* della sola luminosità negativa nella quale si sogliono distinguere tre strati: il primo più prossimo al catode, è di color camoscio; il secondo è denominato spazio oscuro, ma veramente, come ha rilevato il Goldstein, è di color celeste; il terzo strato, più splendente in sulle prime, è di vario colore a seconda delle circostanze, violaceo nell'aria rarefatta, bianchiccio per lo più quando è stata estratta tutta l'aria ed il tubo è invaso dagli aeriformi già assorbiti dagli elettrodi e dal vetro [1].

[1] Questa luminosità bianchiccia è difficilissima da eliminare, specialmente se il tubo è stato a lungo in comunicazione coll'atmosfera. Avevo qui da parecchi anni un tubo fornitomi aperto dal Müller di Bonn e non mai vuotato. Ora, dopo un'ostinata azione della tromba a mercurio facendolo senza posa attraversare dalla scarica elettrica, sono riuscito a fargli assumere una bella fluorescenza verde e ad ottenerne una buona prova fotografica: ma poi la luminosità bianchiccia è ricomparsa e con essa il tubo ha perduto la sua efficacia. E ciò s'è ripetuto per ben tre volte che l'ho vuotato.

Il criterio che mi serve a riconoscere se un tubo si guasta, perchè vi si apre qualche angustissimo meato, o perchè vi si espandono degli aeriformi prima condensati all'interno, è il colore della luminosità: violaceo o rossiccio nel primo caso, biancastro nel secondo. Buone precauzioni, perchè un tubo duri, sono di arroventarlo in tutte le sue parti mentre

In questo primo stadio il secondo strato forma il doppio cono azzurrognolo col vertice nel centro di curvatura dello specchio, attraversa la luminosità bianchiccia e dove incontra il vetro vi suscita la fluorescenza, molto più viva al fondo del tubo, che si arroventa a tal punto da apparire rosso per un momento quando si sospendono le scariche.

Aumentando la rarefazione, il terzo strato si estende, impallidisce ed alla fine si dilegua. Qui diremo che comincia un *secondo stadio* nel quale si possono condurre al contatto le palline dello spinterometro senza che l'anode diventi luminoso. Il vertice del doppio cono celeste non è più al centro di curvatura, ma più lontano dal catode, ed il color camoscio del primo strato si è prolungato. La fluorescenza diventa più intensa lungo la parete risalendo dal fondo, ed il fondo va abbassandosi di temperatura, così che si può toccarlo senza scottarsi.

Colla scomparsa della luce biancastra, cioè al principio del *secondo stadio*, comincia a diventare ben visibile il fondo del criptoscopio spalmato di platino-cianuro di bario: e quindi si può dire che di qui cominci il buono dell'azione di Röntgen [1].

Spingendo ancora più oltre la rarefazione, il doppio cono si assottiglia sempre più, impallidisce anch'esso, diventa invisibile, e da ultimo scomparisce pure l'aureola color camoscio ond'era soffusa finora la concavità del catode. In questo *terzo stadio* lo splendore della parete laterale e quello nel criptoscopio sono al loro massimo: il fondo del tubo è appena tepido e meno lucente, anzi ha l'apparenza di essere come imbrattato da un fluido color caffè, che va risalendo alla guisa che risale l'alcool versato in fondo ad una coppa bagnata d'acqua.

Da questo terzo stadio, che ritengo il più efficace, insistendo ancora colla tromba, il passaggio della elettricità si fa più difficile, avviene come per sussulti, in corrispondenza ai quali qualche scintilla lambisce la parete esterna del tubo senza che si stacchi dagli elettrodi, ed i reofori esterni al tubo mandano degli sprazzi di luce violacea. Ma prima di ciò la fluorescenza si

---

si soffia e di applicarlo senza indugio alla tromba, od almeno di serbarlo chiuso ermeticamente. Durante l'azione della tromba conviene farvi passare continuamente delle scariche alternate e più forti e più frequenti di quelle che vi si manderanno poi, dopo il distacco dalla tromba.

Citerò anche il caso di una tromba di Bessel-Hagen che ho lasciata inoperosa per alcuni anni e comunicante coll'atmosfera perchè non v'era il mercurio. Con essa, sebbene a tenuta perfetta, non mi è ancora riuscito di eliminare interamente la luminosità bianchiccia del terzo strato catodico: e la tengo in azione da una settimana circa!

[1] *Aggiunta nel correggere le bozze* (5 marzo). — Ho ottenuto una fotografia anche da un tubo che si trovava nel primo stadio, ed era tutto invaso dalla luminosità biancastra; ma ciò a condizione che scoccassero nell'aria delle scintille di 4 cm. davanti all'anode. Sopprimendo queste scintille, la fotografia mancava, malgrado una lunga posa.

indebolisce sulle pareti taterali per ridursi alla callotta terminale; ed il campo del criptoscopio va facendosi più debole.

Anche altri due tubi furono da me seguiti in tutte queste fasi di luminosità.

3. *Ombre direttamente ingrandite.* Ho disposto il tubo *H* orizzontalmente; ho collocato a 5 mm. dal suo fondo la fenditura del banco di diffrazione dandole la larghezza di 1 mm., ho collocato a 48 mm. dalla fenditura un reticolo formato di fili di rame paralleli ad essa e così sottili che ne erano compresi 25 in 20 mm. Dietro al reticolo ed a distanze diverse ponevo la lastrina fotografica involtata in più doppi di carta nera.

Nel prendere questa fotografia ho avuto cura di mantenere la rarefazione nel terzo stadio, cioè al punto che non si vedesse più l'aureola color camoscio e che tutta la parete avesse un'intensa fluorescenza: e per ciò dovetti ricorrere spesso alla tromba, giacchè il semplice fatto delle scariche prolungate, muta le condizioni interne dell'aeriforme. In queste condizioni e coll'interruttore rapido ho ottenuto, fra le altre, le due fotografie *p* e *q* che presento, e coll'interruttore lento a mercurio la *r*. Per la *p* la distanza fra reticolo e lastra era di 13 mm., per la *q* era di 96 mm. e per la *r* di 120 mm.

Siamo ancora lontani dalla *microscopia dell'invisibile*; ma ad ogni modo abbiamo ottenuto un ingrandimento da 2 a 7 con contorni abbastanza definiti.

4. *La fluorescenza pare non sia condizione necessaria all'emanazione dei raggi di Röntgen.* Mi pare poter conchiudere da quanto precede che le onde, se onde ci sono, dei raggi di Röntgen debbano essere corte; e ritengo di aver provato che la sfumatura delle ombre, anche nel caso del palloncino *I* sia da ascriversi alla grande estensione della superfice di emissione, sebbene la parte fluorescente fosse piccolissima.

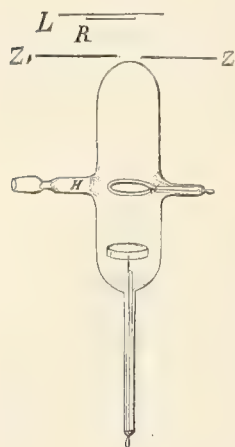



Fig. 3
(1/6 del vero)

Quest'altra esperienza mi pare che dimostri come i raggi di Röntgen possano avere origine anche senza fluorescenza.

Nel tubo *H* dianzi descritto, era racchiuso un dischetto di mica che, nella posizione orizzontale adoperata dianzi, non intercettava i raggi catodici. Quando invece il tubo era verticale ed il disco appoggiava sul fondo come nella fig. 2 o sull'anello come nella fig. 3, le scariche arroventavano la mica intorno al suo centro fino al rosso cigliegia, e la fluorescenza verde non si destava al di là. Mi fu impossibile in queste condizioni passare dal secondo al terzo stadio, mi fu impossibile cioè di fare scomparire il doppio cono, del resto molto assottigliato.

Nella posizione della fig. 2, avevo posto a 3 mm. dal fondo del tubo un diaframma di zinco *ZZ* con un foro di 18 mm. di

diametro e sotto, alla distanza di 22 mm., una rete metallica *R* che ne occupava circa la metà, ed era appoggiata direttamente sulla carta nera involgente a più doppi la lastrina fotografica *LL*. La positiva *a* è tratta dall' impressione ottenuta a questo modo.

Nella posizione della fig. 3 il tubo era capovolto, avendolo fatto girare intorno al cannello che lo congiungeva colla tromba, ed il disco di mica copriva tutto l' anello che faceva da anode. Disposte così le cose, la plaga rovente era più estesa, sebbene ora la mica si trovasse nel centro di curvatura dello specchio che fa da catode. Al di sopra, ed a 3 mm. dal fondo, si trovava lo schermo di zinco *ZZ* col foro di 18 mm., ed a 22 mm. da esso la rete *R* ad immediato contatto coll' involucro della lastrina fotografica *LL*. La positiva *b* mostra l' impressione così ottenuta. E, confrontandola con la positiva *a*, si vede tosto che i raggi impressionanti emanavano dalla mica rovente.

Si ha una conferma di ciò nella positiva *c* proveniente dalla disposizione della fig. 4, nella quale il tubo era raddrizzato, la mica era sul fondo come nella fig. 2; ma le distanze fra la mica e lo schermo e la lastrina erano quelle stesse della fig. 3. Essendo uguali queste distanze, l' impressione è la medesima, tanto se la mica si trova sull'anello, quanto se si trova sul fondo [1].

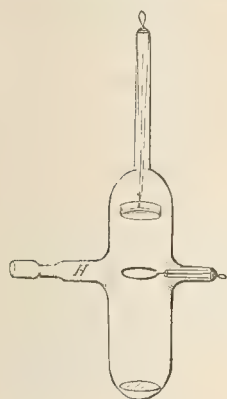



Fig. 4
(1/6 del vero)

5. *Complicazione del fenomeno, e convenienza di descrivere minutamente tutte le circostanze nelle quali si fanno le osservazioni.* Non bisogna badare nelle prove fotografiche precedenti alla intensità relativa delle impressioni, perchè sono troppe le circostanze che possono farla variare, e non tutte governabili. Prescindendo dalla durata dell' azione, dalla sensibilità della lastra, dal modo di svilupparla, dalla intensità e dalla frequenza e dal genere delle scariche, si pensi alla variabilità della parete di vetro (o piuttosto nel caso nostro della mica che andava disaggregandosi) col prolungarsi dell' azione, alle condizioni sempre mutabili dell' aeriforme interno, perchè può svolgersi od anche essere assorbito, alle condizioni d' isolamento del tubo nei varî punti, e però alla varia distribuzione delle cariche ed alle conseguenti scariche saltuarie che spesso si osservano anche lungo la parete esterna dei tubi ecc.;

[1] Quantunque lo stimassi superfluo, pure, per uno scrupolo, ho voluto sottoporre lastrina, rete e diaframma, nelle loro posizioni relative della fig. 2, all'azione di una lamina di mica arroventata col dardo della fiamma, in maniera che presentasse il medesimo aspetto che presentava quand'era rovente per effetto della scarica nell'interno del tubo. Non ottenni, come prevedeva, nessuna impressione, sebbene avessi prolungato la posa per un tempo molto maggiore.

e si troverà giustificata la diffidenza con la quale io accolgo, oggi come oggi, le determinazioni quantitative nelle esperienze di questo genere.

Sarebbe desiderabile che gli osservatori indicassero almeno la forma e le dimensioni dei tubi e degli elettrodi, lo stadio nel quale si trova la luminosità all' atto dell' osservazione ed il modo di eccitazione. Così riceverebbero probabilmente la loro giustificazione alcuni risultati contradditorî, come per esempio quello del prof. Righi il quale trova che sotto l'azione del Röntgen un metallo isolato tende a conservare o ad acquistare una carica positiva, e quello di Borgman e Gerchun che trovano negativa la carica residua.

In alcuni casi credo che si possano osservare effetti opposti anche con un medesimo tubo eccitato nel medesimo modo, a seconda del punto esplorato nel campo esterno. Citerò un esempio. Un tubo *J* (del diametro esterno di 25 mm., della lunghezza di 142 mm., avente in cima per catode una callotta di 10 mm. di raggio di curvatura ed 8 mm. d' altezza ed avente verso la metà per anode un anello coassiale con la callotta) era eccitato con un interruttore rapido e col grande rocchetto che dava 6 cm. di scintilla nell' aria; si trovava nel secondo stadio di luminosità, quando cioè è scomparso tutto il terzo strato, non si manifestava più sull' anode alcuna traccia di luminosità catodica, e mostrava ancora debolmente la luminosità del secondo strato formante il doppio cono col vertice molto più lontano del centro della callotta.

Esplorato il campo col criptoscopio, questo presentava il proprio diaframma più luminoso nel mezzo che alla periferia fin che si trovava vicino al tubo; ma quando n' era discosto, appariva più scuro nel mezzo: e ciò qualunque fosse la sua orientazione rispetto all' asse del tubo.

Con questo fatto se ne collega forse un altro, che mi pare molto strano e che indicherò con tutte le riserve, perchè finora non l' ho potuto studiare abbastanza. Da alcune osservazioni fatte colla fotografia, mi è parso di rilevare che il grado di trasparenza di certe lamine variasse al variare della loro distanza dalla superfice d' emissione dei raggi X. Ma ripeto che di questo fatto non ho ancora prove sufficienti per escludere che non si sia insinuata nell' osservazione qualche circostanza perturbatrice.

6. *Applicazioni alla petrografia.* In fine dirò che fra le varie fette di roccie favoritemi del R. Opificio delle Pietre Dure, ho riscontrato alcune singolarità nei diaspri: ed ho pregato il prof. Grattarola di studiare la questione sotto l' aspetto mineralogico. Le altre roccie non erano in fette abbastanza sottili da dare delle differenze notevoli.

Le gemme orientali che ho provate in confronto di quelle occidentali d' ugual nome, non offrono differenze di opacità tali da farle riconoscere, come si riconoscono con sicurezza i diamanti veri fra i falsi.

7. *Aggiunta il 5 marzo nel rivedere le prove di stampa.* — In questi giorni il sig. Calamandrei mi ha preparato due tubi simili a quello della fig. 2, ma contenenti l'uno un disco di platino di $^4/_{100}$ di mm., l'altro un

disco di porcellana che ho ricavato da un piattino del Ginori ed assottigliato collo smeriglio fino a $^1/_2$ mm. Entrambi i dischi erano relativamente più grandi di quello di mica segnato nella fig. 2, perchè occupavano quasi per intero la sezione dei tubi. Amendue i tubi erano eccitati coll'interruttore rapido e col grande rocchetto che dava scintille di 15 cm. nell'aria. Furono mantenuti entrambi fra la fine del secondo ed il principio del terzo stadio di rarefazione: e colla disposizione della fig. 2 mi hanno dato la fotografia d'una rete metallica. Il platino era rovente nel mezzo, e sublimandosi ha annerito la parete laterale fino all'altezza dell'anello che faceva da anode, mentre ha lasciato trasparente l'emisfero sottostante.

Al vetro ed all'alluminio sono dunque da aggiungere la mica, il platino e la porcellana, che emettono raggi di Röntgen quando sono colpiti dai raggi catodici.

Fisica terrestre. — *Dei terremoti di Spoleto nell'anno 1895; con Catalogo dei terremoti storici della valle Umbra.* Memoria del Socio T. Taramelli e del prof. P. I. Corradi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Su di un teorema del sig. Netto relativo ai determinanti, e su di un altro teorema ad esso affine.* Nota di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul moto del polo terrestre.* Nota di G. Peano, presentata dal Socio Brioschi.

Nella mia Nota, pubblicata negli Atti della R. Accademia di Torino, 5 maggio 1895, ed avente questo stesso titolo, dopo aver applicato l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann ai principî della meccanica, come esercizio numerico dell'ultima proposizione, mi proposi di stimare la velocità con cui si spostano le terre polari in virtù dei moti della parte fluida del nostro globo. Ma l'aver fatto uso di questo nuovo metodo, e l'avere in una Nota: *Sul moto d'un sistema nel quale sussistono moti interni variabili* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1 dicembre 1895) esposti i risultati sopprimendone la dimostrazione, può lasciare oscurità in qualche lettore. Quindi non sarà del tutto inopportuno il tradurre alcune di quelle formule in coordinate car-

tesiane. Le formule diventano più lunghe: ma il ragionamento non perde punto della sua semplicità.

Abbiasi un sistema composto d'una parte rigida, e d'una mobile qualunque. Per brevità di linguaggio, diremo *terra* il sistema, *continente* e *mare* le sue due parti. Supponiamo che sul sistema non agiscano forze esterne. Allora il principio di meccanica: *la somma dei momenti delle quantità di moto del sistema intorno ad ogni asse è costante* equivale alle sei equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} \sum m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right)=a,\ \sum m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dz_i}{dt}\right)=b,\ \sum m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt}-y_i\frac{dx_i}{dt}\right)=c,\\ \sum m_i\frac{dx_i}{dt}=d,\quad \sum m_i\frac{dy_i}{dt}=e,\quad \sum m_i\frac{dz_i}{dt}=f,\end{cases}$$

ove $a, b, \ldots f$ sono sei costanti, che qui dirò *costanti iniziali*. Questi sei numeri sono le coordinate, o caratteristiche, di quella forma geometrica, che proposi di chiamare *quantità di moto del sistema*; e queste equazioni equivalgono alla (3) della mia Nota.

L'ipotesi che il continente sia rigido, si traduce in quella che le coordinate, o componenti della velocità d'ogni suo punto (x_i, y_i, z_i) siano espresse da:

$$(2)\quad \frac{dx_i}{dt}=l+qz_i-ry_i,\quad \frac{dy_i}{dt}=m+rx_i-pz_i,\quad \frac{dz_i}{dt}=n+py_i-qx_i,$$

ove l, m, n, p, q, r sono sei costanti invariabili con (x_i, y_i, z_i). Vedasi ad es. il pregevole *Corso di meccanica razionale* che ha or ora pubblicato il professor Maggi, § 303. I sei numeri $l, m, \ldots r$ sono le coordinate della forma geometrica che chiamai *velocità del corpo rigido*, e queste equazioni equivalgono alla (4) della mia Nota.

Siano u_i, v_i, w_i le componenti della velocità relativa del punto (x_i, y_i, z_i) del mare, rispetto al continente; sicchè la velocità assoluta di questo punto abbia per coordinate:

$$(3)\quad \frac{dx_i}{dt}=l+qz_i-ry_i+u_i,\quad \frac{dy_i}{dt}=\cdots,\quad \frac{dz_i}{dt}=\cdots$$

Sostituisco nelle (1) alle $\frac{dx_i}{dt}, \ldots$ i valori dati dalle (2) pei punti del continente, e dalle (3) pei punti del mare. Pongasi

$$\begin{aligned} a' &= \sum m_i(y_i w_i - z_i v_i),\quad b'=\cdots,\quad c'=\cdots\\ d' &= \sum m_i u_i,\qquad\qquad\quad e'=\cdots,\quad f'=\cdots\end{aligned}$$

ove il $\sum$ si estende ai punti del mare. Queste sei quantità, analoghe alle (1), ove invece di velocità assolute si considerino le relative, dipendono dalle sole velocità relative degli elementi del mare, che suppongo note. Le (1) divengono:

$$(4)\begin{cases} n\sum m_i y_i - m\sum m_i z_i + p\sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - q\sum m_i x_i y_i - r\sum m_i x_i z_i = a - a' \\ \cdot\;\cdot = b - b' \\ \cdot\;\cdot = c - c' \\ l\sum m_i + q\sum m_i z_i - r\sum m_i y_i = d - d' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot = e - e' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot = f - f' \end{cases}$$

equivalenti alla (11) della mia Nota. Il $\sum$ si intende quì esteso a tutti i punti della terra. Se ora supponiamo noti i dieci coefficienti:

$\sum m_i$, massa della terra,

$\sum m_i x_i$, ... coordinate del baricentro terrestre, moltiplicate per la massa,

$\sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$, ..., $\sum m_i y_i z_i$, ... momenti d'inerzia della terra,

da queste equazioni possiamo ricavare $l, m, \dots r$ in funzione di $a - a' \dots f - f'$; e sostituendo questi valori nelle (2), si hanno le componenti della velocità d'un punto qualunque del continente (x_i, y_i, z_i); e sia

$$(5)\quad \frac{dx_i}{dt} = \varphi(a - a', \dots f - f'),\ \frac{dy_i}{dt} = \psi(a - a', \dots, f - f'),\ \frac{dz_i}{dt} = \chi(a - a', \dots f - f').$$

Ora, senza eseguire i calcoli indicati, si osservi che le (4) dànno le sei quantità $a - a'$, ... $f - f'$ quali funzioni lineari omogenee delle sei $l, m, \dots r$; risoltele, avremo queste quali funzioni lineari omogenee di quelle; e sostituendo nelle (2), pure lineari omogenee in $l, m, \dots$, avremo infine che le tre funzioni φ, ψ, χ ora considerate sono lineari ed omogenee; quindi si avrà:

$$(6)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \varphi(a, b, \dots f) - \varphi(a', b', \dots f),\ \text{ e analoghe}$$

e si conchiude la proposizione di cui feci uso nell'esempio numerico:

« La velocità d'un punto qualunque del continente è la risultante di due.
« L'una, di coordinate

$$\varphi(a, b, \dots f),\quad \psi(a, \dots f),\quad \chi(a, \dots f)$$

« che dipende dalle sole costanti iniziali; essa è la velocità che avrebbe il « punto se si suppone $a' = b' = \cdots = f' = 0$, cioè se si suppone la terra « irrigidita. L'altra, di coordinate

$$-\varphi(a', b', \dots f'),\quad -\psi(\dots),\quad -\chi(\dots)$$

« che dipende dalle sole velocità relative dei punti del mare; questa è la ve- « locità che avrebbe il punto supponendo $a = b = \cdots = f = 0$, cioè nulle le « costanti iniziali; vale a dire la velocità che avrebbe il punto supponendo

« d'aver arrestata la terra nella posizione considerata, ed in seguito si met-
« tano in moto i mari ».

L'indipendenza delle due velocità è conseguenza della sola forma lineare delle equazioni considerate. Ad esempio, la velocità d'un punto della terra, ove su essa si spari un cannone, è la risultante di due; l'una è la velocità che avrebbe il punto se il cannone non fosse sparato; e l'altra è la velocità che avrebbe il punto stesso supposta fermata la terra, e poi si spari il cannone. Amendue queste velocità si calcolano, o colle formule scritte, o scrivendole semplificate in ogni caso particolare.

Prendiamo per origine il baricentro della terra; sarà $\sum m_i x_i = \cdots = 0$; per assi coordinati gli assi d'inerzia; sarà $\sum m_i y_i z_i = \cdots = 0$. Facciasi astrazione dal moto del baricentro terrestre; sarà $d = e = f = 0$. Suppongasi che il baricentro del mare sia fisso rispetto al continente, il che avviene quando si considerino solo correnti chiuse o cicli; sarà $d' = e' = f' = 0$. Detti A, B, C i momenti principali d'inerzia, le (4) diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}p = a - a', \quad \mathrm{B}q = b - b', \quad \mathrm{C}r = c - c' \\ l = m = n = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

Quindi il continente rota attorno al baricentro della terra; la sua velocità rotatoria, considerata come un vettore (considerazione già comune nei trattati), avrà per componenti

$$p = \frac{a - a'}{\mathrm{A}}, \quad q = \frac{b - b'}{\mathrm{B}}, \quad r = \frac{c - c'}{\mathrm{C}};$$

ed è la somma, o risultante della velocità di componenti

$$\frac{a}{\mathrm{A}}, \quad \frac{b}{\mathrm{B}}, \quad \frac{c}{\mathrm{C}},$$

dovuta alle costanti iniziali; e della velocità di componenti

$$-\frac{a'}{\mathrm{A}}, \quad -\frac{b'}{\mathrm{B}}, \quad -\frac{c'}{\mathrm{C}}. \tag{8}$$

dovuta al moto del mare.

Ora, riferendoci al globo terracqueo, i momenti d'inerzia A, B, C, che compaiono al denominatore delle formule (8) sono noti con discreta approssimazione da studî astronomici e geodetici. Ma i numeratori a', b', c', momenti della quantità di moto del mare, ci sono incogniti. Volendo riconoscere se i moti marini, quali quelli che noi vediamo, possano produrre una

velocità rotatoria sensibile, calcolai quella prodotta dalla Corrente del Golfo. La portata e la posizione di questa corrente sono date, con approssimazione grossolana, dalla Geografia. Per calcolare il momento della quantità di moto d'una corrente chiusa, si hanno più metodi dal calcolo geometrico. Il più semplice ad esporsi si è di proiettare ortogonalmente, sul piano perpendicolare all'asse, il ciclo considerato; il doppio dell'area proiezione, moltiplicato per la portata della corrente, dà il momento della corrente rispetto all'asse. Così si hanno a', b', c'. Risulta dal calcolo numerico che questa corrente imprime alle terre polari, ad es. allo Spitzberg, una velocità di più d'un metro all'anno.

Ma non sarà inutile il ricordare che le correnti regolarmente distribuite attorno all'asse polare, o simmetricamente rispetto all'equatore, imprimono velocità che si distruggono fra loro. Quindi in questo calcolo non si può tener conto nè dei venti alizei, nè di altri fenomeni regolari; ma solo delle irregolarità che queste correnti hanno nei due emisferi, e secondo i varî meridiani.

Avuta la velocità dei varî punti del continente, si potrebbero determinare le loro posizioni alla fine d'un tempo qualunque, supposte note le quantità a', b', ... f' nella successione dei tempi. Ma noi non conosciamo i loro valori attuali, e meno i futuri. Variando il polo, la corrente del golfo potrà gelare, e altre correnti si produrranno. Ritengo perciò puro esercizio di analisi il fare ipotesi speciali sulle leggi che regolano queste correnti, onde dedurne dopo integrazione, la posizione della terra alla fine d'un tempo qualunque. Sotto l'aspetto analitico, una conveniente scelta di queste ipotesi può rendere l'integrazione immediata, ovvero introdurre ogni funzione trascendente che si desidera. E sotto l'aspetto pratico, che più importa, due ipotesi, che paiono rappresentare prossimamente il fenomeno fisico, possono, dopo integrazione, condurre a risultati del tutto opposti. Poichè mentre noi possediamo regole semplici per stimare l'approssimazione nelle operazioni di analisi finita, la questione è assai complicata quando si integrano equazioni differenziali approssimate.

E un esempio ci è dato in questa stessa questione. Lo Schwahn, dal fatto che supponendo costanti certe quantità ne deriva che il polo terrestre può fare solo piccole oscillazioni, emise l'opinione che ciò avvenga in generale; e tale opinione manifestarono pure Helmert, Schiaparelli, ed altri, di cui feci menzione nella mia seconda Nota (23 giugno 1895). Per togliere ogni dubbio scrissi questa seconda Nota, in cui supposta la terra di rivoluzione, riduco l'integrazione generale ad un problema noto. Come caso particolare feci vedere che una corrente dell'intensità di quella del golfo, e che si comporti col variare del tempo in modo conveniente, trasporterebbe effettivamente le terre polari all'equatore in 10 milioni di anni. È facile il vedere che lo stesso avviene considerando la terra come un ellissoide a tre assi.

La conclusione si è che l'intensità delle attuali correnti atmosferiche e marine è più che sufficiente ad imprimere ai poli vasti movimenti irregolari, di ampiezza qualunque, e ciò sia supponendo la terra plastica, come già affermò lo Schiaparelli, sia supponendola rigorosamente rigida. Spetta all'Astronomia e alla Geologia il riconoscere se questi spostamenti ci siano, o ci siano stati.

Fisica. — *Metodo per determinare l'indice di rifrazione della luce di un minerale nelle lamine sottili.* Nota di C. Viola, presentata dal Socio Strüver.

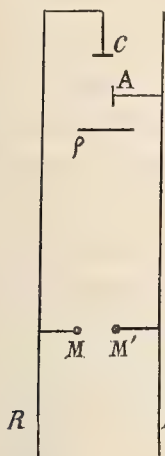
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Esperienze sui raggi Röntgen ed apprezzamento di un limite inferiore della loro velocità.* Nota dei dott. A. Sella e Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna [1].

1. L'interesse che presenta la conoscenza dell'azione di un campo magnetico sui raggi Röntgen propagantesi nel vuoto, in riguardo alla loro differenziazione dai raggi catodici, è stata rilevata dal Lodge.

Istituimmo in proposito la seguente esperienza. In un tubo di vetro del diametro di 2 cm. e della lunghezza di 50 cm. chiuso ai due estremi con due dischi di alluminio, fu spinta la rarefazione sino a mezzo micron di mercurio. Il tubo fu disposto di fronte alla porzione attiva di un Crookes con l'estremità più vicina A alla distanza di 30 cm. I raggi Röntgen dovevano così percorrere tutto il tubo ed uscirne dopo di avere attraversato le due pareti di alluminio. Su di un disco fluorescente normale all'asse del tubo e posto alla sua estremità più lontana B, si poteva allora vedere un cerchio illuminato corrispondente alla sezione interna del tubo, un anello oscuro e poi un campo pure chiaro all'intorno. Ponendo il tubo in direzione della porzione più attiva della sorgente Röntgen si può far sì che il campo interno e l'esterno sieno egualmente luminosi, malgrado che l'interno corrisponda a raggi, che hanno dovuto attraversare due strati di alluminio. Alla distanza di 5 cm. dall'estremita A, sotto il tubo venivano disposti i poli di un elettromagnete molto potente, destinato a esperienze sul diamagnetismo. Ora chiudendo il circuito eccitatore di questo, non potemmo vedere la più piccola variazione relativa d'intensità luminosa dei due campi.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

Questa esperienza non esclude naturalmente ogni azione magnetica, ma certo dimostra che la sua eventuale esistenza è molto piccola, per nulla paragonabile all'azione sui raggi catodici.

2. Passiamo ora a descrivere un' altra esperienza. In R, R' fanno capo gli estremi del circuito secondario di un Ruhmkorff; da essi partono paralleli due grossi fili di rame; $M\ M'$ sono gli estremi (palline di ferro di 1 cm. di diametro) di un eccitatore in derivazione; C, A catodo ed anodo di un Crookes di cui è segnata solo la superficie attiva ϱ; la distanza tra $M\ M'$ e ϱ è oltre un metro. Tra ϱ ed $M\ M'$ si possono porre degli schermi trasparenti od opachi ai raggi Röntgen.

Con questa disposizione osservammo che per ottenere una scintilla in $M\ M'$ con la stessa scarica che illumina il Crookes, bisogna avvicinare $M\ M'$ assai più quando sono colpite dai raggi Röntgen, che non quando questi vengono intercettati. Così p. e. per ottenere una scintilla, quando non c' è schermo, oppure quando si interpone una sottile lastra di alluminio, una tavola di legno, un libro, un disco di paraffina ecc., bisogna avvicinare $M\,M'$ a 4 cm. Se invece si interpone una lastra di piombo, di zinco, di vetro spesso, la scintilla scocca già alla distanza di 7 cm. Che si tratti di un' azione diretta di ϱ sull' eccitatore, si vede molto nettamente praticando negli schermi opachi una fessura, che permetta per piccoli spostamenti di essi nel loro piano di intercettare o no i raggi.

Notiamo che l' azione dell' interruttore del Ruhmkorff serve solo ad ottenere rapidamente parecchie ripetizioni del fenomeno; lo stesso si osserva con una scarica *sola* ottenuta interrompendo a mano il primario, con che resta esclusa la possibilità di azioni susseguenti. Così osserviamo che, per avere questi fenomeni, conviene porre il Crookes lontano dal rocchetto, perchè in vicinanza si verificano delle perturbazioni, dovute all'azione diretta del campo magnetico del rocchetto sulla distribuzione della scarica nell' interno del Crookes.

Questa nostra esperienza ci permette di assegnare *un primo limite inferiore alla velocità di propagazione dei raggi Röntgen.* Così è chiaro che i raggi generati nella prima fase della scarica sono già arrivati in $M\ M'$ a far sentire la loro azione, prima che in $M\ M'$ si sia prodotta la differenza di potenziale necessaria per l' esplosione. In quest' intervallo di tempo deve essere avvenuta formazione di raggi catodici, susseguente produzione di raggi Röntgen, propagazione di questi da ϱ sino ad $M\ M'$.

Noi speriamo, continuando in quest' ordine di esperienze, di poter trarre conclusioni più precise circa la velocità dei raggi X.

Fisica. — *Azione del tubo di Crookes sul radiometro.* Nota dei dottori A. FONTANA ed A. UMANI, presentata dal Socio BLASERNA [1].

Allorquando si pone un radiometro davanti ad un tubo di Crookes, nel quale passi la scarica elettrica, si osserva che questo ha un' azione direttrice sulle palette del molinello. In questo lavoro ci siamo proposti di esaminare se tale effetto si debba o no attribuire ai raggi di Röntgen.

Facemmo uso di tubi di Crookes piriformi, col catodo nella parte più stretta, e coll' anodo assai prossimo alla parete, a metà circa della lunghezza, e li illuminammo colla scintilla di un rocchetto di induzione, di media grandezza, animato dalla corrente di otto elementi di Bunsen.

Inoltre, per mantenere il radiometro con velocità costante, adoperammo una lampada normale di Krüss, ad acetato di amile. Il radiometro era posto sopra un regolo graduato, tra il tubo e la sorgente calorifica, e se ne studiava la velocità rotatoria, osservando, con un cannocchiale, i successivi passaggi delle palette.

Il molinello del radiometro, anche se posto in rapido moto di rotazione, si arrestava, quando la scarica passava nel tubo di Crookes, e rivolgeva il piano di una paletta alla parte più illuminata del tubo. La distanza limite, alla quale si verificò il fenomeno, fu di 10,5 cm., tra la parete del tubo e l' asse del molinello. Allora abbiamo posta la sorgente calorifica a 19 cm. dal radiometro, in modo che questo girasse colla velocità di 10 giri in 50″. Spegnendo il lume, il molinello si fermava dopo 24″. Ripetendo l' esperienza in modo che, al momento in cui si spegne la lampada, si ponga in azione il tubo, si osservò che il rallentamento avviene colla stessa rapidità di prima; soltanto il molinello risente della forza direttrice del tubo. Diminuendo la distanza tra il tubo ed il radiometro, l' azione diventava molto più energica, ed il molinello si fermava in minor tempo, dopo aver eseguite un certo numero di oscillazioni pendolari intorno alla posizione di equilibrio.

Alla fermata seguì un periodo, più o meno lungo, di resistenza del mulinello a rimettersi in moto sotto l' azione del calore, anche se il tubo non era più illuminato, e questo periodo fu tanto più breve, quanto minore è stata l' azione del tubo. Alla distanza limite, sopra notata, non era più sensibile. Gli stessi effetti si sono ottenuti rovesciando il senso della scarica.

Dopo che il tubo abbia orientato il molinello, spostando questo lateralmente, la paletta si mantiene orientata verso lo stesso punto del tubo.

È assai facile dimostrare che il tubo di Crookes percorso dalla scarica elettrica si elettrizza: di fatti si vedono scoccare frequenti scintille tra questo

[1] Lavoro eseguito nell' Istituto fisico della R. Università di Roma.

ed un conduttore che sia posto in vicinanza. Noi abbiamo voluto separare gli effetti della induzione elettrostatica da quelli dei raggi di Röntgen.

A tale scopo abbiamo rinchiuso il radiometro in una gabbia di fitta rete metallica, la cui parete, rivolta al tubo, era di alluminio sottile, e per ciò assai trasparente ai raggi di Röntgen. Poi abbiamo addirittura rivestito il radiometro con uno stretto involucro di stagnola finissima, ed abbiamo constatato che, messa al suolo la custodia metallica, il molinello non era menomamente influenzato nè dal raggio catodico, nè dall' anodico, quantunque la distanza tra il tubo di Crookes ed il radiometro fosse ridotta a circa 5 mm.

Abbiamo rinnovato l' esperimento con un tubo di Crookes, la cui superficie, opposta al catodo, era ricoperta con un deposito galvanico di rame di tale spessore, da intercettare completamente i raggi di Röntgen. Se il rivestimento di rame era messo al suolo, nessuna azione si manifestava, ed il radiometro si fermava indifferentemente in qualunque posizione, senza oscillazioni; ma tosto ricompariva l' azione, se veniva tolta la comunicazione col suolo.

Chiudemmo altresì il tubo ed il rocchetto in una grande cassa di piombo, messa al suolo, nella quale era praticata una finestra, in corrispondenza dell' estremo del tubo, chiusa da una esile lastra di alluminio; e il radiometro, posto vicinissimo alla finestra della cassa, non alterò il suo moto.

Studiammo anche il comportamento di varî diaframmi collocati tra il tubo ed il radiometro, e ne scegliemmo che fossero conduttori od isolanti, trasparenti od opachi ai raggi di Röntgen. Potemmo così constatare che la maggiore o la minore trasparenza dei diaframmi ai raggi X non aveva alcuna influenza sulla forza direttrice del tubo. Invece osservammo che i diaframmi buoni conduttori della elettricità, messi al suolo, intercettavano l' azione tra il tubo ed il radiometro, mentre quelli isolanti non l' impedivano affatto.

Così osservammo che una sottile lamina di stagnola, trasparentissima ai raggi di Röntgen, non permette l' orientamento del molinello, laddove l' azione si esercita attraverso una tavola di legno, trasparente anch' essa.

A tal punto nacque l' idea di vedere se un corpo qualsiasi elettrizzato, fosse capace di rinnovare i fenomeni sopra esposti, senza l' intervento dei raggi di Röntgen. Di fatti abbiamo ripetuti tutti gli esperimenti, avvicinando al radiometro, non più il tubo di Crookes, bensì i poli di una macchina elettrostatica; e, ciò che è più persuasivo, abbiamo anche ottenuti gli stessi fenomeni coll' armatura interna di una bottiglia di Leida carica, la cui armatura esterna era al suolo.

Mentre accudivamo a questa ricerca, comparve una Nota dei signori Gossart e Chevallier (1), nella quale gli autori, constatando il fatto fonda-

(1) Gossart e Chevallier, *Sur une action mécanique émanant des tubes de Crookes* ecc. C. R., t. CXXII, n. 6.

mentale osservato da noi, attribuivano il fenomeno all' azione dei raggi di Röntgen, perchè credevano di aver trovato che l' azione del tubo sul radiometro si esercitasse anche attraverso sostanze diverse dall' aria, e, tanto più intensamente, quanto maggiore fosse la loro trasparenza ai raggi di Röntgen. Tra le loro osservazioni, in una assai notevole, trovarono che un magnete, portato in giro attorno al radiometro, già influenzato dal tubo, riesce a vincerne la inerzia, e lo ripone in movimento.

Su questo riguardo noi abbiamo visto che il molinello sente bensì la vicinanza del magnete, perchè la paletta più vicina viene attratta; ma soltanto debolmente, e non lo segue nel suo movimento; che, anzi, quando il magnete viene a trovarsi vicino alla paletta successiva, è questa che viene attratta di più, ed il molinello compie uno spostamento opposto al primitivo. Si vede che il magnete non funziona che come una massa metallica che altera il campo elettrico, la quale risente della azione elettrostatica, e di questo ci siamo vieppiù convinti coll'osservare che, presentando al molinello l' uno o l' altro polo, o la zona neutra di una calamita a ferro di cavallo, o un qualunque altro conduttore, il fenomeno avveniva sempre nello stesso modo.

È fuori di dubbio che il vetro del radiometro, nelle condizioni esposte, si elettrizza; e lo prova, prima il vivace scintillìo che avviene tra l' involucro metallico con cui lo investimmo, ed un conduttore posto in vicinanza; poi il fatto, che, allontanando il tubo di Crookes dal radiometro, dopo orientate le alette, si vedono queste non solo persistere nella posizione ricevuta, ma tornarvi anche dopo un certo tempo, se, con una sorgente luminosa, vengano spostate alquanto.

Non vogliamo escludere completamente l' azione inducente dei raggi di Röntgen [1]; ma, se mai, questa è assai piccola, e su di essa hanno prevalenza assoluta le azioni elettrostatiche. E queste possono avere due origini; o agisce sulla paletta la carica più intensa, ma più lontana, che si forma sulle pareti del tubo di Crookes, o quella debole, ma assai più vicina, che si accumula per convezione sul vetro del radiometro, o, molto più probabilmente, agiscono l' una e l' altra, sommando i loro effetti.

Noi quindi riteniamo che l' azione meccanica del tubo di Crookes sopra il radiometro sia dovuta ad azioni elettrostatiche secondarie, con piccolissima e forse nessuna relazione coi raggi Röntgen, e che, in quest' ordine di fatti, non si possano fare osservazioni quantitative sulle nuove radiazioni.

[1] A questo proposito veggasi la Nota del prof. A. Righi: *Sulla produzione di fenomeni elettrici per mezzo dei raggi di Röntgen*, Bologna, 1896; e l'altra dei dottori A. Sella e Q. Majorana: *Ricerche sui raggi Röntgen*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1896, vol. V, sem. 1°.

Chimica. — *Ricerche sul comportamento della Dimetilanilina come solvente nelle ricerche crioscopiche.* Nota di G. Ampola e C. Rimadori, presentata dal Socio Paternò.

Chimica. — *Nuove ricerche sulla trasformazione delle α-aldossime in nitriti.* Nota di G. Minunni, e D. Vassallo, presentata dal Socio Paternò.

Chimica. — *Ricerche sui prodotti di ossidazione degli idrazoni. I. Ossidazione del benzolfenilidrazone.* Nota di G. Minunni ed E. Rap, presentata dal Socio Paternò.

Paleontologia. — *Sul recente rinvenimento di fossili nel calcare a Bellerophon della Carnia.* Nota del dott. A. Tommasi, presentata dal Socio Taramelli.

Fisiologia. — *Influenza della musica sulla termogenesi animale.* Nota del dott. U. Dutto, presentata dal Socio Luciani.

Fisiologia. — *Sull'azione fisiologica di alcuni derivati della santonina.* Nota del dott. D. Lo Monaco, presentata dal Socio Luciani.

Fisiologia. — *Apparecchio portatile per determinare l'acido carbonico nell'aria espirata dall'uomo.* Nota del prof. Ugolino Mosso, presentata dal Socio Angelo Mosso.

Fisiologia. — *La respirazione dell' uomo sul Monte Rosa. Eliminazione dell' acido carbonico a grandi altezze.* Nota del prof. Ugolino Mosso, presentata dal Socio Angelo Mosso.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle inviate dal Corrispondente Arcangeli, dai Soci stranieri Gegenbaur, Kühne, Recklinghausen, Steenstrup, e dai signori Livi e Chantre.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società Reale di Londra; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Manchester.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il R. Istituto di studi superiori di Firenze; la Società geodetica di Washington; la Società geologica di Ottawa; la Facoltà di scienze di Marsiglia; la R. Università di Norvegia a Christiania.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° marzo 1896.

Arcangeli G. — Alcune esperienze sulle foglie di Nuphar. S. l. e a. 8°.
Id. — Brevi notizie sopra alcune agaricidee. S. l. e a. 8°.
Id. — Cenni necrologici sul Generale Vincenzo Ricasoli. S. l. e a. 8°.
Id. — Giovanni Passerini. S. l. e a. 8°.
Id. — I pronubi dell' Helicodiceros muscivorus (L. F.). S. l. 1891. 8°.
Id. — La collezione del cav. S. De Bosniaski e le Filliti di S. Lorenzo nel M. Pisano. S. l. e a. 8°.
Id. — Le stranezze meteorologiche dell'anno 1895. S. l. e a. 8°.
Id. — Muscinee raccolte di recente nell' Italia meridionale. S. l. e a. 8°.
Id. — Relazione sulle comunicazioni inviate alla presidenza della Commissione per l' esplorazione della Flora italiana. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcune agaricidee. S. l. e a 8°.
Id. — Sopra alcune piante della Repubblica Argentina. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcune piante raccolte presso Ripafretta nel Monte Pisano. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcune piante raccolte recentemente. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcuni casi di Clorosi. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcuni lavori del sig. E. Bach concernenti la decomposizione dell' acido carbonico nella funzione di assimilazione. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcuni lavori del sig. L. Maquenne concernenti la respirazione e loro relazione con la funzione fotogenica. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcuni Narcissus. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra alcuni recenti lavori riguardanti l' isomorfismo fisiologico. S. l. e a. 8°.
Id. — Sopra l' infiorescenza di una pianta di Nepenthes. S. l. e a. 8°.

Id. — Sopra una mostruosità del Lentinus tigrinus. S. l. e a. 8°.

Id. — Sopra un caso di sinanzia osservato nella Saxifraga (Bergeria crassifolia L. S. l. e a. 8°.

Id. — Sopra varie mostruosità dell' Ajax odorus Car. e della sua probabile origine. S. l. e a. 8°.

Id. — Sopra varie mostruosità osservate nella Cyclanthera pedata, e sui viticci delle Cucurbitacee. Genova, 1892. 8°.

Id. — Sopra varî fiori mostruosi di Narcissus e sul N. radiiflorus. S. l. e a. 8°.

Id. — Tentativi d' incrociamento e fruttificazione del Dracunculus vulgaris. S. l. e a. 8°.

Id. — Sulla Larrea cuneifolia e sulle piante Bussola. S. l. e a. 8°

Id. — Sulla Larrea cuneifolia e sulle piante Bussola. S. l. e a. 8°.

Id. — Sulla Tulipa saxatilis Sieb. S. l. e a. 8°.

Id. — Sulle affinità delle Sfenofillacee. S. l. e a. 8°.

Id. — Sull' Hermodactylus tuberosus. S. l. e a. 8°.

Id. — Sull' impollinazione di varie cucurbitacee, e sui loro nettarii. Genova, 1892. 8°.

Id. — Sul Narcissus italicus Sims, e sopra alcuni altri Narcissus. S. l. e a. 8°.

Id. — Sul Narcissus Puccinellii Parl. e sul N. Biflorus Curt. S. l. e a. 8°.

Id. — Di nuovo sul Narcissus Puccinellii. S. l. e a. 8°.

Bardelli G. — Sull' uso delle coordinate obliquangole nella meccanica razionale. Milano, 1896. 8°.

Brédikhine Th. — Variations séculaires de l'orbite de la Comète 1862, III, et de ses orbites dérivées. St. Pétersbourg, 1895. 8°.

Catalogue of scientific papers (1874-1883). Vol. XI. London, 1896. 4°.

Chantre E. — Missions scientifiques en Transcaucasie, Asie Mineure et Syrie. 1890-94. Lyon, 1895. 4°.

Contributions to Canadien Palaeontology. Vol. II, p. I. — *Scudder.* Canadian fossils insects. Ottawa, 1895. 8°.

Facciolà L. — La prima forma larvata dell' Anguilla vulgaris. Palermo, 1895. 8°.

Fauna und Flora des Golfes von Neapel. 22 Monogr. — *Bürger O.* Nemertinen. Berlin, 1895. 4° (*acq.*).

Folgheraiter G. — Intensità orizzontale del magnetismo terrestre, lungo il parallelo di Roma. Roma, 1896. 8°.

Forir H. — Nouvelles découvertes relatives aux terrains paléozoïques de la Gileppe et de le Meuse. Liège, 1895. 8°.

Id. — Sur la bande dévonienne de la Vesdre. Liège, 1893. 8°.

Id. — Sur la présence de Rhynchonella Dum. et de Cyrtia Murch. dans les schistes de Matagne. Liège, 1896. 8°.

Id. et *Lohest M.* — Découverte du niveau à paléchinides dans la Bande Carbonifère de la Meuse. Liège, 1895. 8°.

Geological Literature added to the Geological Society's Library during the year ended Dec. 31st. 1895. London, 1896. 8°.

Haffkine W M. — Anti-cholera inoculation. Report. Calcutta, 1895. 4°.

Höfer H. — L'origine des gisements de minerais de Plomb, de Zinc et de Fer de la Haute-Silésie. Trad. par H. Forir. Liège, 1895. 8°.

Index Catalogue of the Library of the Surgeon-General's Office U. S. Army. Vol. XVI. Washington, 1895. 4°.

Livi R. — Antropometria militare. Testo e tavole. Roma, 1896. 4°.

Lohest M. et *Forir H.* — Les schistes a spiriferina octoplicata, et les Calschistes de Tournai. Liège, 1895. 8°.

Lussana S. — Contributo allo studio della resistenza elettrica delle soluzioni considerata come funzione della pressione e della temperatura. Pisa, 1895. 8°.

Id. — Influenza della pressione sulla temperatura del massimo di densità dell' acqua e delle soluzioni acquose. Pisa, 1895. 8°.

Morselli E. — Biologia e medicina negli ultimi trent' anni. Genova, 1895. 8°.

Passerini N. — Esperimenti di concimazione del frumento nei terreni galestrini. Modena, 1895. 8°.

Id. — Sulla quantità di acqua contenuta nel terreno durante la estrema siccità estiva nel 1894. Modena, 1895. 8°.

Id. — Sul potere assorbente per la umidità che alcune materie concimanti comunicano al terreno. Modena, 1895. 8°.

Recklinghausen F. v. — Die Adenomyome und Cystadenome der Uterus- und Tubenwandung, ihre Abkunft von Resten des Wollf'schen Körpers. Berlin, 1896. 8°.

Ricerche ed esperienze istituite nei poderi sperimentali, nel laboratorio di chimica agraria e nell' osservatorio meteorologico, sotto la direzione del prof. N. Passerini. Anno II, 1894. Firenze, 1895. 8°.

Ricordo del XX Settembre MDCCCXCV (Comitato pel concorso delle Università ecc.) in Roma. Roma, 1896. 4°.

Salvioni E. — Studî sui raggi di Röntgen. Perugia, 1893. 8°.

Id. — Una condizione necessaria per ottenere ombre nitide coi raggi di Röntgen, e un fenomeno che offre il modo di realizzarla. Perugia, 1896. 8°.

Steenstrup J. — Det store Sölvfund ved Gundestrup i Jylland 1891. Kiöbenhavn, 1895. 4°.

Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. T. XI. Paris, 1895. 4°.

Valenti G. — Sulla origine e sul significato della ipofisi. Perugia, 1895. 8°.

Id. — Sullo sviluppo dell' ipofisi. Pisa, 1895. 8°.

Wery W. — Photometry of a lunar eclipse. Chicago, 1895. 8°.

P. B.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1896.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota del Corrispondente VITO VOLTERRA.

1. Sia $S_0(x,y)$ una funzione finita e continua qualunque definita per i valori di x, y compresi fra α e β $(\alpha < \beta)$. Partendo da essa costruiamo successivamente le espressioni

$$S_i(x,y) = \int_y^x S_{i-j}(x,\xi)\, S_{j-1}(\xi,y)\, d\xi$$

dando ad i i valori $1, 2, 3\ldots$ e scegliendo j compreso fra 1 e i. Si dimostra facilmente che l'integrale precedente non dipende dalla scelta del numero j. Inoltre chiamando M il limite superiore dei valori assoluti di $S_0(x,y)$ si ha

$$|S_i(x,y)| \leq \frac{M^{i+1}(|y-x|)^i}{i!}.$$

Se ne può concludere che la serie

$$F_0(x,y) = \sum_0^\infty S_i(x,y)$$

è uniformemente convergente e per conseguenza rappresenta una funzione finita e continua di x, y.

Noi possiamo dare una forma notevole al resto di questa serie. Chiamandolo infatti $R_n(x, y)$ si otterrà

$$R_n(x, y) = F_0(x, y) - \sum_0^n S_i(x, y) = \int_y^x S_n(x, \xi) F_0(\xi, y) d\xi$$

$$= \int_y^x S_n(\xi, y) F_0(x, \xi) d\xi .$$

Ponendo $n = 0$ questa formula diviene:

$$\text{(1)} \qquad F_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_y^x S_0(x, \xi) F_0(\xi, y) d\xi$$

$$= \int_y^x S_0(\xi, y) F_0(x, \xi) d\xi .$$

2. Applichiamo ora alla funzione $F_0(x, y)$ delle operazioni analoghe a quelle che si sono eseguite sopra $S_0(x, y)$; calcoliamo cioè successivamente

$$F_i(x, y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi) F_{j-1}(\xi, y) d\xi$$

e formiamo la serie, che resulterà convergente,

$$T_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y) .$$

Possiamo provare che *la somma di questa serie è la funzione* $S_0(x, y)$ *da cui primitivamente siamo partiti*. Infatti per questa serie sussisterà una formula analoga alla (1), vale a dire

$$\text{(2)} \qquad T_0(x, y) - F_0(x, y) = \int_x^y F_0(x, \xi) T_0(\xi, y) d\xi$$

$$= \int_x^y F_0(\xi, y) T_0(x, \xi) d\xi$$

onde sommando le (1) e (2) si otterrà

$$T_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_x^y F_0(\xi, y) \{T_0(x, \xi) - S_0(x, \xi)\} d\xi .$$

Poniamo

$$\sigma(x, y) = T_0(x, y) - S_0(x, y) ,$$

avremo che la equazione precedente si scriverà

$$(3)\qquad \sigma(x, y) = \int_x^y F_0(\xi, y)\, \sigma(x, \xi)\, d\xi$$

da cui segue

$$\sigma(x, y) = \int_x^y F_0(\xi, y)\, d\xi \int_x^\xi F_0(\xi_1, \xi)\, \sigma(x, \xi_1)\, d\xi_1$$

$$= \int_x^y F_0(\xi, y)\, d\xi \int_x^\xi F_0(\xi_1, \xi)\, d\xi_1 \int_x^{\xi_1} F_0(\xi_2, \xi_1)\, \sigma(x, \xi_2)\, d\xi_2 = \cdots$$

Si può in tal modo procedere indefinitamente sostituendo sempre a $\sigma(x, \xi_i)$ il valore che se ne ricava dalla formula (3). Chiamando dunque M' il limite superiore dei valori assoluti di $F_0(x, y)$ ed m quello dei valori assoluti di $\sigma(x, y)$, si avrà

$$|\sigma(x, y)| \leq M'^n\, m \int_\alpha^\beta d\xi \int_\alpha^\xi d\xi_1 \cdots \int_\alpha^{\xi_{n-2}} d\xi_{n-1} = \frac{M'^n\, m\, (\beta - \alpha)^n}{n!}.$$

Siccome n è un numero che può scegliersi tanto grande quanto si vuole, così $|\sigma(x, y)|$ dovrà essere inferiore ad ogni quantità assegnabile, e perciò sarà

$$\sigma(x, y) = T_0(x, y) - S_0(x, y) = 0$$

e in conseguenza

$$S_0(x, y) = T_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y).$$

Possiamo enunciare dunque il teorema:

Si hanno le due formule reciproche

$$(4)\qquad S_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y), \qquad (4')\qquad F_0(x, y) = \sum_0^\infty S_i(x, y)$$

in cui

$$F_i(x, y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi)\, F_{j-1}(\xi, y)\, d\xi, \qquad S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi.$$

Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue $S_0(x, y)$, $F_0(x, y)$ *si può calcolare l'altra mediante operazioni di quadratura. Inoltre si avrà*

$$F_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_y^x F_0(x, \xi)\, S_0(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x F_0(\xi, y)\, S_0(x, \xi)\, d\xi.$$

3. La risoluzione del problema della inversione degl' integrali definiti si può raggiungere in virtù del precedente teorema in maniera molto semplice.

Denotiamo infatti con $\varphi(x)$ una funzione finita e continua, e poniamo

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\, F_0(x, y)\, dx = \varphi(y) - f(y).$$

Moltiplichiamo ambo i membri di questa equazione per $S_0(y, z)\,dy$ e integriamo fra α e z; si otterrà

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)]\,S_0(y, z)\,dy = \int_\alpha^z S_0(y, z)\,dy \int_\alpha^y \varphi(x)\,F_0(x, y)\,dx$$

e pel principio di Dirichlet, ed il precedente teorema,

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)]\,S_0(y, z)\,dy = \int_\alpha^z \varphi(x)\,dx \int_x^z S_0(y, z)\,F_0(x, y)\,dy$$

$$= \int_\alpha^z \varphi(x)\,[S_0(x, z) - F_0(x, z)]\,dx$$

quindi

$$\int_\alpha^z f(y)\,S_0(y, z)\,dy = \int_\alpha^z \varphi(x)\,F_0(x, z)\,dx = \varphi(z) - f(z).$$

Dunque *la formula*

$$\varphi(z) = f(z) + \int_\alpha^z f(y)\,S_0(y, z)\,dy \tag{5}$$

si può invertire e si ha l'altra

$$f(z) = \varphi(z) - \int_\alpha^z \varphi(x)\,F_0(x, z)\,dx. \tag{5'}$$

Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue $S_0(y, z)$ o $F_0(x, z)$ si può calcolare l'altra mediante le formule (4) e (4′) date precedentemente. Quindi, scelta ad arbitrio una delle due funzioni finite e continue $\varphi(z)$ o $f(z)$, si ottiene l' altra funzione mediante una delle due formule (5) e (5′), e si vede che non vi è che la funzione $f(z)$ data dalla (5′) che verifica la relazione funzionale (5) e reciprocamente non vi è che la $\varphi(z)$ data dalla (5) che soddisfa la (5′).

Del resto è facile riconoscere che la operazione di passaggio dalla prima alla seconda formula è la stessa che quella di inversione della seconda nella prima. Si denoti infatti la $-F_0(x, y)$ con Φ, cioè scriviamo [1]

$$\Phi[S_0(x, y)] = -F_0(x, y);$$

allora tenendo conto delle operazioni di quadratura con cui partendo dalla F_0 si calcola la S_0, si avrà

$$\Phi[-F_0(x, y)] = S_0(x, y).$$

[1] È superfluo l'osservare che non deve confondersi la $\Phi[S_0(x, y)]$ con una funzione di funzione (Vedi: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni,* nel vol. III di questi Rendiconti).

Possiamo dunque riassumere i resultati trovati nel seguente teorema:

Posto

$$\Phi[S(x,y)] = -\sum_0^\infty S_i(x,y)$$

in cui

$$S_0(x,y) = S(x,y) \quad , \quad S_i(x,y) = \int_y^x S_{i-j}(x,\xi)\, S_{j-1}(\xi,y)\, d\xi$$

si ha:

1°) *se* $S(x,y)$ *è una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi fra* α e β, *anche* $\Phi[S(x,y)]$ *è una funzione finita e continua entro gli stessi limiti;*

2°) *la funzione* Φ *gode della proprietà*

$$\Phi\Big[\Phi[S(x,y)]\Big] = S(x,y);$$

3°) *se* $\varphi(x)$ *è una funzione finita e continua e*

$$\text{(A)} \qquad \varphi(y) = f(y) + \int_\alpha^y f(x)\, S(x,y)\, dx \qquad (\beta > y > \alpha)$$

resulta

$$\text{(A}'\text{)} \qquad f(y) = \varphi(y) + \int_\alpha^y \varphi(x)\, \Phi[S(x,y)]\, dx.$$

Nelle formule (A) e (A′) si ha $x < y$, quindi sarà sufficiente determinare $\Phi[S(x,y)]$ per valori di $x < y$, e perciò conoscere la funzione $S(x,y)$ solo corrispondentemente ai valori di x, y compresi fra α e β tali che $x < y$, onde basterà assicurarsi che $S(x,y)$ sia continua ed i suoi valori assoluti abbiano un limite superiore finito, per tutti i valori di x, y che soddisfano le condizioni

$$\beta > y > x > \alpha.$$

4. I varî problemi che si presentano di inversione di integrali definiti con limiti variabili, possono in generale risolversi facilmente ricorrendo alle formule ora stabilite. Esaminiamo infatti il problema di invertire l'integrale

$$\text{(6)} \qquad \theta(y) - \theta(\alpha) = \int_\alpha^y \psi(x)\, H(x,y)\, dx,$$

cioè determinare $\psi(x)$ conoscendo $\theta(y)$ e $H(x,y)$. Derivando si avrà

$$\theta'(y) = \psi(y)\, H(y,y) + \int_\alpha^y \psi(x) \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} dx$$

e dividendo per $H(y,y)$

$$\frac{\theta'(y)}{H(y,y)} = \psi(y) + \int_\alpha^y \psi(x) \left\{ \frac{1}{H(y,y)} \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \right\} dx.$$

Quindi se $\frac{\theta'(y)}{H(y,y)}$ è finita e continua e così pure $\frac{1}{H(y,y)}\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$, la (A′) ci fornirà subito la soluzione del problema mediante operazioni di quadratura.

La questione può risolversi in un altro modo, sempre impiegando le formule precedenti. Infatti, mediante una integrazione per parti, la (6) può scriversi

$$\theta(y)-\theta(\alpha)=H(y,y)\,\Psi(y)-\int_\alpha^y \Psi(x)\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}dx$$

in cui

$$\Psi(y)=\int_\alpha^y \psi(x)\,dx$$

quindi

$$\frac{\theta(y)-\theta(\alpha)}{H(y,y)}=\Psi(y)-\int_\alpha^y \Psi(x)\left\{\frac{1}{H(y,y)}\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\right\}dx.$$

Il procedimento precedentemente indicato ci darà la $\Psi(y)$ e perciò con una derivazione otterremo la $\psi(y)$.

Il caso in cui $H(x,y)$ per $x=y$ diviene infinito, in modo che si possa porre $H(x,y)=\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}$ con $G(x,y)$ finita e $\lambda<1$, sfugge all'analisi precedente, ma vi si riconduce facilmente moltiplicando ambo i membri per $\frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}}$ quindi integrando fra α e z.

Se $H(y,y)$ si annulla, il problema della inversione può in taluni casi risolversi univocamente, in altri resultare indeterminato.

Non mi dilungo nello svolgimento dei varî problemi di inversione, giacchè le formule che resultano applicando il procedimento indicato furono direttamente discusse e verificate in alcune Note da me recentemente lette all'Accademia di Torino [1]; osserverò solo che il caso in cui si abbia

$$\theta(y)-\theta(\alpha)=\int_\alpha^{\chi(y)} \psi(x)\,H(x,y)\,dx$$

può in generale ricondursi al precedente, quando si ponga $\chi(y)=z$; d' onde se si può ricavare inversamente $y=\varrho(z)$, si otterrà

$$\theta(\varrho(z))-\theta(\alpha)=\int_\alpha^z \psi(x)\,H(x,\varrho(z))\,dx.$$

[1] Sedute del 12 e del 26 gennaio 1896. Una terza Nota sullo stesso soggetto sarà letta nella seduta dell' 8 marzo.

5. Mostriamo ora come la questione trattata sia suscettibile di una generalizzazione, la quale rende possibile di risolvere in maniera semplice una classe molto estesa di problemi funzionali, che per quanto io so, non vennero fin qui considerati.

Supponiamo che gl'indici r, s possano prendere i valori $1, 2 \ldots n$ e consideriamo le n^2 funzioni finite e continue $S^{(0)}_{r,s}(x, y)$ per i valori delle variabili compresi fra α e β.

Formiamo

$$S^{(i)}_{r,s}(x, y) = \int_y^x \sum_1^n{}_h \, S^{(i-j)}_{r,h}(x, \xi) \, S^{(j-1)}_{h,s}(\xi, y) \, d\xi \tag{7}$$

dando ad i successivamente i valori $1, 2, 3 \ldots$ e prendendo $i \geq j \geq 1$. Si ha che $S^{(i)}_{r,s}$ non dipende da j e

$$S^{(i)}_{r,s}(x, y) \leq \frac{n^i M^{i+1}}{i!} (|y - x|)^i$$

chiamando M il massimo dei limiti superiori dei valori assoluti delle $S^{(0)}_{r,s}$; quindi le serie

$$F^{(0)}_{r,s}(x, y) = \sum_0^\infty{}_i \, S^{(i)}_{r,s}(x, y) \tag{8}$$

sono uniformemente convergenti e rappresentano funzioni finite e continue, e calcolando i resti di queste serie si giunge alle formule

$$F^{(0)}_{r,s}(x, y) - S^{(0)}_{r,s}(x, y) = \int_y^x \sum_1^n{}_h \, S^{0}_{r,h}(x, \xi) \, F^{(0)}_{h,s}(\xi, y) \, d\xi$$

$$= \int_y^x \sum_1^n{}_h \, S^{(0)}_{r,h}(\xi, y) \, F^{(0)}_{h,s}(x, \xi) \, d\xi$$

dalle quali si deduce che, *prese*

$$F^{(i)}_{r,s}(x, y) = \int_x^y \sum_1^n{}_h \, F^{(i-j)}_{r,h}(x, \xi) \, F^{(j-1)}_{h,s}(\xi, y) \, d\xi$$

si ha

$$S^{(0)}_{r,s} = \sum_0^\infty{}_i \, F^{(i)}_{r,s}(x, y).$$

Ciò premesso, siano $\varphi_r(x)$, $(r = 1, 2 \ldots n)$ n funzioni finite e continue e poniamo

$$\int_\alpha^y \sum_1^n{}_r \, \varphi_r(x) \, F^{(0)}_{s,r}(x, y) \, dx = \varphi_s(y) - f_s(y),$$

si avrà con semplici calcoli

$$\int_\alpha^z \sum_1^n{}_s \left(\varphi_s(y) - f_s(y)\right) S_{h,s}^{(0)}(y,z)\, dy = \int_\alpha^z \sum_1^n{}_r \varphi_r(x) \left(S_{h,r}^{(0)}(x,z) - F_{h,r}^{(0)}(x,z)\right) dx$$

e quindi

$$\int_\alpha^z \sum_1^n{}_s f_s(y) S_{h,s}^{(0)}(y,z)\, dy = \int_\alpha^z \sum_1^n{}_r \varphi_r(x) F_{h,r}^{(0)}(x,z)\, dx = \varphi_h(z) - f_h(z)$$

il che prova che *le equazioni funzionali*

$$(9) \qquad \varphi_h(z) = f_h(z) + \int_\alpha^z \sum_1^n{}_s f_s(y)\, S_{h,s}^{(0)}(y,z)\, dy \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

si invertono mediante le formule

$$(9') \qquad f_h(z) = \varphi_h(z) - \int_\alpha^z \sum_1^n{}_r \varphi_r(x) F_{h,r}^{(0)}(x,z)\, dx \qquad (h = 1, 2 \ldots n)$$

in cui le $F_{h,r}^{(0)}$ *si calcolano dalle* $S_{h,s}^{(0)}$ *per mezzo delle formule* (7) e (8).

Si supponga ora di dover risolvere il problema di determinare le funzioni finite e continue $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_n(x)$ che soddisfano le equazioni funzionali

$$(10) \quad \begin{cases} \theta_1(y) - \theta_1(\alpha) = \int_\alpha^y [f_1(x) H_{11}(x,y) + f_2(x) H_{12}(x,y) + \cdots + f_n(x) H_{1n}(x,y)] dx \\ \theta_2(y) - \theta_2(\alpha) = \int_\alpha^y [f_1(x) H_{21}(x,y) + f_2(x) H_{22}(x,y) + \cdots + f_n(x) H_{2n}(x,y)] dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_n(y) - \theta_n(\alpha) = \int_\alpha^y [f_1(x) H_{n1}(x,y) + f_2(x) H_{n2}(x,y) + \cdots + f_n(x) H_{nn}(x,y)] dx \end{cases}$$

quando si suppongano note le funzioni finite continue e derivabili $\theta_i(y)$ e $H_{r,s}(x,y)$. Derivando le equazioni precedenti rapporto ad y, abbiamo

$$(11) \qquad \theta_i'(y) = \sum_1^n{}_s f_s(y)\, H_{i,s}(y,y) + \int_\alpha^z \sum_1^n{}_s f_s(x)\, K_{i,s}(x,y)\, dx$$

supponendo

$$K_{i,s}(x,y) = \frac{\partial H_{i,s}(x,y)}{\partial y}.$$

Denotiamo con $D(x,y)$ il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11}, H_{12} \ldots H_{1n} \\ H_{21}, H_{22} \ldots H_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ H_{n1}, H_{n2} \ldots H_{nn} \end{vmatrix}$$

e si ammetta $D(y, y)$ diverso da zero, e chiamiamo $h_{i,s}(y, y)$ gli elementi reciproci delle $H_{i,s}(y, y)$ divisi per $D(y, y)$. Dalle (11) segue

$$\sum_1^n {}_i\, h_{i,r}(y, y)\, \theta_i'(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \sum_1^n {}_s\, f_s(x) \sum_1^n {}_i\, h_{i,r}(y, y)\, K_{i,s}(x, y)\, dx$$

onde, posto

$$\sum_1^n {}_i\, h_{i,r}(y, y)\, \theta_i'(y) = \varphi_r(y)$$

$$\sum_1^n {}_i\, h_{i,r}(y, y)\, K_{i,s}(x, y) = S_{r,s}^{(0)}(x, y)$$

le equazioni precedenti diverranno

$$\varphi_r(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \sum_1^n {}_s\, f_s(x)\, S_{r,s}^{(0)}(x, y)\, dx$$

e perciò si otterranno le $f_s(x)$ applicando le (9′).

Fisica. — *Il luogo d'emanazione dei raggi di Röntgen.* Nota del Corrispondente A. Ròiti.

Poche cose ho da aggiungere alla mia Nota presentata all'Accademia nella seduta del 1 marzo. In essa ho dato notizia di alcune esperienze dimostranti come i raggi di Röntgen partano e si propaghino in tutte le direzioni dai punti ove i raggi catodici colpiscono varî solidi: oltre il vetro e l'alluminio, anche la mica, il platino e la porcellana. Le impressioni in quelle esperienze sono sempre state ottenute rivolgendo la lastra fotografica dalla parte d'onde provengono i raggi catodici. Ora ne riferirò alcune altre, nelle quali l'ho rivolta invece alla faccia della lamina colpita da questi raggi, e vi ho ottenuto delle impressioni relativamente più intense.

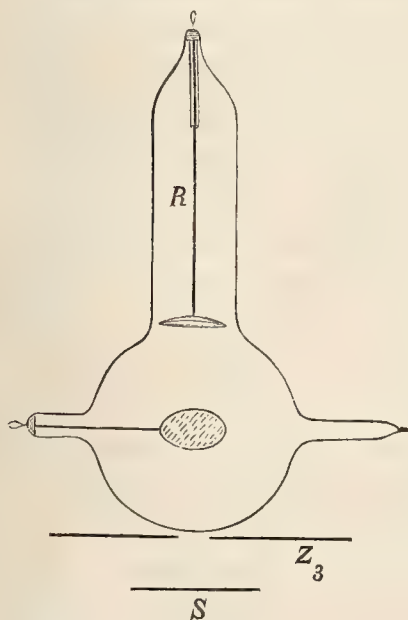
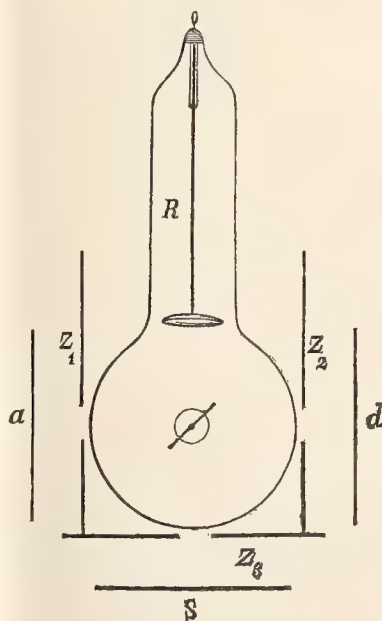



Fig. 1. Fig. 2.

1. Nel collo del palloncino R, rappresentato a circa un terzo del vero nella fig. 1 di prospetto, e nella fig. 2 di profilo, si trova uno specchio

concavo di lastra d'alluminio col raggio di curvatura di 20 mm., ed a circa 34 mm. da esso è collocato a 45° sul suo asse ottico un dischetto di terracotta porosa, della grossezza di $^1/_2$ mm. e del diametro di 20 mm. Questo dischetto è montato sopra un anello d'alluminio, che fa da anode.

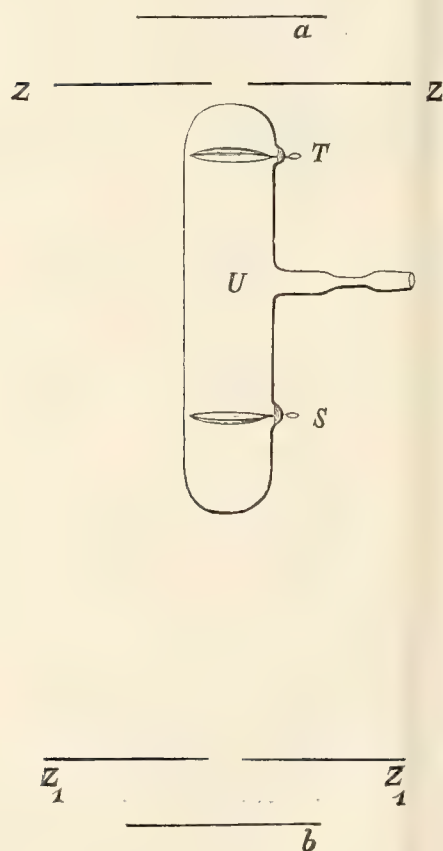
Il palloncino, sempre attaccato alla tromba di Geissler ed ai reofori secondarî del grande rocchetto di Ruhmkorff (eccitato dall' interruttore rapido in modo da dare scintille di 12 cm. nell' aria), era mantenuto vicino al terzo stadio di rarefazione, a quel punto cioè che la luminosità negativa è in procinto di scomparire. Il dischetto di argilla presentava allora al centro una piccola ellissi rovente contornata da un bel violetto, e questo da un color celeste simile a quello emesso per fluorescenza dal solfato di chinina, ma molto più splendido. Tutta la superficie del palloncino era più o meno luminosa: più di fronte al disco che a tergo; ma era perfettamente oscura verso il fondo ove si proiettava l'ombra ellittica del dischetto.

Ho disposto davanti, dietro e sotto al dischetto tre diaframmi di zinco con fori di 10 mm. di diametro, ed a 20 mm. da essi tre lastrine fotografiche, le cui impronte, malgrado i difetti di simmetria del palloncino, rivelano che l'azione fu più energica di fronte. Se ne può dedurre che i raggi di Röntgen abbiano origine sulla faccia colpita dai raggi catodici, e che la loro azione sia indebolita dalla imperfetta trasparenza del disco d'argilla.

Fig. 3.

Il disco si trovava sull'anode, e non v'ha dubbio che avrebbe prodotto effetti consimili un disco tutto d'alluminio o di platino: quindi rimane fino ad un certo punto giustificata l'asserzione di taluno che dall'anode partono i raggi di Röntgen. Ma, da questa esperienza e da quelle precedentemente riferite, mi pare più circospetto conchiudere che il loro luogo d'emanazione sia in genere la superficie di un solido qualunque, comunicante o no coll'anode, sulla quale arrivino i raggi catodici.

Aspetto dei dischetti di zirconio e di magnesio, che ho ordinato, e ripeterò la prova anche con essi.

2. Pensando poi che l'alluminio è trasparente pei raggi di Röntgen, ho fatto costruire il tubo U rappresentato a circa un terzo del vero dalla fig. 3. In esso sono

inseriti lateralmente ed affacciati due specchi concavi identici, che ne occupano quasi tutta la sezione, ed hanno comune il centro di curvatura, così da essere all' incirca due callotte di un' unica sfera avente 40 mm. di raggio. Uno degli specchi, quello segnato S nella figura, si è dovuto tenere, per difficoltà di costruzione, più discosto dal fondo che non sia l' altro specchio T: e mentre quest' ultimo, facendo da catode, lascia il vetro dietro a sè nel primo strato della luminosità negativa, e però (come ho rilevato già nella adunanza del 2 febbraio) non lo rende sorgente di raggi X; lo specchio S invece, quand' è catode, fa risplendere, sebbene debolmente, il fondo che gli sta dietro e deve dare origine a quei raggi.

In una prima esperienza il catode era S, e i due diaframmi di zinco Z e Z_1 col foro di 10 cm., per metà coperto di rete metallica, si trovavano davanti ai due fondi del tubo e ad ugual distanza dal catode S; ed a 20 mm. da ciascuno si trovava la lastra impressionabile ben protetta dalla luce e coperta anch' essa per metà dalla medesima rete metallica. Presento le positive delle due impressioni ottenute con la stessa eccitazione che all' art. 1, e sviluppate insieme. La positiva a_1 è quella della lastra vicina all' anode T: è molto più estesa, più intensa e più sfumata dell' altra positiva b_1, malgrado che questa dovesse risentirsi un poco dell' azione esercitata dal fondo fluorescente a tergo di S.

Rimane dunque confermato, se ve ne fosse bisogno, che il luogo d' emanazione dei raggi di Röntgen non è il catode, ma la superficie colpita dai raggi catodici, e precisamente da quelli *del secondo strato*.

Disgraziatamente, dopo questa prima esperienza il tubo si è guastato, e son dovuti passare dei giorni prima che potessi averne un altro della stessa forma. L' ebbi ieri alla fine, e potei fare una seconda esperienza con la medesima disposizione, ma con S anode e con T catode.

Se i due fondi del tubo avessero la stessa grossezza come l' hanno i due specchi, i raggi di Röntgen, che emanano dalla superficie concava di S, sarebbero ugualmente assorbiti per arrivare alle due lastre; così che, prescindendo dalle riflessioni, le due impressioni dovrebbero riuscire fra loro uguali. Invece, nell' unica prova che ho fatto, riuscì più intensa la inferiore, quella cioè rivolta alla faccia convessa dell' anode: e non so se debba ascrivere questa diversità ad una differenza di grossezza dei fondi di vetro, non avendo potuto farne la riprova, perchè anche questo tubo s' è guastato.

Aggiunta nel rivedere le prove di stampa. — Il 14 marzo ho ripetuto questa esperienza prendendo due fotografie con la disposizione indicata nella fig. 3 e con S anode; e prendendone poi altre due con i diaframmi Z, Z_1 e le lastre a, b, equidistanti da T e con T questa volta anode. Le quattro fotografie, sviluppate insieme, si possono dire identiche fra loro poichè non è possibile distinguerne una dalle altre. Quindi si conchiude che nè le riflessioni dei raggi catodici, nè quelle dei raggi X all' interno del tubo, nè

il verso della concavità non esercitano influenza sensibile; ed inoltre che il trovarsi il vetro o l'alluminio a potenziali elettrici diversi, non altera la trasparenza di questi corpi per i raggi X.

Il tubo adoperato in queste prove del 14 marzo differisce da quelli delle prove precedenti, perchè i due specchi concavi, sempre aventi 40 mm. di raggio di curvatura, sono fra loro distanti di 60 mm., anzi che di 80 mm., e si trovano alla stessa distanza dai fondi, senza però che i fondi appariscano fluorescenti.

3. Mi propongo di sostituire in seguito allo specchio S uno scodellino contenente sostanze diverse, per vedere dall' impressione sulla lastra superiore se ed in quale misura queste sieno variamente propizie all' emanazione dei raggi di Röntgen.

Ho tentato anche di produrre questi raggi con un palloncino vuoto privo di elettrodi; ma nelle due prove che finora ho potuto fare, i palloncini si sono forati, non senza però che in uno di essi mi fosse dato di osservare due belle macchie fluorescenti alle estremità d' un diametro; ed insistendo, spero di riuscire ad ottenere delle fotografie anche in questo modo.

Aggiunta nel rivedere le prove di stampa. — Ci sono riuscito il 16 marzo con un palloncino sferico di vetro avente il diametro di 73 mm. Due callotte opposte, del diametro di 33 mm., che nelle prove dei giorni passati avevo inargentate, in questa le ho coperte di acqua, e nell' acqua ho tuffato i reofori del rocchetto di Ruhmkorff. Per ciò ho circondato ciascuna callotta con un grosso anello di mastice (colofonia e cera): l' anello superiore fa da vaschetta e l' inferiore pesca in una vaschetta col fondo di mica sottilissima. La lastra fotografica, ben protetta dalla luce e coperta poi di rete metallica, è a 20 mm. dalla mica.

Il rocchetto è eccitato con interruttore rapido, in maniera da dare scintille di 6 cm. nell' aria. Il palloncino risplende tutto di sola luce verde, ma con maggior intensità ai poli, che sono i vertici delle callotte, e dai poli partono dei fasci di luce lungo i meridiani, così da dare l' illusione come se entro il palloncino si muovesse un involucro sferico luminoso formato di spicchi.

Derivando al suolo una delle callotte, essa si oscura, come nell' esperienza rappresentata dalla fig. 1 della mia Nota del 1° marzo.

Matematica. — *Su di un teorema del sig. Netto relativo ai determinanti, e su di un altro teorema ad esso affine.* Nota di ERNESTO PASCAL, presentata dal Socio CREMONA.

Ultimamente il sig. Netto in un lavoro nel Giornale di Crelle (*Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegunssatzes.* Crelle, v. 114, p. 345, 1895) ha presentato una formola da considerarsi come un' estensione della

cosiddetta regola di Laplace. Però la dimostrazione che l'autore dà di quel teorema lascia qualche cosa a desiderare dal punto di vista della semplicità e della eleganza.

Onde credo conveniente riprendere la quistione da un punto di vista che mi permetterà di dimostrare semplicemente il teorema in tutta la sua generalità, e che contemporaneamente mi potrà dare anche un altro teorema assai affine a quello, e che con quello si confonde solo in uno specialissimo caso.

§ 1.

Sia dato un determinante D di ordine $n+m$, e sopprimiamo le prime n linee e colonne; resta un determinante M di ordine m che noi svilupperemo colla formola di Laplace, cioè facendo la somma algebrica con segni opportuni dei prodotti dei minori contenuti in m_1 linee per i minori contenuti in altre m_2 linee, ecc., per i minori contenuti in m_k linee, dove

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$$

e due fattori di uno stesso prodotto sono sempre minori contenuti fra colonne tutte diverse.

In questo sommatorio, in luogo di ciascun fattore di ciascun termine poniamo quel minore, di tutto il determinante D, che si ottiene *sopprimendo in* D solo le medesime colonne e linee che bisognava sopprimere *nel determinante* M di ordine m per ottenere quel fattore. Il valore del sommatorio diventa allora il prodotto di D per la potenza $(k-1)^{ma}$ del minore complementare di M, che chiameremo N, cioè del determinante racchiuso dalle n linee e colonne soppresse.

Ecco una semplicissima dimostrazione del teorema.

Formiamo il reciproco di D e sia $D' = D^{n+m-1}$; gli omologhi di N e M in D' sieno N', M'.

Sia

$$\Delta_{m_1} \ \Delta_{m_2} \dots \Delta_{m_k}$$

un termine del sommatorio, dove Δ_{m_i} è di ordine $n+m_i$.

Moltiplichiamo questo termine per

$$D^{m-m_i-1} \ D^{m-m_2-1} \dots D^{m-m_k-1}$$

e osserviamo che per i notissimi teoremi sui reciproci, il prodotto

$$D^{m-m_i-1} \ \Delta_{m_i}$$

è un minore di M' di ordine $m-m_i$, e propriamente quel minore di M' il cui omologo in M ha per complemento in M quel minore che si ottiene da Δ_{m_i} sopprimendovi le n colonne e linee. Si riconosce così che, dopo ef-

fettuato il prodotto indicato, il sommatorio diventa ciò che si otterrebbe se si sviluppasse il determinante M' colla regola di Laplace, e indi in luogo di ogni minore di ordine $m_1\ m_2 \ldots$ si sostituisce il proprio complemento di ordine $m - m_1\,,\ m - m_2\,, \ldots$

È facile mostrare che così operando si ottiene allora il determinante su cui si opera elevato alla potenza $k-1$ [1]; dunque possiamo dire che il sommatorio primitivo moltiplicato per

$$D^{(m-1)k-m}$$

è eguale a

$$M'^{k-1} = N^{k-1}\, D^{(m-1)(k-1)}$$

donde infine

$$\sum \pm \Delta_{m_1} \ldots \Delta_{m_k} = D \,.\, N^{k-1}$$

§ 2.

Accanto al teorema di Netto dimostrato nel § precedente, cogli stessi principii ne possiamo trovare un altro.

Come nel § precedente formiamo secondo la regola di Laplace lo sviluppo di M, cioè del determinante ottenuto da un dato D di ordine $n+m$ sopprimendo n linee ed n colonne. Indi ad ogni minore di M che comparisce nella formola sostituiamo il proprio complemento, e infine ognuno dei minori così formati rendiamolo di ordine $n+(m-m_i)$ aggiungendo le n linee e n colonne soppresse in D.

Quale sarà allora il valore del sommatorio?

Moltiplichiamo ciascun termine per

$$D^{m_1-1}\, D^{m_2-1} \ldots D^{m_k-1}$$

e osserviamo che allora ogni termine diventa il prodotto di k minori di M', uno di ordine m_1, uno di ordine m_2, e infine l'ultimo di ordine m_k; il som-

[1] È facile dimostrare questo risultato. Sia dato un determinante A di ordine m. Formando i minori come occorre per applicare la regola di Laplace si ha

$$\sum \pm \Delta_{m_1} \Delta_{m_2} \ldots \Delta_{m_k} = A.$$

Di ogni Δ_{m_2} formiamo il suo complemento e sia Δ_{m-m_2}; vogliamo trovare il valore del sommatorio

$$\sum \pm \Delta_{m-m_1} \ldots \Delta_{m-m_k}.$$

Di A formiamo il reciproco e sia A' e sviluppiamo A' secondo prodotti di minori omologhi ai $\Delta_{m_1} \ldots \Delta_{m_k}$. Si ha

$$\sum \pm \Delta'_{m_1} \ldots \Delta'_{m_k} = A' = A^{m-1}.$$

E potendosi ogni Δ' esprimere mediante i Δ_{m-m_i} e potenze di A, si ha infine il risultato annunciato nel testo.

matorio diventa allora esattamente lo sviluppo del determinante M′ e quindi eguale a

$$\mathrm{N} \, . \, \mathrm{D}^{m-1}.$$

Sopprimendo al primo e secondo membro il fattore comune D^{m-k}, resta

$$\sum \pm \Delta_{m-m_1} \Delta_{m-m_2} \ldots \Delta_{m-m_k} = \mathrm{A}^{k-1} \, \mathrm{N}.$$

Si ha in certo modo un risultato inverso a quello che si raggiunge colla formola di Netto, in quantochè restano come invertiti fra loro i due determinanti D e il suo minore N.

È evidente che per $k=2$, i due teoremi si confondono.

Di questi teoremi si può dare una estensione, come farò vedere in altro lavoro in corso di stampa negli *Annali di Matematica.*

Matematica. — *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

1. Nella teoria delle superficie hanno fondamentale importanza le così dette curve *canoniche* (sezioni della superficie supposta d'ordine n con superficie aggiunte d'ordine $n-4$) possedenti carattere invariantivo rispetto a trasformazioni birazionali.

Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti è il genere (geometrico superficiale) p della superficie, mentre il genere di esse curve ne costituisce il 2° genere o *genere lineare* $p^{(1)}$.

Le superficie $(p>1, p^{(1)}=1)$ di cui le curve canoniche sono (irriducibili) ellittiche o si spezzano in curve ellittiche (d'un fascio) sono state considerate dal sig. Noether [1]. Nello stesso lavoro il sig. Noether ha dimostrato che le superficie a curve canoniche irriducibili hanno il genere lineare $p^{(1)} \geq 2p-3$, e che il valore minimo $p^{(1)}=2p-3$ si ottiene in corrispondenza alle superficie di cui le curve canoniche sono iperellittiche.

A queste superficie è dedicata la presente Nota, nella quale mi propongo dunque di determinare tutti i tipi di superficie aventi curve canoniche irriducibili iperellittiche $(p>2, p^{(1)}>1)$.

E innanzi tutto un richiamo per spiegare come deve intendersi l'irriducibilità del sistema canonico [2].

[1] *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.* Mathem. Annalen VIII.

[2] Per questa osservazione e per l'altra contenuta nel § 2 riferentisi alla teoria generale delle superficie, si può confrontare la mia: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie dell'Accad. dei XL, 1896).

Allorchè è data una superficie F_n d'ordine n e se ne considera la sezione con una generica superficie aggiunta φ_{n-4} d'ordine $n - 4$, si deve anzitutto ritrarne la curva multipla stessa contata opportunamente secondo risulta dal modo di comportarsi in essa di una superficie aggiunta (dunque $i(i-1)$ volte se si tratta di una curva ipla ordinaria): la parte residua contiene sempre come parti fisse quelle, eventuali, curve (*eccezionali*) che con una trasformazione della superficie possono esser mutate in un punto semplice; ma di queste curve eccezionali si distinguono due specie, secondochè il punto che viene a corrispondere ad una di esse sopra una opportuna trasformata $F'_{n'}$ d'ordine n', non appartiene o invece appartiene a tutte le superficie $\varphi_{n'-4}$ d'ordine $n' - 4$ aggiunte a $F'_{n'}$: ora le curve eccezionali della *1ª specie* debbono ancora essere ritratte dalla sezione di F_n colle φ_{n-4}; le intersezioni residue costituiscono propriamente le curve canoniche di F_n. Dunque nelle curve canoniche di F_n verrebbero incluse le eventuali curve eccezionali della *2ª specie*, la presenza delle quali costituisce perciò un caso di riducibilità del sistema canonico di F_n. Siccome poi si tratta di questioni invariantive ammettendo la irriducibilità del sistema canonico, deve anche escludersi la presenza di qualche punto di F_n (comune a tutte le φ_{n-4}) che in una trasformazione di F_n possa dar luogo a curve eccezionali di 2ª specie: in altre parole il sistema canonico su F_n non deve avere punti base (chè l'intorno d'un punto base costituirebbe una componente fissa del sistema stesso). Per queste superficie a sistema canonico irriducibile (che debbono riguardarsi costituenti il caso generale) si ha che il numero delle intersezioni variabili di due curve canoniche (di genere $p^{(1)}$) è

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

(Noether, l. c.).

Ciò premesso (a scanso di equivoci) si ha il resultato seguente:

Le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono irriducibili iperellittiche

$$(p > 2, \quad p^{(1)} > 1)$$

a) posseggono un fascio razionale di curve di genere due, oppure sono rappresentabili;

b) sul piano doppio con curva di diramazione dell' 8º ordine ($p = 3$);

c) o sul piano doppio con curva di diramazione del 10º ordine ($p = 6$).

2. Avanti di entrare in argomento, cioè di venire alla dimostrazione del resultato innanzi enunciato, mi par conveniente di riportare la proprietà che caratterizza le curve canoniche sopra una superficie di fronte ad un qualsiasi sistema lineare (irriducibile) su di essa tracciato, poichè di questa proprietà dovremo far uso più volte nel seguito.

Sopra una superficie F una curva canonica sega la curva generica C di un qualsiasi sistema lineare irriducibile $|C|$, secondo un gruppo che sommato all'intersezione di un'altra C (ossia ad un gruppo della serie *caratteristica* di $|C|$) e al gruppo dei punti base di $|C|$, costituisce un gruppo canonico (di $2p^{(1)}-2$ punti) della detta C (di genere $p^{(1)}$).

Viceversa tale proprietà è caratteristica per le curve canoniche.

È sottinteso che alla superficie F si possa indifferentemente sostituire una sua trasformata, e però si debba tener conto opportunamente delle curve eccezionali di F cui venissero a corrispondere punti base per $|C|$, aggiungendo esse pure alle curve canoniche, appunto come si fa dei nominati punti base.

3. Consideriamo una superficie F a curve canoniche (irriducibili) iperellittiche ($p>2$, $p^{(1)}>1$). Consideriamo su di F un fascio generico di curve canoniche: le infinite g_2^1 appartenenti alle curve (iperellittiche) del fascio, danno luogo ad una involuzione Γ_2^2 su F: se gli elementi (coppie) di questa Γ_2^2 si considerano essi stessi come i punti (in senso astratto) d'una nuova superficie F′, la F′ possiede un fascio razionale di curve razionali (ciascuna curva essendo costituita dalle infinite coppie di una delle nominate g_2^1), e però è razionale [1], ossia rappresentabile punto per punto sul piano. Per conseguenza la data F è rappresentabile sul piano doppio, riferendo ai punti del piano le coppie della Γ_2^2 (e ciò osserva pure il sig. Noether, Mathem. Annalen VIII). Segue [2] che tutte le curve canoniche di F *appartengono* all'involuzione Γ_2^2 ossia contengono infinite coppie di questa (costituenti alla lor volta su ciascuna curva una involuzione γ_2^1).

La involuzione Γ_2^2 ottenuta su F a partire da un fascio di curve canoniche (iperellittiche), varierà con questo fascio, o sarà indipendente da esso?

È facile riconoscere che la Γ_2^2 non varia al variare del fascio di curve canoniche scelto su F. Si può fare la dimostrazione per assurdo nel modo seguente:

se la Γ_2^2 su F varia col fascio nominato, essa deve variare con continuità, e con continuità deve variare ancora l'involuzione γ_2^1 composta dalle coppie di Γ^2 appartenenti ad una data curva canonica; si ha dunque sulla curva canonica una serie continua di involuzioni γ_2^1, le quali debbono essere razionali [3], e la curva stessa è in conseguenza una curva ellittica ($p^{(1)}=1$), mentre abbiamo supposto che essa sia di genere $p^{(1)}>1$.

(1) Cf. Noether, *Ueber Flächen welche eine Schaar rationaler Curven besitzen,* Math. Ann. III.

(2) Cf. Castelnuovo, Istituto lombardo 1891, e le mie: *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche,* VI (Memorie Accad. Torino 1893).

(3) Il teorema che afferma l'impossibilità di una serie continua di involuzioni irrazionali sopra una curva è stabilito implicitamente dal sig. Painlevé: *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre,* Annales de l'École normale 1891, ed esplicitamente (con altro metodo) dal sig. Castelnuovo, Atti dell'Accad. di Torino 1893, e dal sig. Humbert, Comptes rendus e Journal de Mathématiques 1893.

Deduciamo che sopra la superficie F vi è una involuzione Γ_2^2 alla quale appartengono tutte le curve canoniche, tale che le coppie di Γ_2^2 formano su ciascuna curva canonica (iperellittica) la g_2^1 che essa possiede.

Dunque nella rappresentazione di F sul piano doppio (ottenuta riferendo ai punti del piano le coppie di Γ_2^2) le curve canoniche hanno per immagini le curve *razionali* d'un sistema lineare ∞^{p-1}. Questo sistema lineare di curve razionali è determinato dal gruppo base, perchè altrimenti ogni curva razionale del sistema più ampio cogli stessi punti base sarebbe l'immagine (doppia) di una curva su F cui spetterebbero le stesse proprietà caratteristiche per le curve canoniche (§ 2).

Questa osservazione ci permette di affermare in particolare che le ∞^{p-2} curve canoniche di F passanti per un suo punto generico A, (le quali curve passano in conseguenza per il punto coniugato di A nella Γ_2^2), non passano tutte per altri punti variabili con A.

4. Riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema canonico ∞^{p-1} su F, agli iperpiani S_{p-2} di un S_{p-1}: si ottiene allora in S_{p-1} una superficie Φ i cui punti rappresentano le coppie della Γ_2^2, cioè una superficie doppia (dotata d'una certa curva di diramazione) su cui la F viene rappresentata. La Φ è (per ciò che si è detto innanzi) una superficie razionale rappresentabile sul piano prendendo come immagini delle sezioni iperpiane le ∞^{p-1} curve razionali di un sistema determinato dai punti base; essa è dunque una superficie normale a sezioni iperpiane razionali; perciò il suo ordine vale

$$p-2=\frac{p^{(1)}-1}{2}.$$

La Φ può essere [1]:

1° un piano;

2° una superficie di Veronese del 4° ordine in S_5;

3° una superficie rigata.

Discutiamo partitamente i tre casi.

Caso 1°. Se la Φ è un piano (doppio), si ha

$$p=3 \quad p^{(1)}=3,$$

e poichè una retta del piano è l'immagine (doppia) di una curva canonica su F, di genere 3, la curva di diramazione del piano doppio Φ ha l'ordine 8.

Caso 2°. Se la Φ è una superficie di Veronese del 4° ordine in S_5, si ha

$$p=6 \quad p^{(1)}=9,$$

e poichè una sezione iperpiana di Φ è l'immagine (doppia) di una curva ca-

[1] Cfr. Picard, I von Crelle, C. e Guccia, Circolo Mat. di Palermo, I.

nonica su F avente il genere $p^{(1)} = 9$, la curva di diramazione su Φ ha l'ordine 20.

Rappresentiamo la Φ punto per punto sul piano, in guisa che le sezioni iperpiane di essa abbiano per immagini le coniche, ed avremo rappresentato la superficie F sul piano doppio con curva limite di ordine 10.

Caso 3°. La Φ sia una rigata razionale normale in S_{p-1} ($p > 3$).

Dico che le generatrici di Φ rappresentano (doppiamente) curve di genere 2 (costituenti un fascio) su F.

Si escluda dapprima che la Φ stessa sia in cono. Allora le generatrici di Φ non hanno alcun punto comune, e poichè inoltre a Φ non appartiene alcuna curva eccezionale, le curve C di F corrispondenti alle rette di Φ formano pure un fascio (lineare) senza punti base; perciò le curve canoniche segano le curve C (di genere π) su F, ciascuna in un gruppo canonico di $2\pi - 2$ punti e poichè le segano in *due* punti, le C stesse hanno il genere $\pi = 2$.

Se la Φ è un cono, potrebbe nascere il sospetto che il suo vertice fosse immagine di qualche punto base pel fascio delle curve C aventi come immagini (doppie) le generatrici di Φ. Ma in questo caso possiamo valutare il genere π delle C nel seguente modo:

Un iperpiano pel vertice del cono Φ (di S_{p-1}) sega il cono stesso in $\frac{p^{(1)} - 1}{2}$ generatrici, al gruppo delle quali corrisponde su F una curva canonica spezzata in altrettanti componenti di genere π ciascuna: queste componenti debbono esser fra loro connesse, come si deduce riguardando la detta curva spezzata come limite di una curva canonica irriducibile, e però se si valuta il genere ($p^{(1)}$) della nominata curva composta secondo la nota formula che dà il genere d'una curva spezzata [1], si ha

$$p^{(1)} \geq \pi \frac{(p^{(1)} - 1)}{2},$$

da cui segue (essendo $\pi > 1$) $\pi = 2$. Del resto ciò può anche confermarsi col computo dell'ordine della curva di diramazione su Φ e del numero delle sue intersezioni colle generatrici di Φ.

Resta così provato che le superficie a curve canoniche iperellittiche rientrano nelle tre classi delimitate nel § 1.

Importa ora di vedere che le superficie di queste classi hanno effettivamente le curve canoniche iperellittiche.

5. Chè le superficie possedenti un fascio lineare di curve C di genere due abbiano le curve canoniche iperellittiche (supposto $p > 2$, $p^{(1)} > 1$),

[1] Cfr. Noether, *Acta matematica,* 8, e la mia: *Introduzione* ecc., § 16.

segue subito dalla proprietà caratteristica delle curve canoniche. Invero ciascuna curva canonica deve incontrare una C in due punti costituenti una coppia della g_2^1 su di essa, e quindi le C (costituenti un fascio lineare) determinano sopra ogni curva canonica una g_2^1. Rimane soltanto da stabilire che i piani doppi con curva limite di ordine 8 e 10 hanno risp. il genere $p = 3$, $p = 6$, e posseggono come immagini delle curve canoniche le rette e risp. le coniche del piano: da ciò segue invero che tali piani doppi rappresentano superficie algebriche a curve canoniche iperellittiche.

L' asserzione precedente è contenuta come corollario nel seguente enunciato:

Il piano doppio avente come curva limite la curva generale d' ordine $2n$ *ha il genere* $p = \frac{(n-3)n}{2}$, *e possiede come immagini delle curve canoniche le curve d' ordine* $n - 3$ *(contate due volte).*

Sia

$$\varphi(xy) = 0$$

l' equazione della curva limite d' ordine $2n$, e si rappresenti il piano doppio sulla superficie (d' ordine $2n$)

$$z^2 = \varphi(xy)$$

che ha come $2(n-1)$ plo il punto all' infinito O dell' asse z perpendicolare al piano $z = 0$.

La sezione piana generica della superficie fatta con un piano per O ha il genere $n - 1$, e quindi possiede oltre al punto $2(n-1)$ plo O, altri $n - 1$ punti doppi (sia pure infinitamente vicini ad O): in conseguenza le superficie d' ordine $2n - 4$ aggiunte alla $z^2 = \varphi(xy)$ (le quali sono cilindri di vertice O), si spezzano in un cilindro fisso d' ordine $n - 1$ proiettante da O la curva doppia, ed in un qualsiasi cilindro d' ordine $n - 3$ col vertice O.

Segue il precedente enunciato.

E rimane così esaurita la questione che forma argomento della presente Nota.

6. Aggiungeremo l' osservazione seguente relativa alla costruzione di una superficie proiettivamente determinata, tipo della classe di superficie con un fascio razionale di curve di genere due.

Tali superficie, da quanto si è detto, risultano riferibili al piano doppio con curva di diramazione d' ordine $2n$ dotata di punto $(2n - 6)$ plo.

Si può supporre il punto $(2n - 6)$ plo di questa curva nel punto all' infinito dell' asse x, ed allora la sua equazione (in coordinate cartesiane)

$$\varphi(xy) = 0$$

conterrà x al 6° grado.

Il piano doppio è allora da riguardarsi come proiezione dal punto all'infinito dell'asse z, della superficie d'ordine $2n$

$$z^2 = \varphi(xy),$$

per cui la retta all'infinito dei piani $y =$ cost è $(2n - 6)$ pla.

Si deduce che:

Ogni superficie con un fascio razionale di curve di genere due può trasformarsi in una superficie di un certo ordine $2n$ *con retta* $(2n - 6)$ *pla e un (particolare) punto* $(2n - 2)$ *plo su questa.* In casi particolari si può rappresentare questa superficie sopra un'altra d'un certo ordine m con retta $(m - 5)$ pla o $(m - 4)$ pla e punto $(m - 2)$ plo su di essa.

Matematica. — *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni.* Nota di Luigi Berzolari, presentata dal Socio Beltrami.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Sui coefficienti di affinità degli acidi dedotti dalle decomposizioni idrolitiche.* Nota di U. Antony, presentata dal Corrispondente R. Nasini [1].

In una Nota inserita nella Gazzetta chimica italiana (anno XXV, 2, pag. 1) pubblicai uno studio da me fatto, in unione al dott. G. Gigli, *Sulla decomposizione idrolitica del cloruro ferrico*, studio che successivamente fu esteso anche al nitrato e al solfato relativamente al quale è stata già inviata per la pubblicazione una nuova Nota alla Gazzetta stessa. Le conclusioni stabilite al seguito delle varie esperienze, mi sembrano di una qualche importanza, non solo per quanto ha stretto riguardo alla decomposizione idrolitica dei sali fer-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Pisa.

rici stessi, ma anche perchè offrono il mezzo di misurare con metodo molto semplice i coefficienti di affinità dei varî acidi.

Per quanto ha riguardo alla decomposizione idrolitica dei detti sali ferrici, le osservazioni fatte conducono a ritenere che dessa non si esercita esclusivamente a dare idrato ferrico e acido libero, talchè possa dirsi con W. Ostwald [1] che: *i sali ferrici, anche ad acidi forti, sono, in soluzione acquosa, più o meno idroliticamente dissociati in acido libero e idrato ferrico colloidale disciolto*, ma che la sostituzione di idrossili ai residui alogenici si effettua per gradi, a seconda della diluizione, per modo che devono considerarsi in soluzione o i sali normali, o i derivati mono-, e bi-idrossilati di questi, poi per diluizioni forti anche idrato ferrico, e da ultimo idrato ferrico soltanto per il cloruro e per il nitrato; mentre pel solfato, l' idrato che si forma, non può assumere lo stato colloidale dipendentemente dalla presenza dell' acido solforico e quindi si separa allo stato insolubile.

Con osservazioni, quanto più è stato possibile accurate, e con esperienze eseguite su gran numero di soluzioni di tali sali ferrici potei, insieme al dott. Gigli, stabilire la quantità di acqua necessaria perchè tutti i residui alogenici fossero sostituiti da idrossili, ossia perchè tutto il sale ferrico fosse scomposto idroliticamente a dare acido libero e idrato ferrico: e i numeri seguenti esprimono, appunto, la quantità di acqua occorrente perchè tale decomposizione sia completa per una parte in peso del sale, e così:

per 1 p. di cloruro ferrico, occorrono p. 120000 di acqua,
» 1 » nitrato » » » 80000 »
» 1 » solfato » » » 60000 »

Questi numeri non saranno esatti, nè potrebbero esserlo stante le cause d' errori inevitabili, fra le quali convien notare, principalmente, la difficoltà di preparare i sali in modo che in essi ferro e residuo alogenico si trovino esattamente nel rapporto dato dalle formule: la difficoltà di preparare le soluzioni a vario grado di diluizione, dovendo misurare, sia volumi piccolissimi delle soluzioni concentrate di sali ferrici, sia grandissimi di acqua; ad ogni modo, tali quali sono, posson dare un adeguato concetto del come varii la quantità di acqua col variare della natura del residuo alogenico. E calcolando in base a detti numeri, quanta acqua occorra per separare dal ferro i varî residui alogenici, si può dire che, in numeri tondi,

pel residuo Ch. occorrono p. 6480000 di acqua,
» » NO^3 » » 6430000 »
» » $\frac{SO^4}{2}$ » » 3980000 »

Questi ultimi numeri poichè esprimono la quantità di acqua necessaria e sufficiente ad impedire che l' acido fattosi libero reagisca con l' idrato fer-

[1] Wiss. Grundl. d. anal. Chemie, 126.

rico, oppure, il che è lo stesso, ad annullare l'azione degli acidi stessi, dovranno anche esprimere l'energia relativa degli acidi cloroidrico, nitrico, solforico: dovranno cioè essere proporzionali ai numeri coi quali Thomsen espresse l'*avidità degli acidi*, proporzionali, quindi, ai coefficenti di affinità di Guldberg e Waage.

I numeri, dati da Thomsen ad esprimere l'avidità dei detti acidi, sono:

per 1 molecola di acido cloroidrico = 1
" 1 " " anitrico = 1
" $^1/_2$ " " solforico = 0,49

I numeri che ho dato sopra stanno fra loro nel rapporto:

pel residuo Ch. = 6480000 . . . 1
" " NO^3 = 6430000 . . . 0,99
" " $\frac{SO^4}{2}$ = 3980000 . . . 0,61

L'accordo coi numeri di Thomsen è dunque perfetto per l'acido cloroidrico e nitrico. Il leggero disaccordo per l'acido solforico, trova ampia giustificazione nella maggiore difficoltà incontrata nelle esperienze relative al solfato ferrico pel quale la insolubilità dell'idrato ferrico, non consente di cogliere con sufficiente esattezza il punto della completa decomposizione; in prova di ciò, mi basta di far rilevare che si avrebbe avuto accordo perfetto, qualora la quantità di acqua necessaria a determinare la decomposizione relativamente ad 1 p. in peso di solfato ferrico, fosse risultata di p. 50000 anzichè di 60000, vale a dire per una differenza del contenuto in solfato di gr. 0,00033 %.

Credo dunque poter concludere che lo studio delle decomposizioni idrolitiche relativamente ai diversi sali, possa condurre alla misura dei coefficenti di affinità dei varî acidi (e dei varî metalli) come i metodi di Thomsen e di Oswald ed in modo molto più semplice.

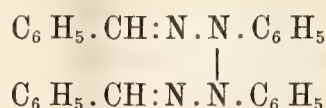
Chimica. — *Ricerche sui prodotti di ossidazione degli idrazoni. I. Ossidazione del benzalfenilidrazone* [1]. Nota di G. Minunni ed E. Rap, presentata dal Socio Paternò.

Per ossidazione del benzalfenilidrazone con ossido giallo di mercurio in soluzione cloroformica uno di noi [2] ottenne tempo fa una sostanza gialla ben cristallizzata fusibile a 180°, che all'analisi diede numeri corrispondenti alla formola $C_{26}\,H_{22}\,N_4$. H. v. Pechmann [3] trovò in seguito che questo

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Palermo.
[2] Gazz. chim. Ital., t. XXII, parte II, 228.
[3] Berichte, XXVI, 1045.

prodotto di ossidazione si forma anche per trattamento del benzalfenilidrazone con nitrito di amile in soluzione eterea e per azione dell' aldeide benzoica sulla nitrosofenilidrazina. Recentemente poi H. Ingle e H. H. Mann (1) ottennero l' identica sostanza trattando l' idrazone dell' aldeide benzoica con jodio ed etilato sodico in soluzione eterea. In quest' ultima reazione si forma contemporaneamente un corpo fusibile a 208°, che i chimici inglesi considerano come uno stereoisomero dell' osazone del benzile.

Al prodotto di ossidazione del benzalfenilidrazone uno di noi attribuì la formola di struttura

$$\begin{array}{l} C_6H_5.CH:N.N.C_6H_5 \\ \qquad\qquad\quad\;\; | \\ C_6H_5.CH:N.N.C_6H_5 \end{array}$$

che fu poi accettata da H. v. Pechmann, il quale diede al suddetto prodotto il nome di dibenzaldifenilidrotetrazone (2).

Gli studî sui prodotti di ossidazione degli idrazoni furono continuati in questo laboratorio. Noi ci siamo occupati specialmente del benzalfenilidrazone, ed abbiamo trovato che esso fornisce non uno ma tre prodotti di ossidazione, due dei quali sono isomeri fra di loro e capaci di subire delle trasformazioni chimiche interessanti. Sul meccanismo di queste trasformazioni e sulla costituzione dei composti che ne risultano non è stata fatta ancora piena luce; pur nondimeno, per ragioni di priorità, crediamo opportuno, dopo le pubblicazioni di v. Pechmann e di Ingle e Mann, comunicare sommariamente i risultati finora ottenuti (3).

Ed anzitutto dobbiamo rettificare le inesattezze in cui sono incorsi i sullodati chimici a proposito del punto di fusione del dibenzaldifenilidrotetrazone.

Secondo H. v. Pechmann questo corpo fonde a 190° e non già a 180° come aveva osservato uno di noi. Evidentemente v. Pechmann non lesse il lavoro originale pubblicato nella Gazzetta chimica (t. XXII, II, 228): ivi è detto che la sostanza fonde con decomposizione a 180° in un bagno precedentemente riscaldato, e così è realmente. Ma nella fusione il dibenzaldifenilidrotetrazone si trasforma, come noi abbiamo trovato, in un composto isomero che fonde a temperatura più elevata, e si differenzia dall' idrotetrazone anche per le sue proprietà chimiche. Provvisoriamente chiameremo questa sostanza *deidrobenzalfenilidrazone.*

In un bagno riscaldato precedentemente a 200° circa il dibenzaldifenilidrotetrazone fonde a 180-181° con sviluppo di gas, e viene lanciato con vio-

(1) Journal of the chem. Society 1895, 606.

(2) Berichte, XXVII, 2920.

(3) La descrizione particolareggiata delle esperienze eseguite si trova, unitamente ai dati analitici, in una Memoria che è stata già presentata alla Direzione della « Gazzetta chimica italiana » e che verrà pubblicata in uno dei prossimi fascicoli di detto periodico.

lenza nella parte superiore del tubicino, ove immediatamente si solidifica. Quando si riscalda lentamente la trasformazione nell' isomero avviene egualmente fra 175-180°, ma non è preceduta dalla fusione, anzi l' alterazione che subisce la massa in queste condizioni di esperienza, nel momento in cui ha luogo la trasposizione molecolare, è appena visibile. Continuando a riscaldare, il deidrobenzalfenilidrazone formatosi fonde fra 185 e 190°, ma questo non è che il punto di fusione del prodotto grezzo, il deidrobenzalfenilidrazone puro fonde verso 198-200°.

Ingle e Mann non si accorsero neppure essi della trasformazione che subisce l' idrotetrazone per azione del calore; essi trovarono per il deidrobenzalfenilidrazone grezzo il punto di fusione 186°, che erroneamente attribuirono all' idrotetrazone.

In una nota successiva uno di noi descriverà altre esperienze ora in corso, da cui risulta che anche i prodotti di ossidazione di altri idrazoni sono in grado di subire analoghe trasformazioni per azione del calore.

Abbiamo inoltre osservato che il deidrobenzalfenilidrazone si forma anche direttamente dall' idrazone dell' aldeide benzoica. Ossidando quest' ultimo con ossido giallo di mercurio in soluzione cloroformica più o meno concentrata, si ottiene costantemente un miscuglio di deidrobenzalfenilidrazone e di dibenzaldifenilidrotetrazone. Operando invece con ossido di mercurio in soluzione cloroformica molto diluita, oppure in soluzione eterea, si ottiene esclusivamente deidrobenzalfenilidrazone.

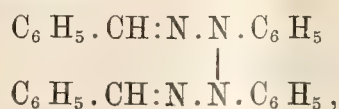
H. v. Pechmann ossidando l' idrazone dell' aldeide benzoica con nitrito di amile ottenne soltanto l' idrotetrazone.

Appena egli pubblicò la sua nota noi ripetemmo l' esperienza e constatammo che in questa reazione si formano invece tre prodotti, cioè l' idrotetrazone, il deidrobenzalfenilidrazone, che noi avevamo fin d' allora ottenuto per le vie suindicate ed un terzo composto ossigenato che, a differenza dell' idrotetrazone e del suo isomero, è insolubile nel benzolo anche a caldo; esso si scioglie invece nell' alcool bollente da cui cristallizza in aghi od in granellini che non fondono neppure a 240°. Su questa sostanza non abbiamo potuto fare uno studio accurato, perchè si forma in piccolissima quantità e non fu ottenuta allo stato di chimica purezza.

La formazione del deidrobenzalfenilidrazone nella reazione fra l' idrazone dell' aldeide benzoica ed il nitrito di amile, è stata constatata anche da Ingle e Mann, ma questi chimici non fanno alcun cenno del terzo prodotto di ossidazione che noi siamo riusciti ad isolare.

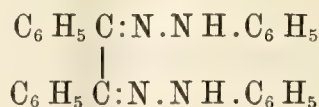
Per quanto riguarda le proprietà chimiche dei due isomeri, noi ci siamo occupati per ora principalmente del loro comportamento col cloruro di benzoile.

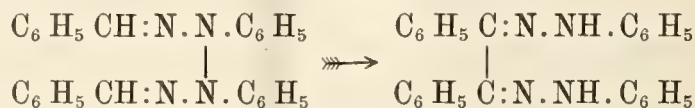
Il dibenzaldifenilidrotetrazone

$$\begin{array}{l} C_6H_5.CH:N.N.C_6H_5 \\ \qquad\qquad\quad | \\ C_6H_5.CH:N.N.C_6H_5 , \end{array}$$

pur non contenendo idrogeno immidico, reagisce, come noi abbiamo constatato, con grande facilità col cloruro di benzoile dando un miscuglio di diversi corpi. Ma il prodotto principale della reazione, che noi abbiamo ottenuto chimicamente puro e che fonde a 211-213°, non è un derivato benzoilico.

All' analisi esso diede numeri corrispondenti alla formola $C_{14} H_{10} N$. Su questo composto, cui molto probabilmente compete una formola doppia di quella suindicata, non abbiamo ancora fatto uno studio profondo; abbiamo però osservato un fatto importante che contribuirà certamente a chiarire la sua costituzione.

Secondo le nostre esperienze la sostanza fusibile a 211-213° si forma anche per azione del cloruro di benzoile sul β-osazone del benzile (p. di f. 255°):

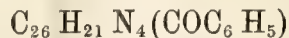
$$\begin{array}{l} C_6H_5\,C{:}N.NH.C_6H_5 \\ \quad\quad\ \ | \\ C_6H_5\,C{:}N.NH.C_6H_5 \end{array}$$

Molto probabilmente nella reazione fra il cloruro di benzoile e l' idrotetrazone si formerà dapprima per trasposizione molecolare

$$\begin{array}{l} C_6H_5\,CH{:}N.N.C_6H_5 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ \ | \\ C_6H_5\,CH{:}N.N.C_6H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} C_6H_5\,C{:}N.NH.C_6H_5 \\ \quad\quad\ \ | \\ C_6H_5\,C{:}N.NH.C_6H_5 \end{array}$$

l' osazone del benzile, che in una seconda fase fornisce col cloruro di benzoile la sostanza fusibile a 211-213°.

In favore di questa interpretazione parla la proprietà che ha l' idrotetrazone di trasformarsi in benzileosazone (punto di fusione 225°) per azione della potassa alcoolica [1].

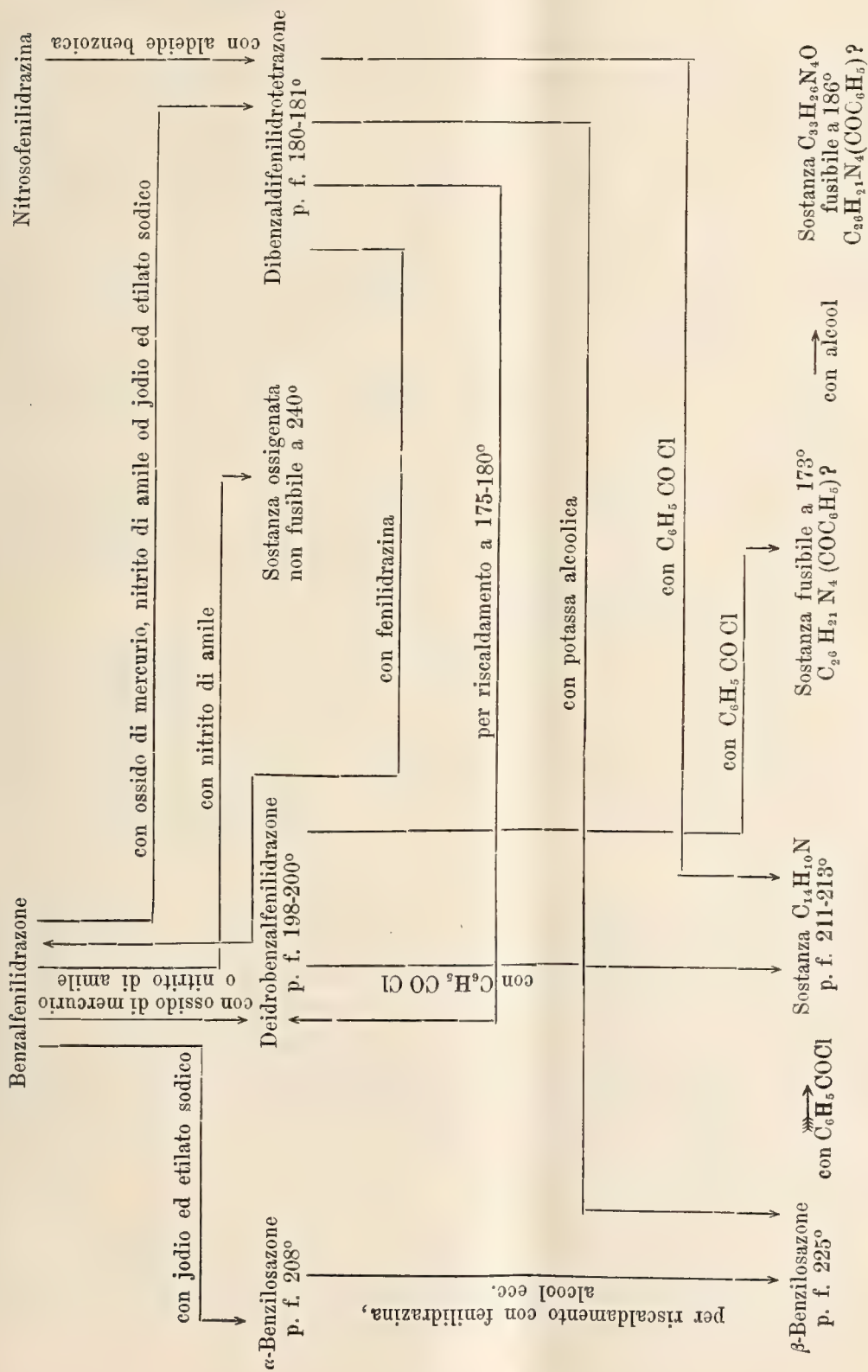
Il deidrobenzalfenilidrazone riscaldato con cloruro di benzoile a 100° fornisce anch' esso il composto fusibile a 211-213°, però in soluzione benzolica, oppure per l' azione diretta del cloruro di benzoile a 95-97° fornisce come prodotto principale un composto anch' esso ben cristallizzato e fusibile a 173°.

Avendo tentato di cristallizzare quest' ultimo corpo dall' alcool bollente, abbiamo constatato che esso si trasforma in un nuovo prodotto fusibile a 186°, che ha la composizione di un derivato monobenzoilico dalla formola

$$C_{26} H_{21} N_4 (COC_6 H_5)$$

La sostanza fusibile a 173° non è stata ancora analizzata, non avendo potuto ripreprararla per mancanza di materiale. È probabile che ad essa competa anche la formola suindicata di un derivato monobenzoilico, e che per l' azione dell' alcool subisca semplicemente una trasposizione molecolare.

[1] Journal of the chem. Society 1895, 611.

Uno di noi ha già in corso altre esperienze dirette a chiarire la costituzione dei prodotti di ossidazione del benzalfenilidrazone e dei loro derivati. Le ricerche saranno estese anche ad altri idrazoni.

Nella seguente tabella sono riunite le trasformazioni che abbiamo precedentemente accennate.

Chimica. — *Sulle soluzioni solide del fenolo in benzolo.* Nota di Felice Garelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Memoria pubblicata nel 1893 [1] io ho fatto rilevare, che il comportamento crioscopico del fenolo sciolto in benzolo era diverso da quello proprio agli altri fenoli in genere: e già allora ho enunciato l'ipotesi che tale anomalia caratteristica risultasse dalla concomitanza di due cause diverse.

L'una di queste, e la principale secondo me, doveva risiedere nella formazione di soluzione solida fra il fenolo e il benzolo, indotta dalla somiglianza di costituzione delle due sostanze: l'altra, comune ai corpi ossidrilati in genere, era rappresentata dalla ben nota tendenza a formare molecole complesse non interamente dissociate dal solvente, specie quando questo è un idrocarburo.

Io fondavo allora questa supposizione, e sull'analogia di comportamento crioscopico coi due naftoli sciolti in naftalina, e sulla notevole differenza di comportamento del fenolo in benzolo a seconda che impiegavo il metodo crioscopico o quello ebulliometrico.

Nello stesso anno Auwers [2], benchè non anco a conoscenza della mia pubblicazione e senza fare dal canto suo alcuna ipotesi, avvertiva egli pure che il fenolo sciolto in benzolo si comportava diversamente dagli altri composti aventi la medesima funzione chimica.

Recentemente [3] ho avuto occasione di ritornare su tale questione, poichè credetti di aver trovato nuovi fatti in appoggio della mia ipotesi: dacchè anche il comportamento crioscopico degli acidi ossibenzoici nel benzoico, dei biossibenzoli nel fenolo, corpi tutti differenti dal solvente per un solo idrossile, fu da me attribuito parimenti alla formazione di soluzione solida. Ciò anzi ho potuto dimostrare pel caso dell'acido salicilico sciolto nel benzoico.

Allo stesso ordine di anomalie mi sembrò si dovesse ascrivere quella interessantissima e caratteristica scoperta da Paternò per l'ossidifenilmetano sciolto nel difenilmetano. Però, mentre per il comportamento dei naftoli [4] in naftalina e degli acidi ossibenzoici in benzoico [5] ci sono delle esperienze dirette che ben dimostrano come in tal caso l'anomalia crioscopica sia dovuta alla formazione di soluzioni solide, pel caso importante e fondamentale del fenolo in benzolo una tale prova non era stata ancor data.

(1) Gazz. chimica, 1893, II, pag. 369.
(2) Zeitschrift. phys. Chem. 1893, XII, pag. 709.
(3) Gazz. chimica, 1895, vol. II, pag. 179.
(4) Zeitschrift. phys. Chem., VIII, 343.
(5) Gazz. chimica, 1896, vol. I, pag. 61.

Perciò mi parve necessario colmare questa lacuna, e questo mi propongo di fare nella presente Nota.

Per provare che il fenolo cristallizza in parte con il solvente quando se ne fa congelare la soluzione benzolica io ho seguito il metodo ideato da A. van Bijlert del quale già ripetei la descrizione nella mia ultima Nota.

Nella massa cristallina, che si separa, il fenolo si può determinare molto esattamente per via volumetrica, trasformandolo in tribromofenolo. Rispetto al modo più conveniente di preparare i liquidi titolati e di eseguire il saggio ho seguito le istruzioni contenute in un lavoro di Küster (1). Posso confermare anch'io che con tale metodo la determinazione del fenolo viene eseguita con una esattezza sorprendente.

Come sostanza normale ho scelto il benzile. Per effettuarne nettamente la separazione dal fenolo e dal benzolo mi occorreva un corpo di natura indifferente, che fosse insolubile nell' acqua, che non venisse alterato dalle soluzioni alcaline neppure con lieve riscaldamento, ed infine che si potesse determinare con facilità ed esattezza sufficiente. Il benzile risponde abbastanza bene a tutte queste condizioni.

Prima naturalmente mi sono assicurato, con alcune determinazioni crioscopiche, che il benzile, sciolto in benzolo, dà peso molecolare normale, e che il fenolo, in presenza di benzile, dà il medesimo abbassamento del punto di congelamento che produce da solo.

Benzile in benzolo, $C_{14} H_{10} O_2 = 210$.

Concentrazione	Abbassamento del p. di congelamento	Peso molecolare	
1,2201	0°,290	206	
2,157	0 ,515	205	
Fenolo aggiunto alla precedente soluzione			
2,371	0°,640	181	169 (2)

Rispetto al modo di eseguire la determinazione ho operato così: dalla miscela preparata in proporzioni note, separavo con l'apparecchio solito, una porzione di cristalli uguali circa al decimo del peso totale della miscela. I cristalli venivano fusi col calore della mano, il liquido raccolto in boccettina di vetro a tappo smerigliato, di conveniente capacità, tarata, e ripesata in seguito. Aggiungevo poscia soluzione di potassa caustica in eccesso, agitavo fortemente, trasportavo il liquido in cassula di vetro, lavando la boccetta prima con etere, poi con acqua; scaldavo la cassula per qualche

(1) Berichte, XVII, pag. 328.

(2) Peso molecolare fornito dal fenolo in soluzione puramente benzolica alla concentrazione del 2,4465, secondo le esperienze di Paternò.

tempo, ma senza far bollire, su bagno maria a fine di eliminare l' etere e il benzolo. Il benzile così separatosi dal liquido veniva raccolto su filtro tarato e pesato dopo essicamento nel vuoto su acido solforico e paraffina. Nel filtrato determinavo il fenolo col metodo volumetrico sovra accennato.

Esperienze preliminari eseguite prima sopra quantità note di fenolo, poi sopra mescolanze di fenolo, benzile e benzolo, mi hanno dato i seguenti risultati, comprovanti la bontà del metodo di analisi testè descritto.

I.	Fenolo presente	gr.	0,0537 ;	fenolo trovato	gr.	0,05334	pari a	99.3 %
II.	Benzile	»	0,0943 ;	benzile	»	0,09350	»	99.2 »
	Fenolo	»	0,0643 ;	fenolo	»	0,06425	»	99.9 »
III.	Benzile	»	0,0840 ;	benzile	»	0,08260	»	98.3 »
	Fenolo	»	0,0537 ;	fenolo	»	0,05294	»	98.4 »

Ed ora ecco i risultati delle prime sei esperienze ch' io ho eseguite sopra soluzioni di diversa concentrazione:

I. Esperienza.

Composizione della miscela:

Benzolo	gr.	52,11	pari a	94,06	pcto.
Fenolo	»	1,647	»	2,97	»
Benzile	»	1,647	»	2,97	»
	»	55,404		100,00	

Peso della massa cristallina separata . . . . gr. 6,778
In essa si trovò: Fenolo . . . . » 0,10655
Benzile . . . . » 0,0600

Fenolo nella soluzione solida . . . . » 0,0485

Su 100 parti di massa cristallina havvi dunque 0,6860 di fenolo in soluzione solida. Cioè su 100 parti di esso, contenute nella miscela, se ne depongono *23,10*.

II. Esperienza.

Composizione della miscela:

Benzolo	gr.	30,167	pari a	90,50	pcto.
Fenolo	»	1,583	»	4,75	»
Benzile	»	1,583	»	4,75	»
	»	33,333		100,00	

Peso della massa cristallina separata . . . . gr. 3,157
In essa si trovò: Fenolo . . . . » 0,07490
Benzile . . . . » 0,04400

Fenolo della soluzione solida . . . . » 0,03090
» » » p. 100 cristalli » 0,9787

Cioè su 100 parti di fenolo nella soluzione se ne depongono *20,60*.

III. Esperienza.

Composizione della miscela:

Benzolo	gr.	31,45	pari a	87,66 pcto.
Fenolo	»	2,318	»	6,46 »
Benzile	»	2,113	»	5,88 »
	»	35,881		100,00

Peso della massa cristallina separata . . . . gr. 3,256
In essa si trovò: Fenolo . . . . » 0,09244
Benzile . . . . » 0,0490

A 0,0490 gr. di benzile corrispondono gr. 0,0539 di fenolo dell'acqua madre. Il fenolo della soluzione solida rimane quindi uguale a 0,03854, cioè a 1,1836 su 100 di massa cristallina.

Sopra 100 parti di fenolo se ne separano quindi *18,32*.

IV. Esperienza.

Composizione della miscela:

Benzolo	gr.	29,70	pari a	84,74 pcto.
Fenolo	»	2,676	»	7,63 »
Benzile	»	2,676	»	7,63 »
	»	35,052		100,00

Peso della massa cristallina separata . . . . gr. 3,3180
In essa si trovò: Fenolo . . . . » 0,13329
Benzile . . . . » 0,0990

Fenolo in soluzione solida . . . . . . » 0,04429
» » » su 100 di cristalli » 1,3313

Su 100 parti di fenolo della miscela se ne separano *17,44*.

V. Esperienza.

Benzolo	gr.	30,23	pari a	80,78 pcto.
Fenolo	»	3,599	»	9,61 »
Benzile	»	3,599	»	9,61 »
	»	37,428		100,00

Peso della massa cristallina separata	gr.	1,2949
In essa si trovò: Fenolo	"	0,116034
Benzile	"	0,0832
Fenolo in soluzione solida	"	0,0328
" " " su 100 di cristalli	"	1,2949

Su 100 parti di fenolo della miscela se ne separano parti *13,47.*

VI. Esperienza.

Benzolo	gr.	31,41	pari a	80,20 pcto.
Fenolo	"	3,877	"	9,90 "
Benzile	"	3,877	"	9,90 "
	"	39,164		100,00

Peso della massa cristallina separata	gr.	2,7770
In essa si trovò: Fenolo	"	0,15178
Benzile	"	0.1200
Fenolo della soluzione solida	"	0,03178
" " " in 100 di crist.	"	1,29

Su 100 parti di fenolo della miscela se ne separano *13,03.*

Da tutte le esperienze risulta provato nel modo più evidente, che il fenolo cristallizza in parte con il solvente quando se ne fa congelare la soluzione benzolica. Anzi, se si considera la speciale esattezza e facilità con la quale il fenolo ed il benzile si prestano ad essere determinati quantitativamente si può asserire, che la prova di quanto volevo dimostrare, risulta anche più sicura che non negli altri casi fin ora esaminati da me e da altri. In quasi tutte le esperienze io ho impiegato soluzioni contenenti la stessa quantità di fenolo e di benzile, e ciò per far risaltare subito, senza bisogno di calcoli, che nella massa cristallina separata trovasi sempre una quantità di fenolo superiore a quella di benzile: lo che prova indiscutibilmente che il primo si scioglie nel benzolo solido.

La differenza fra la quantità di benzile e quella di fenolo è sempre molto rilevante, e tale che non si può assolutamente attribuire ad errori di determinazione o a perdite accidentali dell' una o dell' altra sostanza.

Nel rappresentare i risultati io ho adottato lo stesso metodo seguito per le soluzioni benzoiche di acido salicilico. Siccome io ho sempre separato una quantità di cristalli piccola rispetto al totale della miscela, e sempre in proporzione di questa, così non feci altro che sottrarre dalla quantità totale di fenolo quella di benzile, ritenendo la differenza uguale al fenolo in soluzione solida. Non tengo conto cioè del piccolo aumento in benzile che subisce l'acqua madre per effetto della separazione della piccola quantità di puro solvente. Ciò ho fatto osservare anche altra volta. Volendo essere

più esatti si può tener conto anche di questa circostanza adottando il modo di calcolo seguito da Beckmann [1] per le soluzioni di jodo in benzolo. Con tale metodo si avrebbero risultati numericamente diversi anche perchè le concentrazioni sono riferite a 100 parti di solvente e non a 100 parti di miscela come ho fatto io.

Sia però che si eseguisca il calcolo nell'un modo o nell'altro si rileva un fatto molto interessante: ed è che la quantità di fenolo che si separa nella soluzione solida, non rimane costante, ma diminuisce regolarmente col crescere della concentrazione. Come si vede tale diminuzione è ben manifesta ed è graduale, e per accertarmene meglio ho ripetuto la quinta esperienza giungendo, come si vede dalla sesta, all'identico risultato. Il seguente quadro riassuntivo pone meglio in evidenza questo fatto:

	Benzile e Fenolo contenuti in 100 di miscela	Fenolo della soluz. solida contenuto in 100 di crist.	Parti di fenolo che si separano su 100	Temperatura approssimativa di congelam. della miscela
I.	Fenolo 2,97 Benzile 2,97	0,6886	23,10	4°,57
II.	Fenolo 4,75 Benzile 4,75	0,9787	20,60	3°,28
III.	Fenolo 6,46 Benzile 5,88	1,1836	18,32	2°,33
IV.	Fenolo 7,63 Benzile 7,63	1,3313	17,44	1°,32
V.	Fenolo 9,61 Benzile 9,61	1,2949	13,47	— 0°,18
VI.	Fenolo 9,90 Benzile 9,90	1,2900	13,00	— 0°,41

Adunque, il rapporto tra la concentrazione della soluzione solida e quella della soluzione liquida di fenolo in benzolo non è costante ed invariabile con le diverse concentrazioni delle miscele fatte congelare, ma dipende invece da queste. Facendo il calcolo secondo Beckmann per determinare questo rapporto, si ha per la prima esperienza un rapporto uguale a 0,31; per la sesta tale rapporto non è più che del 0,16. Laddove nelle tre esperienze a differente concentrazione (però non molto diversa) eseguite da Beckmann su soluzioni di jodo in benzolo il rapporto rimane presso a poco costante e uguale in media a 0,357. Per altri casi invece studiati da Küster [2] (equilibrio di un sistema di acqua, etere e caucciù, di naftalina acqua e β-naftolo ecc...) non si trovò un rapporto costante, ma un rapporto crescente rapidamente col crescere delle concentrazioni.

Nel caso da me studiato adunque tale rapporto non è costante. Ciò

[1] Zeitschrift XVII, pag. 123.
[2] Zeitschrift XIII, 452; Id. XVI, 156 e XVII, 357.

indicherebbe secondo van 't Hoff (1) che il fenolo non possiede lo stesso peso molecolare nella soluzione liquida come in quella solida: lo che potrebbe anche essere attesa la tendenza che ha il fenolo a formare molecole doppie già nel solvente liquido. Ma se ciò fosse il rapporto tra la concentrazione della soluzione solida e quello della soluzione liquida dovrebbe crescere con l'aumentare della concentrazione di quest ultima, come avviene appunto nei mentovati casi studiato da Küster.

Sembrami invece, che per le soluzioni benzoliche di fenolo si debba porre mente ad un' altra circostanza. In tutte le esperienze da me eseguite la temperatura alla quale avviene il congelamento della soluzione e quindi la ripartizione del fenolo tra il solvente solido e quello liquido non è la stessa, ma va diminuendo dalla soluzione meno concentrata a quello che lo è di più. Ora si sa, che il coefficiente di ripartizione di una sostanza fra due solventi deve essere costante ed indipendente dalle concentrazioni, quando la sostanza nelle due soluzioni ha la stessa grandezza molecolare (2); ma ciò è vero ad una data temperatura. Che la temperatura possa in certi casi influire notevolmente sul coefficiente di ripartizione è provato anche sperimentalmente dalle citate ricerche di Küster sull' acqua, l' etere e il caucciù.

Io credo quindi che dalle soluzioni più concentrate si deponga col benzolo solido sempre meno fenolo, precisamente pel fatto, che tali soluzioni congelano a temperatura più bassa. Devesi notare, che la differenza di temperatura non è tanto piccola dall' una all' altra esperienza, come si vede dal precedente quadro nel quale ho dato pure le temperature approssimative di congelamento delle miscele, calcolate in base alla conoscenza dei coefficienti di abbassamento.

Nell' intendimento di provare la mia asserzione ho fatto ancora una esperienza. Ho sottoposto alla separazione dei cristalli una soluzione contenente il 3 pcto. circa di fenolo, come quella della I^a esperienza, ma in essa ho aggiunto l' 11 pcto. circa di benzile a fine di abbassare la temperatura di congelamento e portarla presso a poco verso i 2°. L' analisi dei cristalli mi diede i seguenti risultati:

VII. Esperienza.

Composizione della miscela:

Benzolo	gr. 33,87	pari a	85,89	pcto.
Fenolo	» 1,167	»	2,96	»
Benzile	» 4,40	»	11,15	»
	39,437		100,00	

(1) Zeitschrift V, 338.
(2) » VIII, pag. 110.

Massa cristallina separata . . . . gr. 4,765
In essa trovai: Fenolo . . . . » 0,070423
Benzile . . . . » 0,1738

A gr. 0,1738 di benzile corrispondono gr. 0, 0461 di fenolo dell'acqua madre.

Il fenolo della soluzione è uguale a gr. 0,024323, cioè a 0,5104 per 100 di massa cristallina. Adunque su 100 parti di fenolo in soluzione se ne depongono *17,58*.

Come si vede io ho trovato quanto mi aspettavo: cioè la quantità di fenolo che si depone, invece di essere uguale al 23 pcto., come nel caso della I^a^ esperienza, sta fra le quantità trovate con le esperienze III e IV, nelle quali avviene il congelamento in condizioni poco diverse di temperatura.

Riconosco che una sola di queste esperienze non può bastare come prova della spiegazione ch' io credo di poter dare al fenomeno osservato, e per escludere qualsiasi altra. Anzi sarà necessario in seguito ritornare su tale argomento, e mi riservo di portare il contributo di nuove esperienze.

Fin d' ora però è da prevedersi, che l' influenza della temperatura sul coefficiente di ripartizione di una sostanza fra un solvente solido e quello liquido, non si farà sempre sentire ugualmente ed in modo così evidente in tutti i casi, ma dipenderà dalle sostanze considerate.

I risultati di queste mie esperienze acquistano un certo interesse perchè il fatto che dalle medesime risulta si accorda con un numero abbastanza notevole di osservazioni crioscopiche fatte in questo campo. Di fatto nello studio del congelamento di tali caratteristiche soluzioni anormali ben di rado ho notato quella costanza nell' anomalia che la teoria di van' t Hoff farebbe prevedere, e che si constata per es. nella soluzione benzolica di tiofene, ed in poche altre. Assai spesso invece io ho notato, che aumentando la concentrazione diminuisce il peso molecolare, talchè questo va avvicinandosi a quello normale, fino ad un certo grado della concentrazione [1]. Questo comportamento è spiccatissimo e ben manifesto per le soluzioni di *indolo*, di *scatolo*, di *indene*, di *α-naftolo*, del *cumarone* in naftalina, del *tetraidrodifenile* nel difenile e per altre ancora.

Tale fatto con la teoria di van' t Hoff non si può spiegare se non ammettendo che dalle soluzioni più concentrate si separi col solvente minor quantità di sostanza sciolta. Come ciò potesse avvenire non si comprendeva facil-

[1] Pel fenolo sciolto in benzolo tale fatto non si può verificare in modo evidente, perchè a determinarne il comportamento crioscopico anormale influisce anche la funzione chimica di esso, che tende ad accrescerne per altra ragione il peso molecolare. Tuttavia, secondo accurate determinazioni di Auwers, parrebbe che anche pel fenolo, almeno a contrazione molto bassa, si abbia l'accenno ad un analogo comportamento. Questo autore di fatto ha trovato (Zeitschrift XII, 696) pel fenolo in benzolo alla concentrazione del 0,30 % il peso molecolare 145, mentre a 0,51 %, trovò 143.

mente; ed il comportamento delle summentovate soluzioni anomale costituiva una difficoltà che la sola teoria di van' t Hoff a prima vista non riusciva a sormontare: e ciò feci rilevare già altra volta [1]. Laddove se la mia supposizione può venire confermata, tale difficoltà scompare, ed il comportamento crioscopico speciale delle citate soluzioni riceve una spiegazione piana e soddisfacente.

Mineralogia. — *Metodo per determinare l'indice di rifrazione della luce di un minerale nelle lamine sottili.* Nota di C. Viola, presentata dal Socio Strüver.

Il metodo che qui presento al giudizio del lettore, si basa sulla maniera di illuminazione proposta ed impiegata da Fr. Becke per distinguere un minerale più rifrangente da un minerale meno rifrangente, a contatto fra loro e trovantesi in una lamina sottile [2].

Avendo a disposizione un diaframma-iride centrale situato sotto o sopra il Nicol polarizzatore di un microscopio, per mezzo del quale è possibile di regolare a piacere l'entrata della luce, che deve attraversare la lamina sottile, si osserva una striscia chiara dalla parte del minerale più rifrangente, alzando di poco l'obbiettivo, ed una striscia scura dalla parte del minerale meno rifrangente. A causa di ciò quello apparisce in rilievo sopra questo. Il fenomeno è più distinto se in luogo del diaframma centrale, si impiega illuminazione laterale od obbliqua, come Becke stesso consigliò.

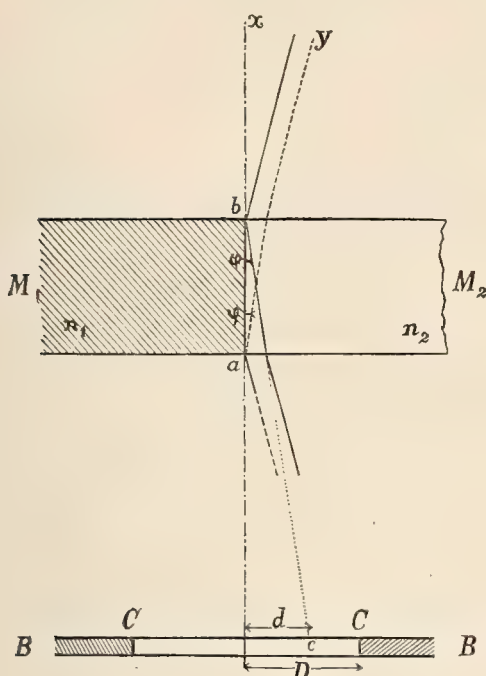
Ma è da notarsi che il rilievo non apparisce, o non apparisce distinto, se il campo è troppo illuminato; anzi ognuno avrà osservato che il detto rilievo, o la striscia chiara sarà discernibile tanto più facilmente per una data illuminazione, quanto più è grande la differenza degli indici di rifrazione dei due minerali contigui. Se ad esempio, per una data illuminazione, si vede distinta la striscia chiara al contatto dell'anortite colla leucite, non la si vede al contatto della leucite coll'ortoclasia. Io mi servo del grado di illuminazione, che è appena necessario a discernere la striscia chiara al contatto di due minerali, e che chiamo *limite di illuminazione*, per determinare la differenza degli indici di rifrazione di quelli.

[1] Gazzetta chimica, 1894, II, 273.

[2] Fr. Becke, *Ueber die Bestimmbarkeit der Gesteinsgemengtheile auf Grund ihres Lichtbrechungsvermögens.* Abh. d. k. k. Akad. der Wiss. Wien 1893.

A. Michel-Lévy, *Étude sur la détermination des feldspaths.* Paris 1894, pag. 58 e seg.

C. Viola, *Ueber eine neue Methode zur Bestimmung des Lichtbrechungsvermögens der Minerale in den Dünnschliffen.* Tschermak's Miner. Mitth. etc. 1895, p. 554.

Una breve considerazione ed un disegno renderanno chiara la cosa.

M_1 ed M_2 rappresentano in sezione trasversale due minerali in una lamina sottile, il contatto dei quali è ab, ed i cui poteri rifrangenti sono n_1 ed n_2, essendo $n_1 < n_2$. La luce polarizzata viene dall'apertura $CC = 2D$ del diaframma-iride BB.

La quantità di luce che sarà totalmente riflessa dal piano di contatto ab, sarà quella compresa nell'angolo xay, essendo $\cos\varphi = \frac{n_1}{n_2}$. Essa determina la striscia chiara nel minerale più rifrangente M_2 (alzando l'obbiettivo), e per la sua mancanza nella parte opposta, la striscia oscura nel minerale meno rifrangente M_1. I raggi contenuti nel fascio xay non pervengono naturalmente da tutta l'iride, ma da una sola parte di essa, vale a dire da un'apertura, il cui raggio è d, qualora d si determina prolungando il raggio luminoso passante per b, e facente con ab l'angolo φ. Dunque solo la luce proveniente da un'apertura d dell'iride è la quantità luminosa, che viene in aggiunta per generare la striscia chiara nel minerale più rifrangente. Chiamo con I_1 l'intensità di questa luce, la quale sarà proporzionale a d^2. Sia I l'intensità di tutto il campo, la quale sarà pure proporzionale prossimamente a D^2. Il rapporto fra l'intensità I_1 e l'intensità I, cioè

$$\frac{I_1}{I} = \frac{d^2}{D^2} \tag{1}$$

avrà un determinato valore, e non dovrà mai scendere sotto un dato limite, se si voglia che l'occhio sia capace di distinguere la luce I_1 collocata sulla luce I. Chiamo con i questo rapporto, che non è noto, nè fa d'uopo che esso lo sia. Il raggio d sarà proporzionale a $\operatorname{sen}\varphi$, avremo intanto

$$d^2 = k\,\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2} = k\,\frac{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1)}{n_2^2}.$$

Notiamo che qui si potrà porre $2n_2$ in luogo di $n_2 + n_1$, e che allora il rapporto

$$d^2 = 2k\,\frac{n_2 - n_1}{n_2}$$

sarà proporzionale a $n_2 - n_1$, quando si voglia paragonare minerali meno ri-

frangenti a un minerale più rifrangente. Se all'incontro si hanno da paragonare minerali più rifrangenti ad uno meno rifrangente, il raggio d si metterà sotto la forma

$$d^2 = 2k \frac{n_2 - n_1}{n_1},$$

ed anche in questo caso sarà d^2 proporzionale a $n_2 - n_1$.

Queste brevi considerazioni tendono semplicemente a dimostrare che è sempre lecito di scrivere

$$d^2 = k\,(n_2 - n_1),$$

e di ritenere k come costante in tutti i casi, e dentro i limiti, che si possono avvicinare, quanto si vuole. Stabilito questo, la 1) diviene

$$i = \frac{k\,(n_2 - n_1)}{D^2}$$

ossia

$$(n_2 - n_1) = \lambda\, D^2$$

essendo λ una costante da determinarsi:

La differenza degli indici di rifrazione di due minerali contigui è proporzionale direttamente al quadrato dell'apertura del diaframma-iride al limite dell' illuminazione del campo.

Questa condizione dice pertanto che quando è noto l'indice di rifrazione di un minerale, è determinabile anche quello dell'altro, purchè sia nota l'apertura dell' iride al limite dell' illuminazione del campo per avere la striscia chiara discernibile.

Ed ecco ora in quale maniera si può procedere in pratica.

La prima questione è di determinare la costante λ; ciò si consegue per mezzo di minerali, il cui potere rifrangente per la luce è dato.

Supponiamo, per modo d'esempio, di avere dell'apatite, tagliata normalmente all' asse, in contatto col balsamo del Canadà. L' indice di quella è $n_2 = 1{,}638$, di questo $n_1 = 1{,}549$.

Si alza di poco l'obbiettivo, e si chiude man mano l'iride, finchè si incomincia a vedere la striscia chiara nell' apatite al contatto col balsamo. Al limite di questa illuminazione l' apertura dell' iride è $D = 15$ mm. Avremo

$$\lambda = \frac{1{,}638 - 1{,}549}{15^2} = 0{,}00039.$$

Nella stessa lamina sottile dispongo di un pirosseno a contatto col balsamo, tagliato parallelamente a (010). La direzione $\gamma\,(n_g)$ di questo fa con c un angolo di 46°. Determino dapprima γ indi $\alpha\,(n_p)$. A quest' uopo dispongo

il cristallo di pirosseno con la direzione γ parallelamente al piano di polarizzazione del Nicol inferiore. Chiudo man mano l' iride finchè ottengo la striscia chiara nel pirosseno. L'apertura dell'iride è in questo caso D = 20,5 mm. Avremo come dianzi

$$\frac{\gamma - 1{,}549}{20{,}5^2} = 0{,}00039\,,$$

e quindi $$\gamma = 1{,}549 + 0{,}164 = 1{,}713.$$

Si gira la preparazione di 90°, e si determina l' apertura dell' iride, che in questo caso è D = 19 mm. Con ciò si ha

$$\frac{\alpha - 1{,}549}{19^2} = 0{,}00039\,,$$

da cui $$\alpha = 1{,}549 + 0{,}141 = 1{,}690\,.$$

Se l' indice di rifrazione per la luce del balsamo del Canadà non è noto, in tale caso si determina la costante λ necessaria, per mezzo di una lamina sottile, che può servire costantemente di norma, nella quale sia preparato il contatto di due minerali perfettamente noti.

Con questo metodo ho determinato gli indici di rifrazione delle diverse zone colorate, che costituiscono i pirosseni delle leucotefriti di *Ticchiena* (prov. di Roma). Le zone gialle, verde-gialle, e verde-prato sono denominate con I, II e III. L' angolo degli assi ottici è stato calcolato:

	α	β	γ	$\gamma:c$	2 V (1)
I	1,675	1,681	1,704	40°	59°,2′
II	1,678	1,685	1,707	47	59, 48
III	1,680	1,687	1,709	56	60, 15

Questi risultati coincidono bene con quelli determinati con un altro metodo.

Se l' occhio è sufficientemente esercitato nell' osservazione, questo metodo può assicurare la terza decimale nell' indice di rifrazione, ma si deve far uso possibilmente di più sezioni o di sezioni grandi, e calcolare la media delle osservazioni. Esso è tuttavia semplice e speditivo, ed ha la preferenza su

(1) Il calcolo dell' angolo degli assi ottici si fa comodamente con la formola logaritmica di G. Bartalini:

$$\cos\varphi = \frac{\beta}{\gamma}\,,\quad \cos\varphi_1 = \frac{\alpha}{\gamma}\,,\quad \cos V = \frac{\tan\varphi}{\tan\varphi_1}\,.$$

Vedi: *Società toscana di scienze naturali*, 1887, pag. 179; *Zeitschrift f. Krystall. etc. XIV* (1888), pag. 525; *Tschermak's mineralogische u. petr. Mittheil. XV* (1895), pag. 45.

molti, perchè non si richiede la conoscenza della grossezza della lamina. Io sono giunto a farne pratica per determinare le esilissime inclusioni di apatite e pirosseno nei cristalli di leucite delle lave *degli Ernici*. A causa della sottigliezza di tali inclusioni, la tinta di polarizzazione di queste non va più in su del grigio scuro, ed altre volte non si rende nemmeno visibile, ed allora questo è l'unico mezzo, a cui si deve ricorrere per la diagnosi di tali inclusioni.

Nello stesso modo come si riesce di determinare la differenza degli indici di rifrazione di due minerali contigui aprendo o chiudendo convenientemente l'iride, si può ottenere lo stesso scopo, lasciando invariata l'apertura dell'iride e adottando luce più o meno obbliqua secondo la differenza degli indici di rifrazione.

Paleontologia. — *Sul recente rinvenimento di fossili nel calcare a Bellerophon della Carnia.* Nota del dott. A. Tommasi, presentata dal Socio Taramelli.

Sono lieto di poter ora far seguire qualche notizia più dettagliata all'annuncio del rinvenimento di fossili determinabili nel calcare a *Bellerophon* carnico, dato dal prof. Torquato Taramelli con due Note, l'una [1] del settembre dello scorso anno all'adunanza estiva della Società Geologica italiana, e l'altra [2] del 17 novembre alla R. Accademia dei Lincei.

Ma, prima di entrare in materia, credo non inopportuno di riassumere le varie vedute, ch'ebbero in questo ultimo ventennio i geologi, sul riferimento cronologico del così detto *calcare a Bellerophon*.

Richthofen, considerando la indisturbata successione degli strati, che dalle colate porfiriche permiane si seguono fino agli orizzonti triasici tipici, lo giudicò triasico e lo comprese nello stesso gruppo cogli strati calcarei di Seiss. L'opinione di Richthofen fu abbracciata anche da Mojsivovics ed Hörnes, che, or son quasi vent'anni, studiarono il distretto compreso tra la Val di Gröden e quella di Sexten.

Invece lo Stache [3] dapprima considerò quel calcare come un membro di transizione tra il dias ed il trias, tra la massa principale cioè dell'arenaria rossa (Grödnersandstein) e l'orizzonte di Seiss ad *Avicula Clarai*; ma poi volle in esso vedere un membro del permiano superiore che rappresenta

[1] Bollettino della Società geologica italiana, vol. XIV, 1895.

[2] T. Taramelli, *Osservazioni stratigrafiche sui terreni paleozoici nel versante italiano delle Alpi carniche.* Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. IV, 2° sem., serie 5ª, fasc. IX, 1895.

[3] Dott. Guido Stache, *Beiträge zur Fauna der Bellerophonkalke Süd-Tirols.* Jahrbuch der k. k. geol. Reichsanst., XXVII Bd., 1877, Wien.

una facies alpina, sviluppata con tipo a prevalenza paleozoico, della fauna extraalpina dello Zechstein. A tale veduta di Stache non aderì subito il Gümbel [1], secondo il quale nella fauna del calcare a Bellerophon non si dovevano vedere che i resti di una più antica fauna paleozoica continuatasi fino all'epoca triasica; ma più tardi si accostò alle idee di Stache, acconsentendo a considerare l'*arenaria ad Ullmannia* e gli strati a Bellerophon come facies alpina del dyas superiore, quando riuscisse di provare la piena identità di forme tipiche del calcare a Bellerophon con specie caratteristiche dello Zechstein. Che se Stache fondava il suo riferimento sulla affinità della parte maggiore e più importante della fauna di quel calcare con tipi paleozoici, massime carboniferi, anzichè con tipi triasici, Gümbel a sua volta non poteva passar sotto silenzio che i foraminiferi del Bellerophonkalk somigliano assai a quelli del Muschelkalk e gli Ostracodi dello stesso calcare si legano piuttosto con forme del Lias e nulla affatto con quelle del Dyas.

Ad ogni modo tra le due opinioni ebbe la prevalenza quella dello Stache, poichè la abbracciò anche il Mojsivovics [2], che, rinunciando all'idea della triasicità del Bellerophonkalk, dapprima manifestata, si pronunciò per la permicità di questo piano indottovi dal carattere nettamente paleozoico della sua fauna. Il Mojsivovics vede in esso rappresentato lo Zechstein ma con una fauna locale fortemente individualizzata. Però, tenendo conto della mancanza di specie comuni ai due depositi, nega la contemporaneità della fauna dello Zechstein e di quella del Bellerophonkalk e, se c'è differenza d'età, ritiene quella più antica di questa in considerazione degli stretti legami che la rannodano colle faune permo-carbonifere.

Ed anche il prof. Taramelli [3], che nel 1877 aveva assegnata al trias la formazione gessifera comprendente, insieme col calcare nero a *Bellerophon*, le dolomie cariate e le marne cineree, nei suoi lavori susseguenti sulla geologia del Friuli [4] delle Provincie Venete [5] e del Bellunese [6] riferì la zona del Bellerophonkalk al permiano, pur riconoscendo lo stretto legame stratigrafico, che passa tra essa ed i sedimenti del trias inferiore nelle aree da lui studiate.

Nè lo Stache [7] nel frattempo cambiò modo di vedere, poichè nel 1884

(1) C. W. Gümbel, *Die geognostische Durchforschung Bayerns.* München, 1877 im Verlage der K. B. Akademie.

(2) E. Mojsivovics, *Die Dolomit-Riffe von Süd-Tirol und Venetien,* Wien, 1879.

(3) T. Taramelli, *Catalogo ragionato delle roccie del Friuli.* Roma, 1877.

(4) Id., *Spiegazione della carta geologica del Friuli.* Pavia, 1881.

(5) Id., *Geologia delle Provincie Venete.* Memorie della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1882.

(6) Id., *Note illustrative alla carta geologica della provincia di Belluno.* Pavia, 1883.

(7) G. Stache, *Ueber die Silurbildungen der Ostalpen mit Bemerkungen über die Devon, Carbon, und Perm-Schichten dieses Gebietes* (Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. Jahrg., 1884).

ebbe anzi a riaffermare la spettanza del Bellerophonkalk al permiano ed a riferirlo al gruppo dello Zechstein.

Un ritorno alla prima idea dello Stache, pel quale il calcare a *Bellerophon* appariva come un membro di transizione tra il Dyas ed il Trias, l'ha fatto l'anno scorso il dott. W. Salomon ([1]), che vede in quel calcare « *una formazione di passaggio* fra il permiano ed il Trias, comprendente per certo una parte, e cioè l'inferiore, dell'*Hauptbuntsandstein* tedesco ed un'altra dello *Zechstein* o permiano superiore dell'Europa centrale ».

Nella dibattuta quistione prese finalmente per ultimo la parola il dott. G. Geyer ([2]) dell'Istituto geologico di Vienna, che nello scorso autunno studiò con molto amore gli equivalenti marini della formazione permiana nella plaga posta tra la valle di Gail e la Val Canale. Egli riferì il calcare a *Bellerophon* al permiano superiore, considerò le arenarie rosse ed i conglomerati rossi, che richiamano la facies delle arenarie di Gröden, come probabili rappresentanti del permiano medio, e pose nel permiano inferiore i calcari a Fusulina del Trogkofel giacenti sul carbonifero superiore ed i calcari chiari del Rosskofel e di Malborghetto, che sarebbero da parallelizzare con quelli.

Dopo questa digressione, per così dire storica, tornando allo scopo precipuo della mia Nota, mi piace anzitutto ed in omaggio alla verità ricordare come dell'esistenza di fossili negli strati del calcare a *Bellerophon* fosse già persuaso il prof. Taramelli, a cui, omai da più che tre lustri, occorse di trovare presso a Comeglians nella *dolomia cariata gessifera* dei nuclei di bivalvi indeterminabili, e nella discesa dai monti di Suttrio e presso Dierico di Paularo entro al *calcare marnoso bituminoso* alcune sezioni di conchiglie.

A me nello scorso agosto e durante le varie gite compiute nell'alta Carnia negli anni di mia dimora ad Udine, non riuscì mai di notare alcuna traccia di reliquie organiche entro a quella dolomia, mentre fu appunto nei calcari marnosi neri bituminosi che si lasciò raccogliere il materiale, ch'ebbi di fresco a studiare.

Fu sulla strada della Val Pesarina, a metà cammino tra Entrampo e Sostasio, negli strati in posto sulla diruta parete che fiancheggia la via, il luogo dove, in compagnia degli amici prof. Luigi Brugnatelli e Gioacchino De Angelis, trovai per la prima volta i fossili del calcare a *Bellerophon*, scorti anzi dall'occhio acutissimo dell'amico mineralogo. Sono calcari un po' schistosi, grigio nerastri sulle superficie fresche di frattura, ma che sotto l'azione degli agenti atmosferici si alterano e tendono ad una colorazione dove giallastra e dove rosea. È in essi abbondantissima, anzi sarei per dire

([1]) Bollettino della Soc. geol. ital., vol. XIV, fasc. II, pag. 281, 1895.

([2]) G. Geyer, *Ueber die marinen Aequivalente der Permformation zwischen dem Gailthal und dem Canalthal in Kärnten.* (Verhandl. der k. k. Geol. Reichsanst, 1895, n. 15, Wien.

esclusiva, l'*Avicula striato-costata* Stache, e rappresentano la parte più alta del Bellerophonkalk, poichè pochi metri più su vengono ricoperti dagli strati rossi marnosi del piano di *Werfen*. Tra questi ed il calcare a *Bellerophon* esiste perfetta concordanza nella stratificazione; di più il passaggio di questo calcare alle roccie del Trias inferiore è così graduato anche litologicamente che, in presenza d'una lastra calcareo-marnosa con leggero colorito roseo, sarei stato assai incerto circa il suo riferimento, ove non m'avesse tratto d'imbarazzo un esemplare dell'*Avicula* sopra nominata, che ne era attaccata alla superficie. In questa località non riuscimmo a trovare nemmeno un solo *Bellerophon*, mentre raccogliemmo parecchi esemplari di *Najadites* sp.: inseparabili dalla roccia includente, una *Aucella Hausmanni?* alquanto dubbia e due esemplari di *Natica pusiuncula* e di *Pecten* (Entolium) *tirolensis*, Stache.

Altra località fossilifera del piano in discorso è quella a sud di Comeglians e del Rio di Villa presso le prime case di Bausc sulla parete che s'erge alla manca della via per Ovaro. Anche qui affiorano dei calcari marnosi neri volgenti al cinereo appoggianti sulle dolomie cariate gialle gessifere, nelle quali è incassato il rio suddetto. È una località piuttosto povera di fossili, poichè non vi si raccolse che l'*Avicula striato-costata* discretamente abbondante. Anche qui non si trovarono *Bellerophon*, che sembrano invece annidati nei pressi di Entrampo e di Grazzano, suburbio di Comeglians. La roccia che li alberga è un calcare nero grigiastro a grana piuttosto grossolana, duro e compatto. Sulle sue condizioni di giacitura nulla posso dire, perchè il materiale di queste due località lo debbo alla provata gentilezza dell'esimio collega prof. Alessandro Wolf, che me lo mandò il settembre scorso da Comeglians, dove villeggiava. I *Bellerophon*, che ne potei estrarre sono:

Bellerophon cadoricus, Stache?
" *fallax*, Stache
Bellerophon sextensis, Stache
" *Ulrici*, Stache

dei quali a Grazzano si rinvenne solo il *B. fallax*.

Determinai ancora di Entrampo una dubbia *Aucella Hausmanni* malissimo conservata, la *Diplopora Bellerophontis*, Rothpl: ed attendono la determinazione alcuni *Aviculo-pecten* ed una *Nucula*.

Nella Val del Degano non mi son note fino ad ora altre località fossilifere del Bellerophonkalk, nel quale ebbi l'opportunità di continuare le ricerche più a levante tra Dierico e Paularo nel Canal del Chiarsò.

Battendo l'arido greto, che biancheggia sulla manca del torrente, ci si imbatte, poco prima della salita per Dierico, nei calcari neri del Bellerophonkalk, bituminosi, assai compatti e quasi marmorei. Son disposti in istrati pressochè verticali, assai ondulati, inclinanti a nord e con direzione Est nord-est Ovest sud-ovest. Qui sono assai scarsi e mal conservati i *Bellerophon* ridotti al puro modello in parte convertito in calcite cristallina: non vi riscontrai che un *Bellerophon* molto somigliante al *B. sextensis*, Stache.

In compenso vi sono oltremodo copiose le bivalvi, in generale piccole e con ornamentazione complicatissima. Tra esse potei riconoscere le specie seguenti:

Pecten Pardulus, Stache
" (*Aviculo-pecten*) *comelicanus*, Stache
" id. *Trinkeri*, Stache
" id. *Gümbeli*, Stache.

Ma alcune altre elegantissime forme restano a determinare, che non trovai nè descritte nè figurate nella fondamentale illustrazione della fauna del Bellerophonkalk di Stache.

Trovai molto strano di non aver incontrato nel materiale riportato da questa località nessun esemplare della *Avicula striato-costata*, così abbondante nel giacimento di Val Pesarina.

Questi calcari a *Bellerophon* tagliati insieme colle altre roccie dalla corrente del Chiarsò, che vi incise il suo letto, ricompaiono anche sulla destra del torrente proprio di faccia a Dierico sulla strada postale. Qui però si presentano in istrati inclinanti a sud-ovest e diretti da est ad ovest, e distintamente incuneati tra i calcari marnosi verdognoli e le arenarie rosse dei Werfener-Schiefer a sud e la dolomia cariata, gialla, gessifera, che affiora più a nord tra la sinistra del torrente Orteglazzo ed il rio Minischite. Alla dolomia cariata sottostanno degli schisti dapprima verdognoli con mosche e venuzze di tetraedrite, poi rossastri e rosso cupi, che occupano l' area compresa tra il Rio Minischite ed il Rio Ruat, e rappresentano l'arenaria di Gröden.

Anche qui di faccia a Dierico è evidente la concordanza di stratificazione tra le roccie del Trias inferiore, che affiorano giù nel torrente al ponte del Foos, ed il calcare a *Bellerophon*. È però una località assai povera di fossili, poichè non vi si raccolsero che due mal conservati *Bellerophon* e qualche imperfetto *Aviculo-pecten*.

Confido che, continuando le ricerche, si possa trarre dai luoghi indicati, massime da Dierico e da Entrampo, un materiale assai più abbondante, che, oltre a permettere una illustrazione di quest' altra fauna carnica prima non conosciuta, venga anche ad accrescere il numero delle specie già note nelle classiche località del Tirolo meridionale ed a Lussnitz nell'alta valle del Fella.

Per ora, paragonato al ricco materiale che studiò lo Stache, è ben poca cosa questo primo tributo in petrefatti del Bellerophonkalk di Carnia, le cui specie si riducono, riassumendo, alle seguenti:

Bellerophon Ulrici, Stache
" *sextensis*, id.
" *fallax*, id.
" *cadoricus*, id.?
Natica pusiuncula, id.

Pecten (Entolium) *tirolensis*, Stache.
„ *Pardulus*, id.
„ (*Aviculo-pecten*) *comelicanus*, id.
„ (*Aviculo-pecten*) *Trinckeri*, id.
„ „ *Gümbeli*, id.
Avicula striato-costata, id.
Aucella cfr. Hausmanni, Goldf?
Nucula nov. form.
Najadites sp.
Diplopora Bellerophontis, Rothpl.

Non m' imbattei in nessun cefalopodo, nè trovai brachiopodo alcuno (1); mentre di quest' ultima classe tanta copia di forme si offersero allo Stache. E così pure non mi fu dato di scorgere nemmeno le traccie di un foraminifero nelle parecchie sezioni microscopiche preparate da varî pezzi del calcare di Entrampo e dell' affioramento di fronte a Dierico.

Nè tra le forme già note, nè tra le nuove avvene alcuna, che possa non solo essere identificata ma nemmeno ravvicinata all' una od all' altra delle specie del Trias inferiore alpino, della cui fauna ho pubblicato l' anno scorso una illustrazione, e neppure con specie del Muschelkalk o di piani triasici più recenti. Le nuove forme saranno per dare una novella conferma alla grande affinità, che fu già rilevato correre tra la fauna del calcare a *Bellerophon* e la fauna paleozoica? È quanto potranno forse dire ulteriori studî condotti su materiale nuovo e più abbondante.

Fisiologia. — *Apparecchio portatile per determinare l'acido carbonico nell'aria espirata dall'uomo.* Nota del prof. Ugolino Mosso, presentata dal Socio Angelo Mosso.

Gli apparecchi che servono per determinare l'acido carbonico nell'aria espirata dall'uomo sono complessi e delicati; quasi tutti di tal mole da riuscire difficile il loro trasporto. Nessuno di essi determina con precisione la quantità di acido carbonico eliminato in tempi successivi di breve durata. Manca perciò la curva giornaliera della eliminazione fisiologica dell'acido carbonico, e vedremo che questa curva può presentare delle variazioni maggiori della curva della temperatura del polso e del respiro.

Molti problemi del ricambio dell'organismo non ebbero ancora, per la mancanza di un apparecchio opportuno, una soluzione soddisfacente. Basta ricordare ad esempio: quanto acido carbonico venga eliminato, prima o dopo

(1) Non è da escludersi che si possan trovar brachiopodi anche nel calcare a *Bellerophon* di Carnia, dal momento che anche il sig. prof. Taramelli ne raccolse fino dal 1877 nella stessa zona del Bellunese alla sella del Monte Cestello da Padola ad Auronzo.

la somministrazione di un medicamento, prima o dopo un accesso di febbre, a stomaco vuoto o nel periodo della digestione.

Due anni fa, quando mio fratello organizzò una spedizione scientifica al Monte Rosa, ebbi l'incarico di studiare l'eliminazione dell'acido carbonico a diverse altezze.

Tra gli apparecchi che servirono alla determinazione dell'acido carbonico, è inutile ch' io ricordi quello di Lavoisier e di Séguin, di Dulong et Despretz, di Regnault et Reiset [1], e quello di Pettenkofer [2] e Voit; monumenti di precisione sperimentale coi quali la scienza si arricchì delle più importanti cognizioni sui fenomeni della respirazione, perchè si trovano in tutti i manuali di chimica fisiologica. Mi limiterò ad un breve cenno sugli apparecchi costrutti per il medesimo intento di queste mie ricerche.

E. Smith [3] si occupò lungamente dell'eliminazione dell'acido carbonico da punti di vista svariatissimi. Col suo apparecchio determinava la quantità totale di CO^2. L'aria espirata passava sopra una soluzione di potassa caustica distribuita sopra una grande superficie. L'esperienza non poteva durare a lungo.

Richet ed Hanriot [4] hanno costrutto un apparecchio col quale si valuta direttamente non più il peso, ma il volume totale dell'acido carbonico. La persona respira per mezzo di un imbuto o di una maschera di guttaperca applicati alle labbra, il naso resta chiuso con una pinza. L'aria per essere esaminata passa attraverso a tre contatori, due valvole di Müller, due bottiglie di lavaggio, una colonna alta 1,50 piena di pezzi di vetro bagnati con liscivia di potassa ed un lungo tubo con bolle di vetro bagnate di acqua di calce, e perciò la persona per respirare deve superare una forte resistenza. Essendo i contatori, i tubi e le bottiglie a grandi dimensioni l' iscrizione differenziale fra i due ultimi contatori, che danno il volume del CO^2 eliminato, subisce un notevole ritardo. Inoltre la chiusura del naso con una pinza è, come dicono gli autori, cagione di dolore da non poter durare molto nell'esperienza. Per queste ragioni l'apparecchio di Richet e di Hanriot, sebbene abbia il vantaggio di dare delle misure continue, non poteva servire al mio scopo.

L'apparecchio del Marcet [5] consta di una campana, della capacità di 40 litri di aria, sospesa sopra un bagno di acqua salata e controbilanciata con un peso attaccato ad una ruota eccentrica. L'apparecchio è così sensibile, che l'aria espirata dentro la campana si trova sempre alla pressione atmosferica. La persona inspira col naso ed espira colla bocca, per mezzo di un tubo

(1) Regnault et Reiset, Annales de Chimie et de Physique, 1849, Tome XXVI, pag. 299.

(2) Pettenkofer, Annalen der Chemie, 1862.

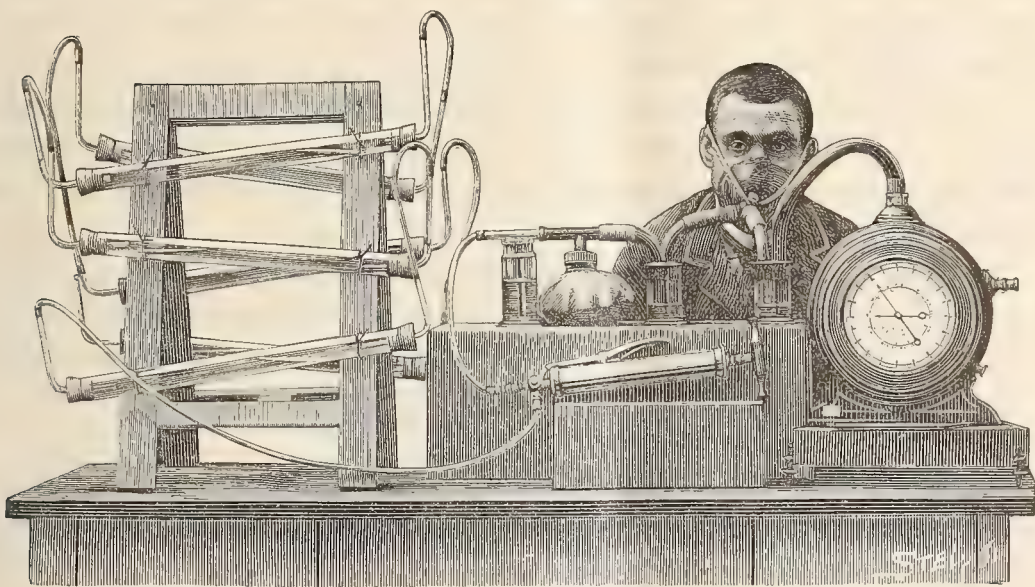
(3) E. Smith, The Philosophical Transactions, 1859.

(4) Hanriot et Richet, Annales de Chimie et de Physique, 1891, pag. 495.

(5) Marcet, Proceedings of the Royal Society of London, 1889, pag. 340.

in comunicazione a vicenda colla campana e coll'esterno, ed a sua insaputa, l'aria espirata viene diretta dentro la campana. Di quest' aria ne viene tolta un cilindro di 1000 c.c. e quindi esaminata coi soliti metodi. È un apparecchio abbastanza semplice ed esatto, il primo che sia stato portato sulle montagne; ma con esso si può solo esaminare un volume totale di 40 litri d'aria, cioè quanto ne respira un uomo adulto in meno di cinque minuti. Più di cinque minuti un' esperienza non può durare, e non è possibile farne un' altra subito dopo. Inoltre manca il controllo che tutto l'acido carbonico sia entrato in combinazione colla barite. Questo stesso difetto ha l'apparecchio di Richet et Hanriot e quello di Smith.

L'apparecchio, che ha servito per le esperienze che ho fatto sul Monte Rosa, venne ideato dal prof. A. Mosso; esso non ha gli inconvenienti degli altri, li supera in semplicità e leggerezza, ed ha la disposizione indicata dalla seguente figura.

Apparecchio portatile per determinare l'acido carbonico nell'aria espirata dall'uomo.

Il metodo consiste nel misurare per mezzo di un contatore la quantità d' aria inspirata, di prendere per mezzo di uno schizzetto una frazione bene determinata di aria espirata (circa un trentesimo), e di esaminarla coi liquidi titolati.

L' apparecchio si compone di una maschera di guttaperca, che applicata alla faccia con mastice da vetrai non disturba i movimenti respiratorî, e chiude ermeticamente anche nelle respirazioni forzate. La maschera porta in corrispondenza delle narici una cupola sulla quale sta un tubo. Questo comunica con due valvole di Müller. L'aria inspirata attraversa un contatore

Riedinger ed una valvola di Müller: l'aria espirata passa per la seconda valvola, per una vescica di gomma, ed esce da una valvola ad acqua fatta con un tubo a T. Uno schizzatoio in comunicazione colla valvola a T, pompa una data quantità di aria espirata, e la spinge attraverso 6 tubi contenenti fra tutti un litro circa di acqua di barite. I tubi sono di vetro del diametro di 3 cm., della lunghezza di 50 cm., e sono messi in comunicazione fra di loro con tubi di gomma.

L'uso dell'apparecchio è facile, occorrono però le seguenti precauzioni. Verificare il contatore che si adopera; questo si fa colle norme solite che non sto a ripetere. Una precauzione importante è quella di mettere il contatore sempre nel piano orizzontale. A tale scopo mi serviva di una tavoletta di legno con tre viti. Anche in montagna ho portato con me la tavoletta e, per mezzo di un livello a bolla d'aria, mi assicuravo che fosse bene orizzontale prima di mettere l'acqua nel contatore.

I contatori costruiti dalla casa Riedinger di Amburgo sono molto esatti, e funzionano colla pressione di 1 cm. di acqua. Le divisioni centesimali del quadrante sono segnate da due lancette; una corta per le centinaia, ed una lunga per le unità. Ciascuna unità del mio contatore, parecchie volte verificato, corrisponde a 24,4 c.c. di aria: in un giro del contatore passano perciò litri 2,440 di aria.

Come sia fatta la maschera di guttaperca si vede dall'annessa figura: perchè aderisca bene alla faccia, basta applicare al margine un bordo di mastice da vetrai rammollito con olio o vaselina e poi legarla al capo con una fascia od un tubo di gomma.

Un' altra precauzione è quella di riempire bene lo schizzatojo e di spingere l'aria nei tubi così lentamente che riesca suddivisa in piccole bolle. Operando in questo modo si ottiene che l'acido carbonico sia trattenuto nei primi tubi e non intorbidi i due ultimi: si ha così la certezza che tutto l'acido carbonico è entrato in combinazione.

Perchè il respiro incontri la minima resistenza, occorre che la colonna d'acqua nelle valvole sia poco elevata; resterà così più piccolo lo sforzo della respirazione. In tutto l'apparecchio la pressione da superare è un centimetro e mezzo di acqua.

Per comprendere il modo di funzionare, bastano le seguenti spiegazioni: La vescica, che funziona da serbatoio dell'aria, è di gomma elastica sottile, della capacità di mezzo litro; si distende e si rilascia ad ogni atto respiratorio, mentre l'aria vi si rinnova continuamente. Cessata l'espirazione, l'elasticità della vescica caccia il di più dell'aria che l'aveva distesa. Lo schizzatoio è di metallo, della capacità di 260 c.c.; ha uno stantuffo a perfetta tenuta, e porta all'estremità inferiore una chiavetta, la quale permette di aspirare l'aria dalla vescica e di dirigerla nei tubi a barite col movimento di una leva laterale come si vede nella figura.

Quest' apparecchio ha su quelli adoperati dagli altri, il vantaggio di analizzare direttamente l'aria nell' istante in cui viene espirata. Esso offre la possibilità di fare parecchie osservazioni di seguito senza il bisogno di interrompere l'esperienza; basta infatti avere due serie di tubi, e si fanno quante osservazioni si vogliono. Con esso le persone si mantengono nelle loro abituali condizioni per la funzione del respiro; l' inspirazione e l'espirazione si compiono sotto una pressione minima. Inoltre è di facile e pronto impianto, poichè in mezz' ora si mette tutto in opera e si incomincia l'esperienza. Bastarono due uomini per portare l'apparecchio e l'occorrente per la titolazione dei liquidi sul Monte Rosa sino alla capanna Regina Margherita a 4560 metri.

Un altro vantaggio di questo apparecchio è che si può fare da solo le esperienze senza il concorso di alcun aiuto. Così ho potuto determinare l'acido carbonico che io eliminava stando chiuso in una camera pneumatica, dove la rarefazione dell'aria era portata ad un terzo di atmosfera.

Per verificare il grado di esattezza dell'apparecchio, ho preparato dell'acido carbonico puro, ricavandolo dall'azione dell'acido cloridrico su pezzi di marmo bianco. Mi sono assicurato della purezza del gas preparato: una parte di esso veniva tutto assorbito dalla soluzione satura di idrato di bario contenuta in una campanella capovolta. Ho preso successivamente dal gazometro due schizzatoi di gas: ricondotta a zero la pressione dentro lo schizzatoio, col lasciare sfuggire il di più del gas, ho spinto lentamente l'acido carbonico nei tubi ad acqua di barite. L'acqua di barite era fatta con circa 10 grammi di idrato di bario sciolti in 1200 d'acqua, e per titolarla mi servii di una soluzione di acido ossalico puro al 2,8636 per 1000 c.c. di acqua: ogni centimetro cubico di questa soluzione corrisponde a grammi 0,001 di acido carbonico, perchè il rapporto fra il peso molecolare dell'acido ossalico 126, e quello dell'acido carbonico 44, è appunto 2,8636.

1ª *esperienza di controllo.* 20 c.c. dell'acqua di barite contenuta nei tubi sono neutralizzati da 35,8 c c. della soluzione titolata di acido ossalico. 20 c.c. della stessa acqua di barite presi dopo il passaggio di due schizzetti di CO^2 (cioè 520 c.c.) sono neutralizzati da 23 c.c. di acido ossalico; furono cioè trattenuti 12,8 milligrammi di acido carbonico in 20 c.c. di acqua di barite. Ma l'acqua di barite totale essendo 1300 c.c. l'acido carbonico corrisponde a gr. 0,8320 secondo la seguente uguaglianza $20 : 12.8 = 1300 : x$. Siccome l'esperienza fu fatta alla pressione di 74 cm. ed alla temperatura ambiente di 23°, i 520 c.c. di CO^2 pesavano 0,8925: ne andarono perduti gr. 0,0605.

2ª *esperienza di controllo.* Ho preso lo stesso volume di acido carbonico, ed ho ricuperato gr. 0,8600: avendo fatto l'esperienza a 74 cm. di pressione e 23° di temperatura, il peso del CO^2 adoperato sarebbe stato di gr. 0,8925: ne andarono perduti gr. 0,0325 cioè il 3 per °/₀ circa. Risultato soddisfacente se si considera le molte cause di errore del metodo dei liquidi titolati.

Riferisco, come saggio, una serie di esperienze eseguite su una stessa persona durante 24 ore. In essa si può avere un' idea dei grandi cambia-

menti che avvengono nella eliminazione dell'acido carbonico per l'esercizio muscolare, per il riposo, pel vitto abbondante, e pel sonno.

Caudana Ernesto, meccanico, è un giovane di anni 18 che pesa 55 kg. Sottoponendolo per parecchi giorni a queste ricerche, ho potuto determinare, con esperienze fatte nello stato di riposo parecchie volte al giorno, che egli respira in media 214,560 litri ogni mezz'ora, e che elimina gr. 14,100 di CO^2.

Influenza del riposo.

1ª *esperienza.* Caudana dopo aver passato la notte a ballare, arriva alle ore 7 del 27 gennaio 1895 al laboratorio; temperatura ambiente 11°,7. Gli applico subito sulla faccia la maschera, ed alle 7,5 respira nell'apparecchio: l'esperienza incomincia alle ore 7,10 rimanendo seduto, 20 c.c. dell'acqua di barite sono neutralizzati da 30 c.c. della soluzione di acido ossalico. Altri 20 c.c. presi dopo il passaggio dell'aria espirata sono neutralizzati da soli 22,9 c.c. d'acqua di barite: sono perciò grammi 0,0071 di acido carbonico che entrarono in combinazione. Ma l'acqua di barite nei tubi essendo 955 c.c. l'aria esaminata 5720 c.c. ne conteneva perciò gr. 0,33902 ($20:71=955:x$). Ma l'aria totale respirata nella mezz'ora che ha durata l'esperienza essendo stata di litri 187,026, l'acido carbonico eliminato in questa mezz'ora è ($5720:0,33902=187026:x$) di gr. 11,098.

2ª *esperienza.* Appena finita la precedente esperienza, Caudana si è coricato sopra delle sedie rimanendo in comunicazione coll'apparecchio. Aspettai fino alle 8,35 che si addormentasse: in questo momento incomincia la determinazione dell'acido carbonico della seconda esperienza. Caudana passò una mezz'ora nella più perfetta tranquillità, in uno stato di dormiveglia, cogli occhi chiusi senza però addormentarsi. Durante questa mezz'ora egli respirò litri 172,656 di aria, ed eliminò gr. 10,506 di CO^2.

Esaminando i risultati di queste due esperienze, si vede che la quantità di aria respirata dopo un prolungato esercizio dei muscoli è minore della quantità media che viene respirata normalmente; così pure è dell'acido carbonico che vediamo essere molto diminuito. Questa diminuzione, tanto dell'aria totale come dell'acido carbonico, è anche più evidente nella seconda esperienza fatta dopo un'ora e mezzo di riposo.

Influenza della digestione.

3ª *esperienza.* Caudana alle ore 12,27, dello stesso giorno, dopo un pasto abbondante di farinacei respira, nell'apparecchio. Alle ore 12,37 incomincia l'esperienza; durante questa mezz'ora respirò litri 228,334 di aria, ed emise gr. 14,562 di CO^2.

4ª *esperienza.* Tre ore dopo il pasto ho fatto ancora una determinazione di CO^2, dalle ore 15,21 alle 15,51. In questa mezz'ora Caudana respirò litri 207,400 con 15,607 gr. di CO^2.

Queste due esperienze, fatte nel periodo della digestione, dimostrano che il vitto abbondante influisce sull'aria respirata e sull'acido carbonico formatosi, l'una e l'altro essendo molto aumentati; il massimo si è verificato nel periodo più avanzato della digestione, ed è pure il massimo di tutta la giornata.

Influenza del sonno.

5ª *esperienza.* Caudana ha mangiato alle ore 17,30; alle 22 si coricò presso l'apparecchio col quale fu subito messo in comunicazione. Quando giudicai che fosse addor-

mentato, perchè era cambiato il ritmo respiratorio, incominciai l'esperienza, che durò dalle ore 23,5 alle 23,35. In questa mezz'ora Caudana respirò litri 188,490, ed eliminò gr. 13,608 di CO^2.

6ª *esperienza*. Caudana continuò a dormire: io lasciai passare mezz'ora e poi feci un'altra determinazione: mentre stavo facendo questa esperienza entrò una persona nella stanza e Caudana non se ne accorse. Dalle ore 23,55 alle 0,25, respirò litri 193,248 di aria ed eliminò gr. 13,613 di CO^2, precisamente come nell'esperienza precedente.

7ª *esperienza*. Caudana dormiva ancora alle ore 0,45 quando io lo svegliai e lo feci alzare. Alle ore 0,50 incominciai l'esperienza, egli restò in piedi e sveglio durante questa mezz'ora. Respirò litri 209,987 ed eliminò gr. 13,392 di CO^2.

La respirazione e la produzione di CO^2 sono uniformi durante queste tre esperienze, ed è pure degna di nota la identità dei risultati ottenuti.

Abbiamo inoltre avuto la conferma che quest'apparecchio disturba così poco la respirazione, che fu possibile a Caudana di continuare per lungo tempo a dormire, finchè lo svegliai.

Per mostrare meglio i rapporti che passano fra i risultati di queste sette esperienze, ne raccolgo i dati sotto forma di tabella.

Esperienze fatte su E. Caudana dal mattino alle 7 fino alle ore 0,50 del 27 febbraio 1895.

N. d'ordine	Ore	Temperature ambiente	Pressione barometrica	Litri d'aria inspirata in mezz'ora	Grammi di CO^2 eliminati in mezz'ora	Grammi di CO^2 per Kgr. e per ora	Grammi di CO^2 per 1 litro d'aria	OSSERVAZIONI
1	7,10	11°,5	72,8	187,026	11,098	0,403	0,059	Dopo una notte di esercizio muscolare.
2	8,35	»	»	172,656	10,506	0,382	0.061	Dopo un'ora e mezzo di riposo.
3	12,37	12°	»	228,334	14,562	0,530	0,065	10 minuti dopo un pasto abbondante.
4	15,21	»	»	207,400	15,607	0,566	0,075	3 ore dopo il pasto.
5	23,5	13°,2	72,5	188,490	13,608	0,498	0,072	Sonno.
6	23,55		»	193,248	13,613	0,498	0,070	Sonno.
7	0,50		»	209,986	13,392	0,486	0,064	Subito dopo svegliato.

Queste esperienze preliminari dimostrano che nell'uomo la curva dell'eliminazione giornaliera del CO^2, e la quantità di aria respirata subiscono delle grandi oscillazioni. Infatti noi vediamo, che un giovane sui vent'anni dopo essersi affaticato con un prolungato esercizio muscolare, nel riposo successivo elimina la più piccola quantità di CO^2 e respira la quantità minore di aria di tutta la giornata (1ª e 2ª esp.): che il massimo dell'aria inspirata e dell'acido carbonico eliminato si ha dopo il pasto, durante la digestione (3ª e 4ª esp.). Le tre ultime esperienze fatte nella quiete assoluta dimostrano che le combustioni organiche, da cui dipende la temperatura del corpo, procedono in modo uniforme quando nessuna causa esterna venga a disturbare la quiete del riposo.

Fisiologia. — *Influenza della musica sulla termogenesi animale.* Nota del dott. U. Dutto, presentata dal Socio Luciani.

Gli effetti fisiologici che la musica produce sugli organismi animali sono ancora assai poco noti.

Dogiel (1) e Tarchanoff (2) studiarono: il primo l'influenza della musica sulla circolazione del sangue, ed il secondo l'influenza della musica sulla fatica e sullo scambio respiratorio.

Servendoci del doppio calorimetro ad irradiazione del D'Arsonval abbiamo voluto vedere se sotto l'influenza della musica avvenivano variazioni nella quantità di calore irradiato dagli animali.

Gli animali che servirono agli sperimenti furono conigli, cavie, polli, piccioni ed uccelli.

Il calorimetro era situato in una camera a piano terreno dell'Istituto di Fisiologia, luogo lontano dai rumori ed abbastanza illuminato, ma con luce diffusa.

Queste condizioni erano vantagiosissime alle misure calorimetriche e specialmente al genere di osservazioni che facevamo.

Circa due ore dopo che avevamo messo l'animale nel calorimetro, e quando questo tracciava una linea orizzontale quasi parallela all'ascissa, la qual cosa dimostrava essersi raggiunto l'equilibrio fra la produzione di calore e la irradiazione, si incominciava a suonare, per la durata di un'ora o di un'ora e mezza, con un organetto di Heller di Berna, mosso da un movimento di orologeria.

I risultati non furono uguali per tutte le specie di animali, perchè mentre nelle cavie, nei conigli e nei polli si ebbe una diminuzione nella emissione del calore, nei piccioni e negli uccelli invece si ebbe un aumento.

Il fenomeno della diminuzione del calore emesso nell'unità di tempo, durante l'eccitamento musicale, fu, specialmente per le cavie, costante, ed in certi casi molto evidente.

Dalle grafiche che annettiamo, si rileva che nei giorni 6, 8, 19 luglio le cavie emettevano in media, prima dell'eccitamento musicale, all'ora 4,62, 3,41, 2,92 Ca., e durante l'eccitamento musicale 4,17, 2,73, 2,44 Ca.

Si potrebbe ammettere che la musica agisca come un rumore qualsiasi che, spaventando la cavia, la faccia cadere in quello stato di prostrazione che Preyer chiamò cataplessia.

Questi fenomeni psichici depressivi o stati ipnotici degli animali, già noti al padre Kircher, col suo *Experimentum mirabile*, e che sono stati stu-

(1) I. Dogiel, *Ueber den Einfluss der Musik auf den Blutkreislauf.* Archiv. für Physiologie, 1880, 416.

(2) I. De Tarchanoff, *Influence de la musique sur l'homme et sur les animaux.* Atti del Congresso medico internazionale, vol. II, pag. 153, 1894.

diati da Czermak (1), Preyer (2), Heubel (3) e Danilewsky (4), determinano, qualunque sia il significato che ad essi si voglia dare, ipnotismo (Czermak) o sonno (Heubel e Danilewsky) o spavento (Preyer), delle modificazioni in alcuni fenomeni della vita vegetativa degli animali.

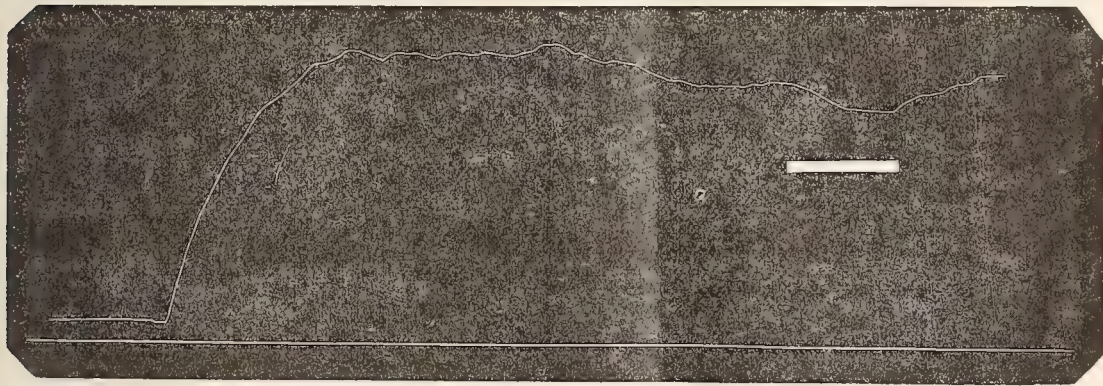
La respirazione diventa più profonda, e quasi affannosa, il che deve produrre una diminuzione di temperatura dell' animale per aumento dell' evaporazione acquosa.

Ma, dato e non concesso che la musica, prodotta improvvisamente, spaventi la cavia, e produca in essa uno stato cataplettico, noi possiamo dimostrare che altre cause, che ben più a ragione produrrebbero questo stato nella cavia, non danno origine ad alcuna variazione nella emissione del calore.

Abbiamo ottenuto dei tracciati nel modo seguente:

Circa due ore dopo di avere messo l' animale nel calorimetro, venivano sparati, nella camera di esperimento, di 5′ in 5′, dei colpi di rivoltella. Malgrado ciò le linee seguitavano il loro andamento in senso orizzontale senza abbassarsi, e nulla di anormale presentavano, all' infuori di quelle ondulazioni che si hanno anche quando l' animale è abbandonato a sè, e non soggetto ad alcun eccitamento.

Dall' osservazione dei nostri tracciati si ricava un fatto importante.

Si vede che per tutto il tempo che dura il suono si ha una diminuzione nella emissione di calore; eppoi appena cessato il suono, si ha subito un innalzamento della linea, cioè un aumento delle calorie, molte volte netto e reciso (tracciato del 6 luglio), come se in quel momento si fosse aumentata artificialmente la sorgente calorifica nell' interno del calorimetro.

6 luglio. — Cavia del peso di gr. 810. Il tratto bianco grosso indica la durata dell' eccitamento musicale. Ore 1,30′.

(1) I. Czermak, *Beobachtungen und Versuche über hypnotische Zustände bei Thieren.* Pflüger's Archiv. f. gesammte Physiologie B. VII, 1873, S. 107.

(2) Preyer, *Ueber eine Wirkung der Angst bei Thieren.* Centralblatt f. d. medic. Wissenschaften, 1873, S 177.

(3) Heubel, *Ueber die Abhängigkeit des wachen Gehirnzustandes von äusseren Erregungen.* Pflüger's Archiv. f. gesammte Physiologie. B. XIV, S. 158.

(4) Danilewsky, *Ueber die Hemmungen der Reflex-und Willkürbewegungen.* Pflüger's Archiv. f. gesammte Physiologie B. XXIV, S. 489.

Ma non è inutile fare osservare che, in questo tracciato, come in tanti altri, l'abbassamento della curva, fedele alla durata del suono, durava già più di un'ora.

La cataplessia non potrebbe spiegare questo fatto.

Lo stato catapletico non dura in molti animali che pochi minuti, come già Kircher aveva visto per la gallina; dura un po' più negli uccelli e nelle cavie, come hanno visto Czermak e Preyer, e per un'ora ed anche più nelle rane, come hanno visto Heubel e Danilewsky.

È molto probabile che le nostre cavie, passati i primi momenti di stupore, e visto che a loro *non succedeva di peggio*, come dice Preyer, si sarebbero rimesse dallo spavento, e le loro funzioni avrebbero seguitato nel modo regolare di prima.

L'espressione grafica di questo fatto sarebbe stata, per il calorimetro, lieve; si sarebbe notato soltanto un piccolo dente nel tracciato, ma seguito tosto dalla linea orizzontale del regime termico normale.

Anche nel caso dei conigli, e dei galli provveduti di cresta e di bargigli, cioè di quei tessuti erettili che colla massima facilità si riempiono e si svuotano di sangue, noi vediamo nei loro tracciati un fatto degno di nota.

Nessun animale è più sensibile alle impressioni esterne del coniglio, il quale per un nonnulla si spaventa. Esso reagisce col suo apparecchio vasomotorio che è di una mobilità straordinaria.

Il Mosso ha molto accuratamente studiato questi fatti, ed ha visto che un lieve rumore, un raggio di luce, tutto è sufficiente per fare impallidire o rendere turgido di sangue l'orecchio del coniglio.

Ma questi stati di replezione e di svuotamento non durano che poco tempo, e si succedono repentinamente l'uno all'altro.

In questo modo noi spieghiamo quelle ondulazioni che sono caratteristiche delle grafiche calorimetriche dei conigli.

Poichè è evidente che quando il sangue irrora in quantità maggiore le parti superficiali del corpo, la dispersione del calore dalla superficie deve essere maggiore.

Non diversamente deve succedere per i galli provveduti di tessuti erettili; ed infatti noi abbiamo avuto la prova di ciò, confrontando i tracciati dei galli con quelli delle galline.

Le piccole galline, quasi completamente sprovviste di cresta e di bargigli, danno un tracciato più regolare che rassomiglia a quello delle cavie.

Da questi tracciati quindi noi riceviamo la conferma che i fenomeni vasomotori, che danno luogo a quei riempimenti e svuotamenti di sangue nelle parti superficiali del corpo, sono di corta durata; ed anche ammettendo che avvenisse, per effetto della musica, una costrizione dei vasi superficiali, non potremmo, per la lunga durata del fenomeno, spiegarlo come conseguenza di un comune fenomeno vasomotorio.

Ma nelle nostre grafiche si osserva anche un altro fatto degno di nota.

I tracciati che prima erano ondulati, durante tutto il tempo in cui si suona, diventano una linea quasi regolare, con poche o nessuna di quelle caratteristiche ondulazioni, per ridiventare ondulati dopo l' eccitamento musicale.

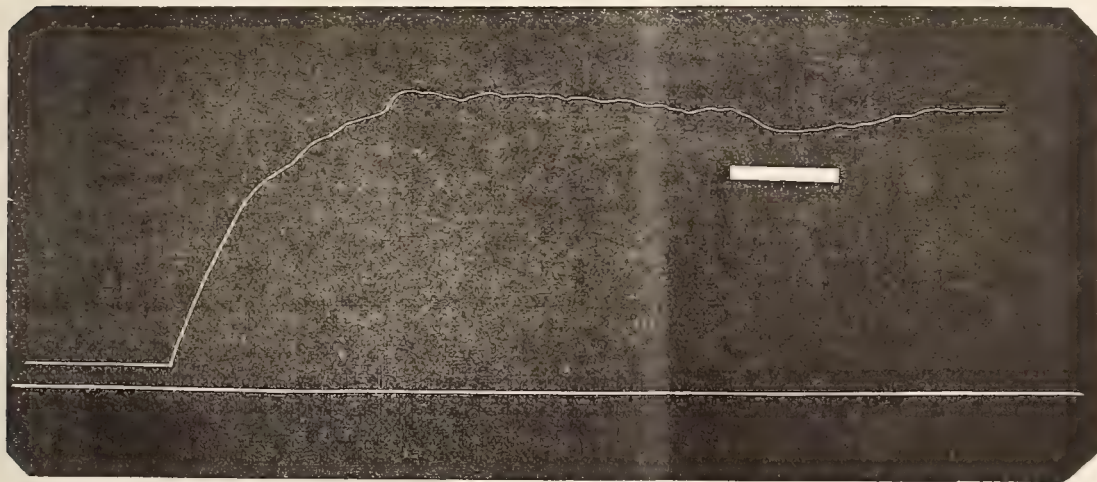
Questo fatto, che fisicamente si deve interpretare come effetto di una emissione regolare del calore, fa pensare che durante quel tempo l' animale si trovi in una condizione psichica speciale, per la quale, quelle azioni riflesse che determinano un abbondante e momentaneo trasporto di sangue, per vaso-dilatazione, nelle parti superficiali e periferiche del corpo, siano inibite.

Questa condizione psichica speciale, capace di rendere regolari le grafiche calorimetriche, può essere l' attenzione.

Ma se si ammette che un atto psichico, il quale duri lungo tempo, sia capace di regolare il fenomeno della emissione del calore, esso potrebbe pure, determinando una costrizione durevole dei vasi superficiali, spiegare il fenomeno della diminuzione di calore irradiato.

È un fatto trovato sperimentalmente da Mosso [1], che durante l' attività cerebrale e l' attenzione, si produce una contrazione dei vasi sanguigni alla periferia del corpo.

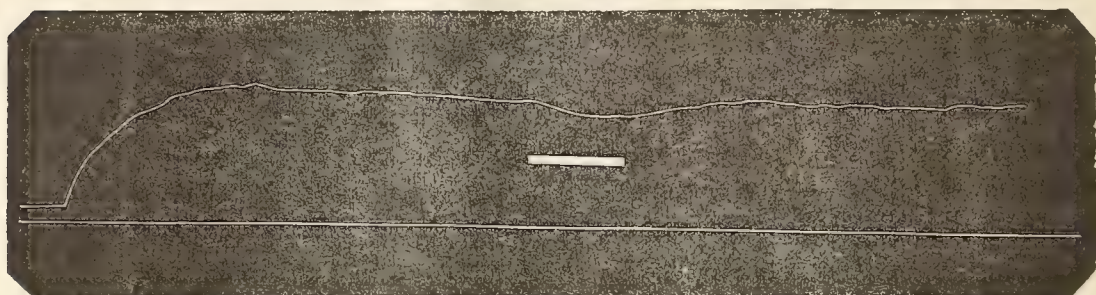
Il fenomeno da noi osservato è un fenomeno di lunghissima durata.

Nel tracciato del 19 luglio p. e. noi abbiamo seguito il fenomeno per più di un' ora e mezza, e durante questo lungo tempo si ebbe sempre l' ab-

8 Luglio. — Cavia del peso di gr. 800. Durata dell' eccitamento musicale. 1 ora.

bassamento della linea calorimetrica, senza minimo accenno ad una successiva elevazione. Quindi essendosi stabilito certamente dopo sì lungo tempo l' equilibrio tra la produzione e l' emissione del calore, ed essendo l' interno dell' animale a temperatura costante, la produzione di calore è diminuita,

[1] A. Mosso, *Sopra un nuovo metodo per scrivere i movimenti dei vasi sanguigni nell' uomo*. R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XI, 1875.

perchè a causa della produzione di uno strato coibente, è — come si osserva — diminuita la emissione del calore.

Questa minore produzione di calore potrebbe in qualche modo spiegarsi come effetto dell' atto psichico dell' attenzione?

19 luglio. — Cavia del peso di gr. 420. Durata dell' eccitamento musicale. Ore 1,40'.

Questa ipotesi riceve un certo suffragio da fatti sperimentali già acquisiti alla scienza.

Gli autori che hanno cercato di vedere un rapporto tra il calore animale e gli atti psichici, non si sono mai allontanati dalle misure termometriche.

Le prime misure a questo scopo furono fatte colle pile termoelettriche; le ultime e più estese furono fatte da Mosso con termometri sensibilissimi di Baudin, nei quali si può leggere il centesimo di grado.

Ma il termometro, misurando solo le variazioni della temperatura di determinate località, non ci dà che un valore relativo, perchè la temperatura è la risultante di tre fattori, cioè del calore prodotto, del calore che cede o che assume dall' esterno, e del calore specifico del tessuto. Coi soli dati termometrici inoltre non si può decidere se si tratti di semplice cangiamento di distribuzione di calore, oppure di variazione di produzione del medesimo.

Soltanto il calorimetro, che ci dà il valore assoluto del calore emesso in una unità di tempo, è capace di risolvere la questione se un atto psichico sia accompagnato da fenomeni *ectotermici* o *endotermici*, vale a dire implichi aumento o diminuzione di calore.

Lombard (1) e Fasola (2) fecero ricerche di questo genere misurando la temperatura della superficie esterna della testa con una pila termoelettrica.

Schiff (3), Corso (4), Tanzi (5) adoperarono pure nelle loro ricerche

(1) Lombard, *Experiments on the Relation of Heat to Mental Work.* New-Jork, Medical Journal, 1867.

(2) G. Fasola, *Sulle variazioni termiche cefaliche durante il linguaggio parlato.* Archivio per le scienze mediche, 1890.

(3) M. Schiff, *Recherches sur l'échauffement des nerfs et des centres nerveux à la suite des irritations sensorielles et sensitives.* Archiv. de Physiologie 1869-70.

(4) F. Corso, *L'aumento e la diminuzione del calore nel cervello per il lavoro intellettuale.* Firenze, 1881.

(5) E. Tanzi, *Ricerche termoelettriche sulla corteccia cerebrale in relazione cogli stati emotivi.* Rivista di Freniatria e di medicina legale, 1889.

le pile termoelettriche, ma misurarono direttamente la temperatura del cervello.

Le più numerose ed estese ricerche su questo argomento sono state fatte da Mosso [1] che si è servito dei termometri.

Orbene Mosso [2] ha visto qualche volta seguire ad eccitamenti psichici un leggiero aumento della temperatura del cervello; ma ha anche visto in molti casi non variare la temperatura, ed in alcuni casi anche avvenire un raffreddamento, durante l' attività psichica del cervello.

Data la grande estensione dei centri psichici, e poichè il termometro non può rivelare che la temperatura di un limitato campo di questi, non sappiamo che cosa risulterebbe *in toto*, con un eccitamento psichico di lunga durata, se un riscaldamento od un raffreddamento del cervello.

Se il termometro rivela un aumento di temperatura in un dato momento ed in una data regione del cervello, non possiamo perciò ripudiare l' ipotesi che contemporaneamente in altri punti avvenga un raffreddamento.

Data quindi l' ipotesi che la cavia, sotto l' influenza della musica, compia un atto psichico, nella forma tonica dell' attenzione, la diminuzione delle calorie emesse nella unità di tempo, può interpretarsi come l' espressione di quest' atto psichico.

Resta ad interpretarsi un altro fatto osservato da noi in altre specie di animali.

Mentre nei conigli, nei galli, ma specialmente nelle cavie, la diminuzione del numero delle calorie, emesse in una unità di tempo, è un fenomeno costante, nei piccioni e negli uccelli canori si osserva il fenomeno contrario.

Sotto l' influenza della musica questi animali emettono una maggior quantità di calore.

Nei piccioni questo fenomeno è molto evidente, ed è un fenomeno di lunga durata, per quanto tempo cioè dura l' influenza del suono.

Non sappiamo se ciò sia dovuto ad agitazione o accresciuto movimento degli animali, perchè ci mancava il mezzo di illuminare il calorimetro e quindi di osservarli direttamente.

Si potrebbe pensare che la musica agisca come uno stimolo attivando il metabolismo dei tessuti.

Se questa ipotesi corrispondesse al vero, allora il fenomeno dell' aumento di calore rientrerebbe nell' ordine dei fatti osservati da Tarchanoff [3] nelle cavie e nei conigli, che sotto l' influenza dell' eccitamento uditivo, consumano più ossigeno ed emettono più acido carbonico.

[1] A. Mosso, *Les phénomènes psychiques et la température du cerveau.* Croonian Lecture, 1892.

[2] Id., *La temperatura del cervello.* Milano, 1894.

[3] I. De Tarchanoff, loc. cit.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 12 aprile 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle osservazioni solari fatte al R. Osservatorio del Collegio Romano durante il 1° trimestre del 1896.* Nota del Socio P. Tacchini.

Ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati delle osservazioni fatte sulle macchie, facole e protuberanze solari nei primi tre mesi del corrente anno. La stagione fu assai favorevole ed eccezionalmente buona nel mese di Febbraio, in cui si hanno 24 giorni di osservazioni anche per le protuberanze. Per le macchie e per le facole i risultati sono contenuti nel seguente specchietto:

1896

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi di macchie	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Gennaio . .	25	3,12	2,36	5,48	0,00	0,00	2,48	29,96	60,20
Febbraio . .	24	6,75	6,04	12,79	0,00	0,00	3,29	51,92	64,79
Marzo . . .	24	5,08	5,67	10,75	0,00	0,00	3,00	39,17	78,75
Trimestre .	73	4,96	4,66	9,62	0,00	0,00	2,92	40,21	67,81

In complesso il fenomeno delle macchie solari continuò a diminuire, risultando le medie tutte inferiori a quelle del precedente trimestre; diminuzione pure si verificò nelle facole. È però da far rimarcare il massimo se-

condario nel mese di Febbraio tanto per il numero, che per la estensione delle macchie e frequenza dei gruppi. Le osservazioni furono fatte da me in 61 giorni e in 12 dall'assistente sig. Palazzo. Per le protuberanze abbiamo ottenuto i dati seguenti:

1896

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Gennaio . .	23	5,22	40″,4	2°,3	53″,0	90″
Febbraio. .	24	5,79	41,7	2,0	65,2	290
Marzo. . . .	16	4,56	34,0	1,3	42,7	65
Trimestre .	63	5,27	39,3	2,0	55,0	290

Nel fenomeno delle protuberanze si ha invece un leggiero aumento in confronto dell' ultimo trimestre del 1895 ed è pure da notare, come per le macchie, il massimo secondario nel mese di Febbraio, sebbene di minore importanza. Le osservazioni furono eseguite da me in 55 giornate ed in 8 dal sig. Palazzo.

Meteorologia. — *Riassunto delle osservazioni meteorologiche fatte all'Osservatorio Etneo.* Nota del Corrispondente A. Riccò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Operazioni distributive: l'integrazione successiva.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

1. Col nome di *elemento* designeremo in ciò che segue una serie

$$\alpha(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

ordinata per le potenze intere e positive della variabile x che supporremo convergente nel cerchio (r), cioè pei valori di x il cui modulo è minore del numero positivo r. Un elemento si dirà dato, o variabile, o arbitrario, a seconda che saranno dati, o variabili, o arbitrarî i suoi coefficienti a_0, a_1, a_2,... Indicheremo con $\overline{\alpha}(x)$ l'elemento che si ottiene sostituendo ad ogni coefficiente a_n di $\alpha(x)$ il rispettivo modulo $|a_n|$, talchè sarà

$$\overline{\alpha}(x) = |a_0| + |a_1| x + |a_2| x^2 + \cdots + |a_n| x^n + \cdots ;$$

Questo elemento convergerà nello stesso cerchio (r) di $\alpha(x)$, e per ogni punto x interno a quel cerchio si avrà

$$|\alpha(x)| \leq \bar{\alpha}(|x|).$$

2. L' integrazione indefinita applicata all' elemento $\alpha(x)$ ci darà un elemento convergente entro il medesimo cerchio, in cui rimarrà però indeterminato il termine indipendente da x. Volendo togliere questa indeterminatezza, potremo convenire di determinare la costante d' integrazione in modo che se $\alpha(x)$ è nullo dell' ordine m per $x = 0$, l' integrale sia nullo dell' ordine $m + 1$: fatta questa convenzione, l' operazione d' integrazione viene ad essere resa *ad un valore*, cioè tale che applicata ad un elemento determinato dà come risultato un elemento unico e determinato; essa è inoltre un' operazione distributiva. Usando, come al solito, il simbolo D ad indicare l'operazione di derivazione, indicheremo con D^{-1} l' operazione di integrazione determinata come si è detto, e colla reiterazione di essa avremo le operazioni distributive $D^{-2}, D^{-3}, \ldots$ esse pure determinate ad un valore dalla condizione che D^{-p}, applicata ad un elemento che si annulla dell' ordine m per $x = 0$, dia per risultato un elemento che vi si annulla dell' ordine $m + p$.

Essendo r_1 un numero positivo arbitrario inferiore ad r, si ha immediatamente, per $|x| \leq r_1$,

$$|D^{-1}\alpha(x)| < r_1 \bar{\alpha}(r_1), \quad |D^{-n}\alpha(x)| < \frac{r_1^n}{n!}\alpha(r_1). \tag{2}$$

3. L' operazione funzionale D^{-1} può venire rappresentata mediante una serie ordinata per le potenze intere positive del simbolo operatorio D della derivazione. Indicando infatti per un momento con $\beta(x)$ il risultato di D^{-1} applicata ad $\alpha(x)$, si ha per $|x| < \frac{1}{2}r$:

$$\beta(x - x) = \beta(x) - x\,D\beta + \frac{x^2}{1.2}D^2\beta - \cdots$$

e ponendo per β la sua espressione $D^{-1}\alpha$ e per $\beta(0)$ il suo valore, che è zero, viene:

$$D^{-1}\alpha = x\alpha - \frac{x^2}{1.2}D\alpha + \frac{x^3}{3!}D^2\alpha - \cdots \tag{3}$$

Questa serie converge assolutamente ed in ugual grado entro il cerchio $\left(\frac{1}{2}r\right)$: essendo infatti

$$|x| \leq r' < \frac{r}{2}$$

viene

$$|\alpha(x)| \leq \bar{\alpha}(r'), \quad |D^n\alpha(x)| \leq D^n\bar{\alpha}(r'),$$

onde i termini del secondo membro della (3) sono minori di quelli della serie convergente a termini positivi

$$\sum \frac{r'^n}{n!} D^n \bar{\alpha}(r'), \tag{4}$$

4. Se nella formula (3) mutiamo α in $D^{-1}\alpha$, otteniamo con facile riduzione

$$D^{-2}\alpha = \frac{x^2}{2}\alpha - \frac{x^3}{3 \,.\, 1} D\alpha + \frac{x^4}{4 \,.\, 2!} D^2\alpha - \frac{x^5}{5 \,.\, 3!} D^3\alpha + \cdots; \tag{5}$$

in generale, vale la formula

$$D^{-n}\alpha = \frac{x^n}{n-1\,!} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^\nu}{(n+\nu) \,.\, \nu\,!} D^\nu \alpha \tag{5}$$

che si dimostra coll' usuale metodo di recursione, ammettendola vera per l'indice $n-1$ e mostrando quindi, col mutamento di α in $D^{-1}\alpha$, che essa vale per l'indice successivo n.

La serie (4) è essa pure convergente assolutamente ed in ugual grado entro il cerchio $\left(\frac{1}{2} r\right)$, poichè per $|x| \leq r' < \frac{1}{2} r$, i termini di essa serie sono minori rispettivamente, in valore assoluto, dei termini della serie convergente e a termini positivi:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r'^{\,n+\nu}}{n!\,\nu!} D^\nu \bar{\alpha}(r').$$

5. Siano ora $\alpha(x)$, $\beta(x)$ due elementi convergenti nel cerchio (r), $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ ciò che essi divengono mutando ogni coefficiente nel rispettivo valore assoluto, e consideriamo l' operazione D^{-1} applicata al prodotto $\alpha\beta$. Integriamo per parti successivamente, determinando sempre l' integrazione nel modo convenuto, ed avremo

$$D^{-1}\alpha\beta = \alpha D^{-1}\beta - D^{-1}(D\alpha \,.\, D^{-1}\beta),$$
$$D^{-1}\alpha\beta = \alpha D^{-1}\beta - D\alpha \,.\, D^{-2}\beta + D^{-1}(D^2\alpha \,.\, D^{-2}\beta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{aligned} D^{-1}\alpha\beta = {} & \alpha D^{-1}\beta - D\alpha \,.\, D^{-2}\beta + D^2\alpha \,.\, D^{-3}\beta - \cdots \\ & \cdots + (-1)^{n-1} D^{n-1}\alpha \,.\, D^{-n}\beta + (-1)^n D^{-1}(D^n\alpha \,.\, D^{-n}\beta). \end{aligned} \tag{6}$$

Esaminando l' ultimo termine, abbiamo che per

$$(x) \leq r' < \frac{1}{2} r,$$

sarà

$$|D^n\alpha| \leq D^n \bar{\alpha}(r'),$$

e per la (2):

$$|D^{-n}\beta(x)| < \frac{r'^n}{n!}\overline{\beta}(r')$$

onde

$$|D^{-1}(D^n\alpha \, . \, D^{-n}\beta)| < \frac{r'^{n+1}}{n!} D^n\overline{\alpha}(r') \, . \, \overline{\beta}(r');$$

ora per le ipotesi fatte, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{n!} D^n\overline{\alpha}(r')$$

è convergente, onde il termine ultimo della (6), $D^{-1}(D^n\alpha \, . \, D^{-n}\beta)$, tende a zero per $n = \infty$; da ciò risulta dimostrata la convergenza della serie che si ottiene facendo $n = \infty$ nel secondo membro della (6), e dalle considerazioni stesse che si sono fatte emerge inoltre la convergenza in ugual grado ed assoluta della serie stessa per $|x| < \frac{1}{2}r$. Siamo giunti in tal modo alla formula:

$$D^{-1}\alpha\beta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^n\alpha \, . \, D^{-(n+1)}\beta, \tag{7}$$

valida per ogni coppia di elementi α, β convergenti in un cerchio comune (r) di centro 0 e pei valori di x compresi nel cerchio $\left(\frac{1}{2}r\right)$.

Le serie (3), (5), (7) procedono per le derivate successive della funzione arbitraria α; esse appartengono quindi alla classe di serie che ho considerate in un recente lavoro [1] e precisamente sono fra quelle che ho dette *di prima specie*, cioè al cui campo funzionale di convergenza appartiene ogni funzione regolare in un intorno di $x = 0$.

La formula (7) si può dire in qualche modo l'analoga, nel calcolo funzionale, di ciò che è la serie geometrica nella teoria delle funzioni.

Con procedimento analogo si giunge alla formola più generale

$$D^{-m}\alpha\beta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} D^n\alpha \, . \, D^{-(m+n)}\beta, \tag{7'}$$

di cui lo stesso ragionamento fatto per la (7) vale a provare la convergenza per $|x| < \frac{1}{2}r$.

6. Nella formula (7), se alle $D^{-n}\beta$ sostituiamo i loro sviluppi (5), otteniamo una serie doppia, che risulta però convergente assolutamente e che

[1] *Della validità effettiva di alcuni sviluppi.* Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 19 gennaio 1896.

quindi si può sommare nell'ordine che più aggrada pei valori di x compresi nel cerchio $\left(\frac{1}{2}r\right)$. Infatti, il termine generale di questa serie doppia sarà

$$(-1)^\nu \frac{x^{n+\nu}}{(n-1)!\,\nu!\,(n+\nu)} D^\nu \beta(x)\, D^{n-1} \alpha(x),$$

il cui modulo, per $|x| < r'$, è minore della quantità positiva

$$\frac{r'^{\,n+\nu}}{\overline{n-1}!\,\nu!} D^\nu \overline{\beta}(r')\, D^{n-1} \overline{\alpha}(r')$$

e la serie doppia formata con questi termini positivi e che risulta dal prodotto delle serie

$$\sum \frac{r'^{\,n-1}}{\overline{n-1}!} D^{n-1} \overline{\alpha}(r') \quad \sum \frac{r'^{\,\nu}}{\nu!} D^\nu \overline{\beta}(r')$$

è certamente convergente per $r' < \frac{1}{2} r$.

Una analoga osservazione vale per le serie (7').

7. Abbiasi una successione infinita di elementi $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_n, \dots$ con

$$\lambda_n(x) = a_{n.0} + a_{n.1}\, x + a_{n.2}\, x^2 + \cdots + a_{n.\nu}\, x^\nu + \cdots,$$

i quali siano convergenti in un cerchio comune (r), e si consideri la serie

$$S(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n D^{-n} \varphi \tag{8}$$

dove φ è un elemento arbitrario convergente nel medesimo cerchio (r).

Per poter parlare della convergenza nella serie (8), occorre naturalmente assoggettare i suoi coefficienti λ_n a qualche limitazione. Noi porremo la seguente, assai poco restrittiva, essendo essa, come è facile vedere, soddisfatta in casi estesissimi: ammetteremo che esistano tre numeri positivi $r_1 < r$, g e c qualunque, tali che essendo l_n il limite superiore dei moduli di $\alpha_n(x)$ nel cerchio (r_1), si abbia

$$l_n < g\, n!\, c^n. \qquad (n = 0, 1, 2, \dots \infty). \tag{9}$$

Sotto questa condizione, la serie (8) risulta convergente assolutamente ed in ugual grado per i valori di x tali che sia

$$|x| \leq r_2 < r_1 < r:$$

essa darà quindi un elemento di funzione analitica pure regolare nel cerchio (r_1), ed S sarà pertanto simbolo di un'operazione funzionale distributiva.

A dimostrare ciò, indichiamo ancora con $\overline{\varphi}$ ciò che diviene φ quando si

cambia ogni coefficiente di questo elemento nel rispettivo valore assoluto; avremo in forza della (2):

$$|\lambda_n(x)\, D^{-n}\varphi(x)| < g\, c^n\, r_2^n\, \overline{\varphi}(r_2);$$

basta ora fare

$$r_2 < \frac{c'}{c},$$

essendo c' un numero positivo arbitrario minore dell' unità, per rendere la (8) convergente assolutamente ed in ugual grado in un intorno di $x = 0$, qualunque sia l' elemento φ.

Risulta da ciò che sotto la condizione (9) e pei valori di x indicati, alla serie (8) si può applicare la derivazione termine a termine.

8. Se una serie della forma (8) in cui la condizione (9) si suppone soddisfatta, è tale da dare come risultato lo zero per ogni elemento φ che in essa si sostituisca, ne saranno identicamente nulli tutti i coefficienti. Potremo anzi dimostrare che basta che la (8) si annulli quando si pone per φ una qualunque potenza intera positiva x^h della variabile, perchè siano identicamente zero tutti gli elementi $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Presa infatti $\varphi = x^h$, viene

$$D^{-1}\varphi = \frac{x^{h+1}}{h+1}, \;\ldots\; D^{-n}\varphi = \frac{x^{h+n}}{(h+1)(h+2)\ldots(h+n)},$$

onde

$$S(x^h) = x^h \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n.0} + a_{n.1}\, x + a_{n.2}\, x^2 + \cdots) \frac{x^n}{(h+1)\ldots(h+n)} = 0.$$

Ordinando per le potenze di x, il che è lecito per l' ammessa convergenza in ugual grado che è conseguenza della condizione (9), verrà

$$a_{0.0} = 0, \; a_{0.1} + \frac{a_{1.0}}{h+1} = 0, \ldots$$

ed in generale

$$a_{0.\nu} + \frac{a_{1.\nu-1}}{h+1} + \frac{a_{2.\nu-2}}{(h+1)(h+2)} + \cdots + \frac{a_{\nu.0}}{(h+1)(h+2)\ldots(h+\nu)} = 0.$$

Fissato ν, questa relazione ha luogo per ogni valore di h e si può scrivere:

$$(10) \quad a_{0.\nu}(h+1)(h+2)\ldots(h+\nu) + a_{1.\nu-1}(h+2)\ldots(h+\nu) + \cdots + a_{\nu.0} = 0.$$

Mutando h in $h+1, h+2, \ldots h+\nu$, avremo un sistema di $\nu+1$ equazioni lineari omogenee fra le $a_{0.\nu}, a_{1.\nu-1}, \ldots a_{\nu.0}$; ora, se questi coefficienti non fossero tutti nulli, dovrebbe essere nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} (h+1)(h+2)\ldots(h+\nu) & (h+2)\ldots(h+\nu) \ldots\ldots & h+\nu & 1 \\ (h+2)(h+3)\ldots(h+\nu+1) & (h+3)\ldots(h+\nu+1)\ldots & h+\nu+1 & 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ (h+\nu+1)(h+\nu+2)\ldots(h+2\nu) & (h+\nu+2)\ldots(h+2\nu)\ldots & h+2\nu & 1 \end{vmatrix}$$

Ma questo determinante si riduce facilmente, colla sottrazione di ogni orizzontale dalla successiva, al prodotto di ν! per il determinante di forma analoga ma di ordine minore

$$\begin{vmatrix} (h+2)(h+3)\dots(h+\nu) & (h+3)\dots(h+\nu) & \dots\dots & h+\nu & 1 \\ (h+3)(h+4)\dots(h+\nu+1) & (h+4)\dots(h+\nu) & \dots\dots & h+\nu+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (h+\nu+1)(h+\nu+2)\dots(h+2\nu-1) & (h+\nu+2)\dots(h+2\nu-1) & \dots & h+2\nu-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Reiterando la medesima riduzione, si giunge finalmente a porre il determinante del sistema considerato sotto forma di un prodotto di fattoriali per il determinante

$$\begin{vmatrix} h+\nu & 1 \\ h+\nu+1 & 1 \end{vmatrix}$$

certamente differente da zero. Ne risulta che tutti i coefficienti $a_{n,\nu}$ delle λ_n sono nulli, c. d. d.

Il teorema ora dimostrato si estende, colla medesima dimostrazione, alle serie della forma

$$\sum_{n=-m}^{\infty} \lambda_n \, \mathrm{D}^{-n}\varphi \, .$$

Dal teorema precedente risulta immediatamente che se due serie $\mathrm{S}(\varphi)$, $\mathrm{S}_1(\varphi)$ della forma (8) dànno identico risultato per ogni elemento φ, esse dovranno essere identiche nei loro coefficienti. Da ciò l'estensione del metodo dei coefficienti indeterminati alle serie (8), metodo di cui mostreremo, in una prossima Nota, l'applicazione all'interpolazione funzionale e all'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee.

Matematica. — *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali multipli.* Nota del Corrispondente Vito Volterra.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *La durata dell' emissione dei raggi di Röntgen.* Nota del Corrispondente A. Ròiti.

1. La corrente primaria del rocchetto di Ruhmkorff era interrotta nel petrolio pesante fra un' amalgama di zinco ed una punta di platino, e le interruzioni erano operate da un piccolo motore elettrico che ad ogni giro sollevava la punta una, due, tre volte mediante dei piuolini che si potevano fissare sulla periferia d'un disco portato dall' albero del motore. Le oscillazioni proprie della molla, che riconduceva in basso la punta, erano convenientemente smorzate da pennelli di setola.

Il moto era trasmesso al tachimetro da un nastro che strisciava sopra un cilindro; il quale, essendo spinto avanti ed indietro con una vite a scrupolo, serviva a far variare la tensione e quindi l'attrito, ed a mantenere fermo sopra un dato segno l'indice del tachimetro.

Con questa disposizione e con un cronometro ho potuto contare le scariche che mandavo nei tubi di Crookes, osservandone la frequenza.

Dalle prove fatte finora, e per frequenze non maggiori di 17 al secondo, mi risulta che l' intensità dell' impressione fotografica è presso che indipendente dalla frequenza, rimanendo determinata dal numero complessivo delle scariche. Ma ciò a due condizioni:

I. Che si mantenga il tubo nel medesimo stadio di luminosità.

II. Che fra un' osservazione e l' altra si seguiti a tenerlo attivo, limitando la durata d'esposizione della lastra col togliere e col rimettere al posto degli opportuni diaframmi di piombo.

Se non si soddisfa a questa seconda condizione e si lascia inattivo il tubo fra un' osservazione e la successiva, può accadere che un dato numero di scariche produca un' impressione minore quanto più corto è il tempo nel quale esse si compiono.

Ho riscontrato questa circostanza specialmente con un tubo nel quale i raggi catodici colpivano uno strato di solfato calcico anidro (rendendolo luminoso di color carnicino), ed i raggi di Röntgen ivi destati attraversavano lo specchio catodico concavo e la parete di vetro retrostante, nella maniera da me indicata all'Accademia il 15 marzo.

Invece con un tubo, nel quale i raggi di Röntgen erano destati al modo solito sul vetro di Turingia, l' inosservanza della seconda condizione suddetta non ha prodotto notevole effetto, poichè le impressioni fotografiche sono riuscite quasi indipendenti dalla frequenza delle scariche.

Mi affretto però a soggiungere che tale indipendenza deve avere un limite: ed infatti, sebbene non abbia ancora instituito delle esperienze sistematiche a questo riguardo, pure sembrami che nelle grandi frequenze l' effetto

esplicato da ogni singola scarica sia stata minore, poichè altrimenti in tutte le numerose prove fatte per l' addietro coll' interruttore rapido di Deprez le impressioni avrebbero dovuto essere più sollecite, se si confrontano con quelle di cui è parola nella presente Nota.

2. Nel disco interruttore portato dall'albero del motore elettrico ho incassato una lastra quadrata del Lumière, involtata in carta nera e protetta davanti con una fitta rete metallica. Davanti alla lastra verticale, ho collocato un piano orizzontale di piombo, circa all' altezza dell' asse di rotazione, e sopra di esso, parallelo alla lastra ed a circa 3 mm. da questa, ho disposto un diaframma di piombo con una fenditura di 1 mm. Poi ho rivolto alla fenditura un tubo cilindrico parallelo all' asse di rotazione.

Essendo tutto ben regolato, ogni scarica deve trovare la lastra nella identica posizione della scarica precedente. Quindi, se l'emanazione dei raggi di Röntgen fosse, per così dire, istantanea, l'impressione ottenuta sulla lastra rotante riuscirebbe identica con quella ottenuta a fermo.

Nelle poche prove fatte finora, con velocità di 500 giri al minuto, le impressioni avute nel corso della rotazione, presentano la forma di un piccolo settore circolare, così che la durata dell' emissione parrebbe apprezzabile; ma rimane il dubbio che le scariche non abbiano trovato la lastra costantemente nella medesima posizione; poichè i mezzi adoperati non costituiscono davvero un apparato di precisione.

Ad ogni modo si può asserire che la durata dell'emissione del vetro di Turingia e del vetro di Jena non arriva certamente ad $^1/_{600}$ di secondo.

La positiva fotografica, che presento all'Accademia, è il risultato d' una di queste esperienze; nella quale la scarica avveniva due volte per ogni rivoluzione: così che vi si vedono i due settori opposti impressi durante il moto, e la striscia impressa poi, dopo aver fermata la lastra.

Queste esperienze erano già eseguite quando mi sono arrivati i *Comptes rendus* del 30 marzo: e vi ho trovato a pag. 778 una Nota di James Chappuis, il quale, osservando la velocità della dispersione elettrica prodotta dai raggi di Röntgen, fu indotto a ritenere che la fluorescenza invisibile (come egli la chiama) possa persistere almeno per un quarto di secondo, senza indebolirsi.

Non so quanto sieno rigorose siffatte conclusioni; ma se ciò sussistesse, bisognerebbe ammettere che le radiazioni di Röntgen fossero quanto mai complesse, poichè ve ne sarebbero di quelle che provocano la dispersione della elettricità senza produrre effetto fotografico.

3. In un'altra esperienza ho coperto la metà della fenditura più prossima all' asse di rotazione, con una striscia di cartone opaco per la luce, ma trasparente pei raggi di Röntgen: e l' altra metà con una lastra di vetro che aveva contegno opposto. La fotografia s' è dovuta prendere questa volta in una stanza perfettamente buia, tenendo scoperta la lastra del Lumière.

L'impressione prodotta dai raggi di Röntgen è molto più stretta e più debole di quella dovuta alla luce di fluorescenza. Non per ciò si può sostenere che l' emissione dei primi non duri quanto quella della seconda; giacchè anche a lastra ferma si manifesta una consimile diversità, prodotta senza dubbio dallo espandersi dell' azione fotografica oltre i confini illuminati a motivo della luce intensa e della posa lunga.

Sarebbe interessante ripetere quest'esperienza ponendosi possibilmente al riparo da tale perturbazione, e servendosi d' un interruttore rotante più esatto.

Chimica generale. — *Nuove ricerche sulla reazione di Anderson.* Nota del Socio Alfonso Cossa.

Con una Nota già pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia (1) ho fatto conoscere che la reazione di Anderson (eliminazione di due molecole d' acido cloridrico) caratteristica dei cloroplatinati delle basi piridiniche si verifica anche nei cloroplatiniti delle stesse basi.

Con nuove esperienze, delle quali ora comunico brevemente i risultati, ho trovato che la reazione di Anderson è suscettibile di una ulteriore generalizzazione, inquantochè essa si applica al cloropalladito di piridina, ed ai cloropalladiti e cloroplatiniti di ammine non appartenenti alla serie delle piridine.

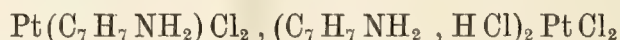
1). Quando, alle ordinarie temperature, ad una soluzione acquosa concentrata e neutra di cloridrato di piridina si aggiunge una soluzione neutra di cloropalladito potassico, dopo pochi minuti comincia a separarsi una materia cristallina di color giallo carico, e la soluzione va sempre più acquistando reazione acida a misura che aumenta la quantità della materia separata. Questa, esaminata al microscopio, risulta formata da minutissimi prismi ortoedrici, sforniti di sensibile dicroismo. Dai risultati di tre analisi si deduce che questi cristalli hanno una composizione corrispondente alla formola: $Pd(C_5H_5N)_2Cl_2$ identica a quella del cloruro di palladosopiridina che si può ottenere direttamente facendo agire in quantità limitata la piridina sopra una soluzione di cloruro palladoso, oppure decomponendo, alla temperatura dell' ebollizione, o per l'azione di un acido, una soluzione di cloruro di palladosodipiridina. — Pertanto nelle condizioni della mia esperienza il cloropalladito di piridina ha un' esistenza effimera, e la reazione di Anderson si inizia e si compie con una velocità molto più grande di quella da me precedentemente osservata esperimentando col cloroplatinito della stessa base.

2). Il cloropalladito di anilina perde due molecole di acido cloridrico con prontezza pressochè eguale a quella riscontrata per il cloropalladito di piridina. Il cloruro di palladosoanilina è costituito da minutissimi prismi

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei. Vol. II, sem. 2°, serie 5ª. Seduta del 3 dicembre 1893.

ortoedrici di colore giallo sbiadito, quasi affatto insolubili nell'acqua e nell'alcool. — Minore è la velocità della reazione di Anderson osservata nel cloroplatinito di anilina. Per ottenere prontamente dalla soluzione di questo sale l'eliminazione di due molecole di acido cloridrico, occorre riscaldare fino verso i 60° gradi la miscela delle due soluzioni neutre di cloridrato di anilina e di cloroplatinito potassico. — Il cloruro di platosanilina è una polvere di colore giallo-grigiastro formata da esilissimi prismi monoclini che si estinguono nella luce polarizzata quando lo spigolo più pronunziato del prisma forma colla sezione principale del nicol un angolo di circa 34′ gradi.

3). La reazione di Anderson avviene immediatamente alla temperatura ordinaria in una mescolanza di soluzioni neutre di cloridrato di paratoluidina e cloropalladito potassico. Il cloruro di palladoso-paratoluidina è costituito da una polvere microcristallina che depolarizza la luce. — Una miscela di cloridrato di paratoluidina e di cloroplatinito potassico depone lentamente a freddo, immediatamente ad una temperatura vicina a quella dell'ebollizione, il cloruro di platosoparatoluidina, il quale è formato da una polvere di colore bianco-grigiastro criptocristallina. — Separando il precipitato depostosi immediatamente per l'azione del calore, e lasciando a sè le acque madri, queste depongono delle belle lamine monocline di colore giallo rossastro, le quali hanno una composizione corrispondente alla formola:

$$Pt(C_7H_7NH_2)Cl_2\,,\,(C_7H_7NH_2\,,\,HCl)_2PtCl_2$$

e che rappresenta una combinazione intermedia, omologa a quella da Anderson ottenuta nella decomposizione del cloroplatinato e da me in quella del cloroplatinito di piridina.

4). Il cloropalladito, il cloroplatinato ed il cloroplatinito di monobenzilammina non danno luogo alla reazione di Anderson, quantunque la monobenzilammina sia isomera della paratoluidina.

5). La reazione d'Anderson è una reazione limite e la sua velocità, per una data temperatura, diminuisce non solo in funzione della concentrazione, ma anche in funzione della quantità di acido cloridrico eliminato, perchè questo acido cloridrico, quando ha raggiunto un certo limite, deve impedire il proseguimento della reazione. Che ciò realmente sia, può essere dimostrato col seguente esperimento col quale ho ottenuto che la eliminazione dell'acido fosse completa. — In un recipiente contenente una soluzione di cloridrato di paratoluidina (due molecole) e di cloroplatinito di potassio (una molecola) ho immerso un cristallo di calcite, il quale saturava l'acido cloridrico mano mano che si separava, e così potei ottenere quantità di cloruro di platosoparatoluidina e della combinazione sopra accennata di questo corpo con il cloroplatinito di paratoluidina, che complessivamente corrispondevano a pressochè tutta la quantità del cloridratato di paratoluidina primitivamente impiegato.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio BELTRAMI.

Nel lavoro che ha per titolo *Sur le contact des surfaces* [1], l' Halphen, prendendo occasione da un'osservazione già fatta dall'Hermite [2] a proposito della ricerca delle quadriche tangenti in un punto dato ad una data superficie, ha rilevato come tale questione, e più in generale la questione analoga in cui si tratti, anzichè di quadriche, di superficie algebriche di un dato ordine m, equivale a quella di assegnare le equazioni alle derivate parziali di ordine minimo, non contenenti nessuna costante arbitraria, alle quali soddisfanno le superficie d'ordine m. Dopo aver indicato un metodo per determinare siffatte equazioni, ha poi trovato in particolare che *le superficie di 2° grado soddisfanno a due equazioni alle derivate parziali del 3° ordine,* le quali si ottengono scrivendo le condizioni perchè il polinomio di 3° grado in α

$$\alpha^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\alpha^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\alpha \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

sia divisibile per il polinomio di 2° grado

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

e sono appunto quelle che già l'Hermite [3] aveva indicato per la possibilità del contatto di 3° ordine fra una data superficie ed una superficie di 2° grado.

Volendo ora risolvere il medesimo problema per le quadriche (ad $n-1$ dimensioni) di uno spazio ad un numero qualunque $n\,[>2$ [4]$]$ di dimensioni, basterebbe ripetere gli stessi ragionamenti fatti dall'Halphen nei n^{i}. 4 e 5 del l. c., e si concluderebbe che tali quadriche debbono soddisfare ad

$$\frac{1}{6}\,n(n^2-7)+1$$

equazioni [5] alle derivate parziali del 3° ordine (non contenenti nè le coor-

[1] Bulletin de la Société Math. de France, t. III, pag. 28.

[2] *Cours d'analyse de l'École polytechnique,* 1873, pag. 139 e segg.

[3] L. c., pag. 148-149.

[4] Il caso delle coniche ($n=2$) dev'essere trattato a parte, perchè l'equazione differenziale corrispondente è del 5° ordine. Un metodo diretto e semplicissimo per trovarla è stato indicato dall'Halphen nella Nota *Sur l'équation différentielle des coniques* (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. VII, pag. 83), la lettura della quale ha appunto dato occasione al presente lavoro. Il metodo dell' Halphen è stato riprodotto dal Jordan a pag. 157-158 del 1° volume del suo *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (2ª edizione, 1893).

[5] Cioè ad una di più del numero che verrebbe assegnato dalla teoria generale: cfr. ad es. Jordan, l. c., pag. 159.

dinate nè le derivate parziali di 1° ordine), e che queste equazioni si possono ottenere in modo analogo a quello accennato poc' anzi.

Ma è facile riconoscere con qualche esempio che le equazioni, a cui si sarebbe condotti per tal via, non presentano tutte la forma più semplice possibile; in ogni modo, ad ottenerle effettivamente per un valore qualsiasi di n, si richiederebbe qualche ulteriore sviluppo.

Perciò in questa Nota mi propongo di esporre un altro metodo, per mezzo del quale le dette equazioni vengono direttamente stabilite sotto forma esplicita ed assai semplice: esso si desume da una formola, che dimostro nel n. 1, e che, oltre a presentare interesse anche in sè, fornisce altresì, in un suo caso particolare, una notevole espressione della *curvatura* (di Kronecker) di una quadrica di un iperspazio.

1. In uno spazio (euclideo) di n dimensioni siano $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z$ le coordinate cartesiane di un punto; allora la z del punto corrente di una quadrica data in quello spazio si può esprimere, in funzione delle rimanenti coordinate, come segue:

$$z = \mathrm{L} \pm \Phi^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

dove L è un polinomio di 1° grado nelle $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, e Φ è un polinomio di 2° grado nelle stesse variabili. Per simmetria daremo a Φ (che solo interverrà nelle relazioni seguenti) forma omogenea introducendo una nuova variabile x_n, cioè porremo

$$\Phi = \sum_i \sum_k a_{ik}\, x_i\, x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

intendendo che sia $x_n = 1$. Chiamando Φ_i la semiderivata di Φ rapporto ad x_i, cioè ponendo

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}\, x_j,$$

risulta:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} &= \pm \Phi^{-\frac{3}{2}}(a_{ii}\,\Phi - \Phi_i^2), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j} &= \pm \Phi^{-\frac{3}{2}}(a_{ij}\,\Phi - \Phi_i\,\Phi_j). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Ora formiamo il determinante simmetrico

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \dots\dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\,\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}^2} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

e consideriamone uno qualunque dei minori d' ordine $r (\leq n - 1)$ costruito intorno alla diagonale principale. Prendendo, per fissar le idee, quello che si trae dalle prime r linee di (3), poniamo per brevità

$$Z^{(1,2,\dots,r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots\dots\dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_2} & \dots\dots\dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_r^2} \end{vmatrix}.$$

Per le (2) avremo:

$$Z^{(1,2,\dots,r)} = \Phi^{-\frac{3r}{2}} \begin{vmatrix} a_{11}\Phi - \Phi_1^2 & a_{12}\Phi - \Phi_1\Phi_2 \dots & a_{1r}\Phi - \Phi_1\Phi_r \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}\Phi - \Phi_r\Phi_1 & a_{r2}\Phi - \Phi_r\Phi_2 \dots & a_{rr}\Phi - \Phi_r^2 \end{vmatrix},$$

ossia

$$Z^{(1,2,\dots,r)} \Phi^{\frac{r+2}{2}} = \Phi \begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1} \; a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^{i=r} \Phi_i \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,i-1} \; \Phi_1 \; a_{1,i+1} \dots a_{1r} \\ a_{21} \dots a_{2,i-1} \; \Phi_2 \; a_{2,i+1} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{r,i-1} \; \Phi_r \; a_{r,i+1} \dots a_{rr} \end{vmatrix},$$

dove al secondo membro, quando r sia dispari, va premesso il doppio segno $\pm$. Svolgendo secondo gli elementi della colonna i^{ma} il determinante che nel secondo membro figura come coefficiente di Φ_i, si ottiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1} \; a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix} x_i + \sum_{j=1}^{j=n-r} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,i-1} \; a_{1,r+j} \; a_{1,i+1} \dots a_{1r} \\ a_{21} \dots a_{2,i-1} \; a_{2,r+j} \; a_{2,i+1} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{r,i-1} \; a_{r,r+j} \; a_{r,i+1} \dots a_{rr} \end{vmatrix} x_{r+i}.$$

Perciò, sostituendo, osservando che

$$\Phi - \sum_{i=1}^{i=r} \Phi_i x_i = \sum_{i=1}^{i=n-r} \Phi_{r+i} x_{r+i},$$

e ordinando rispetto alle $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, risulta:

$$Z^{(1,2,\dots,r)} \Phi^{\frac{r+2}{2}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n-r} x_{r+j} \left\{ \Phi_{r+j} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^{i=r} \Phi_i \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,i-1} \; a_{1,r+j} \; a_{1,i+1} \dots a_{1r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{r,i-1} \; a_{r,r+j} \; a_{r,i+1} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \right\}.$$

Il coefficiente di x_{r+j} nel secondo membro si può scrivere sotto forma di un unico determinante come segue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} & a_{1,r+j} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} & a_{2,r+j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} \dots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ \Phi_1 & \Phi_2 \dots & \Phi_r & \Phi_{r+j} \end{vmatrix},$$

e questo alla sua volta, sviluppato secondo gli elementi dell'ultima linea decomposti nei loro termini, equivale alla somma

$$\sum_{i=1}^{i=n-r} x_{r+i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+j} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ a_{r+i,1} & \dots & a_{r+i,r} & a_{r+i,r+j} \end{vmatrix}.$$

Se quindi per brevità chiamiamo $\Delta_{ij} (= \Delta_{ji})$ il determinante che qui figura come coefficiente di x_{r+i}, cioè il determinante d'ordine $r+1$ che si ottiene orlando il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{vmatrix}$$

cogli elementi $a_{1,r+i}, a_{2,r+i}, \dots, a_{r+j,r+i}$ ed $a_{1,r+j}, a_{2,r+j}, \dots, a_{r+i,r+j}$, risulta finalmente:

$$\text{(4)} \qquad Z^{(1,2,\dots,r)} = \Phi^{-\frac{r+2}{2}} \sum_{i=1}^{i=n-r} \sum_{j=1}^{j=n-r} \Delta_{ij}\, x_{r+i}\, x_{r+j},$$

dove, quando r sia dispari, al secondo membro va premesso il doppio segno $\pm$.

Il risultato sostanziale contenuto nella formola precedente può enunciarsi dicendo che *se dal determinante (3), formato colle derivate parziali di 2° ordine della z, si estrae un minore qualunque di ordine $r (\leq n-1)$ costruito intorno alla diagonale principale, e però contenente le sole derivate parziali prese rapporto a certe r (del resto qualunque) fra le variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, esso si spezza nel prodotto di una potenza di Φ per un polinomio di 2° grado nelle sole $n-r-1$ variabili rimanenti.*

2. La formola (4) è specialmente notevole quando si assuma $r = n-1$: invero il secondo fattore che comparisce nel suo secondo membro diventa allora (posto $x_n = 1$) il discriminante del polinomio Φ, il quale, come facil-

mente si verifica, non è altro che il discriminante della quadrica moltiplicato per $(-1)^n$. Chiamando dunque D quest'ultimo discriminante, otteniamo

$$
(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}^2} \end{vmatrix} = (-1)^n \mathrm{D}\, \Phi^{-\frac{n+1}{2}},
$$

dove, quando n sia pari, il secondo membro dev' essere ancora moltiplicato per ± 1.

Prima di venire all'argomento principale di questa Nota, faremo un'applicazione di questa formola all' espressione della curvatura della quadrica considerata. Com' è noto, il Kronecker per primo [1] ha esteso alle varietà (di $n-1$ dimensioni), definite da un'equazione fra le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z$ di un punto di uno spazio euclideo ad n dimensioni, il concetto di curvatura Gaussiana di una superficie dello spazio ordinario. Senza entrare in altri particolari, ci basterà ricordare che in seguito il Beez [2] ha trovato, come espressione della *curvatura di Kronecker* per una siffatta varietà, la seguente:

$$
(-1)^{n-1} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{-\frac{n+1}{2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}^2} \end{vmatrix}.
$$

Dalla (5) si deduce quindi senz' altro che *la curvatura di Kronecker in un punto qualunque di una quadrica ad $n-1$ dimensioni rappresentata dall' equazione* (1) *è data dall' espressione*

$$
-\mathrm{D}\, \Phi^{-\frac{n+1}{2}} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{-\frac{n+1}{2}},
$$

la quale, quando n sia pari, va risp. moltiplicata per ± 1.

Poichè Φ in ciascun punto della quadrica assume valore positivo, la espressione precedente, se n è dispari, è sempre di segno contrario a quello

(1) Kronecker, *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln* (Monatsberichte der k. P. Akad. d. W. zu Berlin, 5 agosto 1869, pag. 688).

(2) Beez, *Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Math. Ann., Bd. VII, pag. 390-391). — La stessa espressione si ottiene senza difficoltà ponendo $k = \infty$ nella formola 41), colla quale il Killing, a pag. 221 del suo libro *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885), determina i raggi principali di curvatura di una varietà ad $n-1$ dimensioni appartenente ad uno spazio non euclideo di n dimensioni (e di curvatura Riemanniana $\frac{1}{k^2}$).

di D, onde si conclude incidentalmente che *per una quadrica di uno spazio avente un numero dispari di dimensioni, la curvatura di Kronecker ha lo stesso segno in ogni punto, e precisamente è positiva o negativa, secondo che il discriminante della quadrica è negativo o positivo.*

3. Per dedurre ormai dai risultati del n. 1 le equazioni differenziali cui deve soddisfare la z, osserviamo che per la (4) si ha:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda^2} = \pm \psi^{(\lambda)} \Phi^{-\frac{3}{2}} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1),$$

dove $\psi^{(\lambda)}$ è un polinomio di 2° grado nelle sole variabili $x_1, x_2, \dots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}$. Da questa relazione e da quella che se ne ottiene derivando rapporto ad x_λ segue:

$$(6) \qquad \frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial x_\lambda^3}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda^2}} = -3\frac{\Phi_\lambda}{\Phi} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1).$$

Se inoltre chiamiamo $Z^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}$ l'espressione analoga alla $Z^{(1,2,\dots,r)}$ e formata colle derivate seconde prese rapporto ad r qualunque, $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$, delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, dalla (4) si deduce:

$$Z^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} = \Phi^{-\frac{r+2}{2}} P,$$

essendo P un polimonio di 2° grado nelle sole $n - r - 1$ variabili rimanenti. Dividendo per quest' ultima relazione quella che se ne ricava derivandola rapporto ad una qualunque delle $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$, che diremo x_λ, si ha

$$(7) \qquad \frac{1}{Z^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}} \frac{\partial Z^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}}{\partial x_\lambda} = -(r+2)\frac{\Phi_\lambda}{\Phi} \qquad (\lambda = i_1, i_2, \dots, i_r),$$

la quale, al pari della (6), qualunque sia r, è valida anche nei segni. Dalle (6) e (7) si deduce allora:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda^2} \frac{\partial Z^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}}{\partial x_\lambda} - \frac{r+2}{3} \frac{\partial^3 z}{\partial x_\lambda^3} Z^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{array}\right\} = 1, 2, \dots, n-1, \\ \lambda = i_1, i_2, \dots, i_r \end{array} \right),$$

e queste sono in sostanza le equazioni alle derivate parziali del 3° ordine, a cui deve soddisfare la funzione z.

Per ottenere tali equazioni sotto la forma più semplice, basta dare ad r i valori più piccoli possibili, cioè 2 e 3.

Per $r=2$, ponendo ad es. $i_1=\lambda$, $i_2=\mu$, e denotando per semplicità cogli indici $1, 2, \ldots, n-1$ le derivate rapporto ad $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, dalla (8) risulta:

$$\text{(I)} \qquad 3\, z_{\lambda\lambda}\,(z_{\lambda\lambda}\, z_{\lambda\mu\mu} - 2\, z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\lambda\mu}) + z_{\lambda\lambda\lambda}\,(4\, z^2_{\lambda\mu} - z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}) = 0,$$

dove λ e μ sono due qualunque fra i numeri $1, 2, \ldots, n-1$. Ma si possono ottenere equazioni ancora più semplici: invero, se nella precedente si scambiano fra loro λ e μ, indi dalle due equazioni ottenute si elimina $z_{\lambda\mu\mu}$, e si divide la risultante per $4\, z^2_{\lambda\mu} - z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}$ (quantità che sulla quadrica non è nulla), si ottiene:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad 2\, z_{\lambda\mu}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\lambda\lambda} + z^2_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu\mu} - 3\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\lambda\mu} = 0.$$

Per $r=3$, posto $i_1=\lambda$, $i_2=\mu$, $i_3=\nu$, la (8) diventa:

$$\begin{aligned} &2z_{\lambda\lambda\lambda}\, z_{\lambda\lambda}\,(z_{\mu\mu}\, z_{\nu\nu} - z^2_{\mu\nu}) + 5z_{\lambda\lambda\lambda}\,(2z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu}\, z_{\mu\nu} - z^2_{\lambda\mu}\, z_{\nu\nu} - z^2_{\lambda\nu}\, z_{\mu\mu}) \\ - &3z_{\lambda\lambda}\,\{2z_{\lambda\lambda\mu}\,(z_{\lambda\nu}\, z_{\mu\nu} - z_{\lambda\mu}\, z_{\nu\nu}) + 2z_{\lambda\lambda\nu}\,(z_{\lambda\mu}\, z_{\mu\nu} - z_{\lambda\nu}\, z_{\mu\mu}) \\ + &z_{\lambda\lambda}\,(z_{\lambda\mu\mu}\, z_{\nu\nu} + z_{\lambda\nu\nu}\, z_{\mu\mu} - 2z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\mu\nu}) + 2z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu} \\ &- z_{\lambda\mu\mu}\, z^2_{\lambda\nu} - z_{\lambda\nu\nu}\, z^2_{\lambda\mu}\} = 0, \end{aligned}$$

dove λ, μ, ν sono tre qualunque fra i numeri $1, 2, \ldots, n-1$. Anche a questa si può dare una forma assai più semplice: infatti, moltiplicandola per $z_{\lambda\lambda}$, sostituendo a $3z^2_{\lambda\lambda}\, z_{\lambda\mu\mu}$ e $3z^2_{\lambda\lambda}\, z_{\lambda\nu\nu}$ le loro espressioni che si ricavano da (I), e dividendo poi per il binomio $z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\nu} - z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu}$, che sulla quadrica non è nullo, risulta:

$$\text{(II)} \qquad z_{\lambda\lambda\lambda}\,(4z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu} - z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\nu}) - 3z_{\lambda\lambda}\,(z_{\lambda\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu} + z_{\lambda\lambda\nu}\, z_{\lambda\mu} - z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\lambda\lambda}) = 0.$$

Concludiamo che *le (I′) e (II) sono, sotto la forma più semplice, le equazioni alle derivate parziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni;* le equazioni del tipo (I′) sono in numero di $(n-1)(n-2)$; nel tipo (II) basta scegliere quelle, in numero di $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$, che si ottengono ponendo per λ, μ, ν le sole combinazioni dei numeri $1, 2, \ldots, n-1$. Così si hanno in tutto le richieste equazioni nel numero voluto, cioè

$$\frac{1}{6}\, n\,(n^2-7)+1.$$

Notiamo ancora che alle (II) si può dare una forma simmetrica ed assai notevole, eliminando da esse $z_{\lambda\lambda\mu}$ e $z_{\lambda\lambda\nu}$ per mezzo di (I′); si ottiene così:

$$\text{(III)} \quad z_{\lambda\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\nu\nu}\, z_{\mu\nu} + z_{\mu\mu\mu}\, z_{\nu\nu}\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\nu\lambda} + z_{\nu\nu\nu}\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\mu} - 3z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\nu\nu} = 0.$$

Onde si può dire che le equazioni richieste sono o le (I′) e (II), o le (I′) e (III). Sotto quest'ultima forma riesce evidente che le equazioni trovate sono tutte indipendenti fra loro: infatti ciascuna contiene una derivata (di 3° or-

dine) che non comparisce in nessuna delle rimanenti, cioè $z_{\lambda\lambda\mu}$ per le equazioni del tipo (I') e $z_{\lambda\mu\nu}$ per quelle del tipo (III).

Per lo spazio ordinario ($n=3$) le equazioni assegnate dall'Halphen sono due, l'una del tipo (I) e l'altra del tipo (I'): si guadagna però in semplicità e simmetria prendendo, come s'è detto, le due del tipo (I').

4. Se con z indichiamo la coordinata z del punto corrente sopra un'arbitraria varietà S ad $n-1$ dimensioni, le equazioni (I') e (II), ossia le loro equivalenti (I') e (III), esprimono anche le condizioni necessarie e sufficienti perchè in un punto dato di S, avente le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z$, esistano quadriche aventi con S un contatto di 3° ordine. Da ciò che precede risulta che per $n>3$ non è possibile, in generale, ottenere un tale contatto in nessun punto di S, mentre (come già notarono l'Hermite e l'Halphen), se $n=3$, ciò è possibile in un numero finito di modi. Però, se la cosa è possibile in un punto determinato di S (cioè se le precedenti equazioni sono soddisfatte in quel punto), essa è possibile in infiniti modi, poichè si ha allora un fascio di quadriche, di cui ciascuna ha con S nel punto dato un contatto di 3° ordine. Se $\sum = 0$ è una qualunque di esse, il fascio viene rappresentato, al variare di λ, dall'equazione

$$\sum + \lambda z^2 = 0.$$

Matematica. — *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

È nota l'importanza dei determinanti:

$$D(y_1, y_2 \ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & , y_2 & , \ldots y_n \\ y'_1 & , y'_2 & , \ldots y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & , y_2^{(n-1)} & , \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nello studio delle equazioni differenziali lineari.

Eguale importanza hanno, nel calcolo alle differenze finite, i determinanti:

$$V(y_1, y_2, \ldots y_n) \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \ldots & y_n \\ \Delta y_1, & \Delta y_2, \ldots & \Delta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_1, & \Delta^{n-1} y_2, \ldots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix}$$

di cui qui mi propongo di studiare le proprietà principali, a fine di servirmene per lo studio delle relazioni fra quelle forme alle differenze che il Pin-

cherle chiama *inverse* una dell'altra [1], e che, come lo stesso prof. Pincherle mi ha fatto osservare, sono, l'una rispetto all'altra, quello che, rispetto ad una data equazione lineare alle differenze, è la sua aggiunta di Lagrange.

Al fine di far meglio risaltare le analogie fra il calcolo alle differenze finite e quello infinitesimale, ho cercato che, anche nella forma, gli enunciati e le dimostrazioni si corrispondano. Ricorderò a questo proposito la memoria di Frobenius: *Ueber determinanten meherer functionen einer Variabeln* (Crelle, 77) alla quale appunto questa mia Nota può essere riferita.

1). Usando il simbolo:

$$\theta y = y + \Delta y = y(x+1),$$

si troveranno con facili riduzioni le formule:

$$(1)\qquad V(y_1, y_2 \dots y_n) = (y_1, \Delta y_2 \dots \Delta^{n-1} y_n) = (y_1, \theta y_2, \dots \theta^{n-1} y_n)$$

$$(2)\begin{cases} \Delta\,(y_1, y_2) = \theta y_1 . \Delta y_2 + y_2 . \Delta y_1 = y_1 . \Delta y_2 + \theta y_2 \cdot \Delta y_1 \\ \Delta^2(y_1, y_2) = \theta^2 y_1 . \Delta^2 y_2 + 2\,\theta \Delta y_1 . \Delta y_2 + y_2 . \Delta^2 y_1 . \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^n(y_1, y_2) = \theta^n y_1 . \Delta^n y_2 + n\theta^{n-1}\Delta y_1 \Delta^{n-1} y_2 + \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\theta^{n-2}\Delta^2 y_1 . \Delta^{n-2} y_2 + \cdots \\ \qquad \cdots + n\theta . \Delta^{n-1} y_1 . \Delta y_2 + y_2 \cdot \Delta^n y_1 . \end{cases}$$

Coll'aiuto delle quali, moltiplicando per linee, si ha:

$$\begin{vmatrix} y, \Delta y, \Delta^2 y & ,\dots, & \Delta^{n-1} y . \\ 0 \quad \theta y \quad 2\theta\Delta y & ,\dots, & (n-1)\,\theta\,\Delta^{n-2} y . \\ 0 \quad 0 \quad \theta^2 y & ,\dots, & \dfrac{(n-1)(n-2)}{1.2}\theta^2 \Delta^{n-3} y \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & ,\dots, & \theta^{n-1} y . \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_1 & , y_2 & ,\dots, y_n \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & ,\dots, \Delta y_n \\ \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 & ,\dots, \Delta^2 y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} y_1 , & \Delta^{n-1} y_2 , & \dots, \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} yy_1 & , yy_2 & ,\dots, yy_n \\ \Delta(yy_1) & , \Delta(yy_2) & ,\dots, \Delta(yy_n) \\ \Delta^2(yy_1) & , \Delta^2(yy_2) & ,\dots, \Delta^2(yy_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1}(yy_1) , & \Delta^{n-1}(yy_2) , & \dots, \Delta^{n-1}(yy_n) \end{vmatrix}$$

cioè:

$$(3)\qquad \prod_{r=0}^{n-1} \theta^r y . V(y_1 y_2 \dots y_n) = V(yy_1, yy_2, \dots yy_n)$$

[1] *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* Acc. di Bologna 1890.

che, per la (1), potremo scrivere:

$$\prod_{r=0}^{n-1} \theta^r y \,.\, (y_1 , \theta y_2 , \ldots \theta^{n-1} y_n) = (y y_1 , \theta(y y_2) , \ldots , \theta^{n-1}(y y_n))$$

Facendo $y = \frac{1}{y_1}$ si ha:

$$F(y_1 , y_2 \ldots y_n) = \prod_{r=0}^{n-1} \theta^r y_1 \,.\, F\left(\Delta \frac{y_2}{y_1} , \Delta \frac{y_3}{y_1} , \ldots \Delta \frac{y_n}{y_1}\right).$$

Si noti che:

$\Delta \frac{y_r}{y_1} = \frac{1}{y_1 \,.\, \theta y_1} F \;(y_1 , y_r)$ facendo $F(y_1 , y_r) = u_r$, avremo allora:

$$F\left(\Delta \frac{y_2}{y_1} , \Delta \frac{y_3}{y_4} , \ldots \Delta \frac{y_n}{y_1}\right) = \frac{1}{\prod_{r=0}^{n-2} \theta^r y_1 \,.\, \theta^{r+1} y_1} F(u_2 , u_3 , \ldots u_n)$$

e sostituendo:

$$F(y_1 , y_2 \ldots y_n) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{n-2} \theta^r y_1} F(u_2 , u_3 \ldots u_n) . \tag{4}$$

Sono casi particolari:

$$\begin{cases} F(y_1 , y_2 , y_3) = \frac{1}{\theta y_1} \,.\, F(u_2 , u_3) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ F(y_1 , y_2 , y_n) = \frac{1}{\theta y_1} \cdot F(u_2 , u_n) \\ F(u_2 , u_3 , \ldots u_n) = \frac{1}{\prod_{r=3}^{n-3}} \cdot F(F(u_2 , u_3) , F(u_2 , u_4) , \ldots) \end{cases}$$

Dalla combinazione di queste colla (4) si ricava:

$$F(y_1 , y_2 \ldots y_n) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{n-3} \theta^r . F(y_1 , y_r)} \cdot F(F(y_1 y_2 y_3) , F(y_1 y_2 y_4) , \ldots , F(y_1 y_2 y_n)).$$

Così continuando giungeremo in fine al teorema:

Se $u_1 , u_2 , \ldots u_\mu , v_1 , v_2 , \ldots v_\nu$ *sono funzioni della variabile* x_1 *e sia*:

$$\begin{cases} w_1 = F(u_1 , u_2 \; \ldots u_\mu , v_1) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ w_\nu = F(u_1 , u_2 , \ldots u_\mu , u_\nu) \end{cases}$$

sarà:

$$F(u_1 , u_2 , \ldots u_\mu , v_1 , v_2 , \ldots v_\nu) = \frac{F(w_1 , w_2 , \ldots w_\nu)}{\prod_{r=1}^{\nu-1} \theta^r F(u_1 , u_2 \ldots u_\mu)} \tag{5}$$

In particolare avremo:

$$F(y_1, y_2, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n, y_k, y) =$$
$$\frac{F(F(y_1, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n, y_k) \,.\, F(y_1 \dots y_{k-1}, y_k, \dots y_n, y)}{F(y_1, y_2 \dots y_{k-1}, y_{k+1} y_n)}$$

Siccome poi è

$$F(u, v) = u \,.\, \theta u \,.\, \varDelta\left(\frac{v}{u}\right),$$

così potremo scrivere:

$$(6)\quad \frac{F(y_1, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n) \,.\, F(y, y_1, \dots y_n)}{F(y_1, y_2, \dots y_n) \,.\, \theta F(y_1, y_2, \dots y_n)} = -\varDelta\left(\frac{F(y, y_1, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n)}{F(y_1, y_2, \dots y_r)}\right).$$

Si ponga:

$$(7)\quad \begin{cases} z_k = (-1)^{n+k} \dfrac{F(y_1, y_2, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n)}{F(y_1, y_2, \dots y_n)} \\ \mathrm{A}(y) = (-1)^n \dfrac{F(y, y_1, \dots y_n)}{\theta F(y_1, y_2, \dots y_n)} \\ \psi(y, z_k) = (-1)^{k-1} \dfrac{F(y, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n)}{F(y_1, y_2, \dots y_n)} \end{cases}$$

avremo:

$$(8)\qquad z_k \mathrm{A}(y) = \varDelta \,.\, \psi(y \,.\, z_k) \,.$$

In questa formula si può notare che z_k $(k = 1, 2 \dots n)$, sono i reciproci degli elementi dell'ultima linea nel determinante $F(y_1, y_2 \dots y_n)$ divisi pel determinante stesso, e che $\mathrm{A}(y)$ è proporzionale al primo membro della equazione alle differenze:

$$(y, \theta y_1, \theta^2 y_2, \dots \theta^n y_n) = 0$$

di cui $y_1, y_2 \dots y_n$ sono integrali formanti sistema fondamentale.

2. Dalla definizione delle z_k risultano le identità:

$$(9)\qquad \sum_{r=1}^{n} z_r \theta^s y_r = \begin{cases} 0 \text{ se } s < n-1 \\ 1 \text{ se } s = n-1 \end{cases}.$$

Se alla seconda di queste identità si applica la operazione θ^{-1}, alla terza la operazione θ^{-2}, ... alla u^{esima} la operazione $\theta^{-(n-1)}$, si hanno le altre:

$$\sum_{r=1}^{n} y_r \theta^{-s} z_r = \begin{cases} 0 \text{ se } s < n-1 \\ 1 \text{ se } s = n-1 \end{cases}.$$

Da cui risulta che le funzioni $y_1, y_2, \dots y_n$ sono proporzionali ai reciproci dell'ultima linea nel determinante:

$$(10)\qquad F_{-1}(z_1, z_2 \dots z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & , z_2 & , \dots, z_n \\ \theta^{-1} z_1 & , \theta^{-1} z_2 & , \dots, \theta^{-1} z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{-(n-1)} z_1 & , \theta^{-(n-1)} z_2 & , \dots, \theta^{-(n-1)} z_n \end{vmatrix}$$

Tenuto conto che per formare il determinante $V_{-1}(z_1 z_1 \dots z_n)$ si applica la operazione θ in senso inverso a quello che si fece per formare $V(y_1 y_2 \dots y_n)$, si vedrà che colle stesse norme con cui le funzioni $z_1 z_2 \dots z_n$, ed il determinante $V(z_1 \dots z_n)$ si ricavano dalle funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$; queste funzioni ed il determinante analogo $V(y_1 \dots y_n)$ si ricavano da quelle, e si concluderà che c' è reciprocità fra quei due sistemi di funzioni che potranno chiamarsi *aggiunti* l' uno dell' altro.

3. Dalle identità (9) per successiva applicazione della operazione θ e della sua inversa, usando il simbolo:

$$(11) \qquad \sum \theta^\alpha y_r \, . \, \theta^\beta z_r = s_{\alpha,\beta} \, ,$$

si ha:

$$(12) \qquad \begin{cases} s_{\alpha,\beta} = 0 \, , & \text{se } 0 \leq \alpha - \beta < n-1 \\ s_{\alpha,\beta} = 1 \, , & \text{se } \alpha - \beta = n-1 \end{cases}$$

Tenendo conto di queste relazioni e moltiplicando per linee si ha:

$$\begin{vmatrix} y_1 & ,\dots, y_k & , y_{k+1} & ,\dots, y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{k-1} y_1 & ,\dots, \theta^{k-1} y_k & , \theta^{k-1} y_{k+1} & ,\dots, \theta^{k-1} y_n \\ \theta^k y_1 & ,\dots, \theta^k y_k & , \theta^k y_{k+1} & ,\dots, \theta^k y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-1} y_1 & ,\dots, \theta^{n-1} y_k & , \theta^{n-1} y_{k+1} & ,\dots, \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & ,\dots, 0 & , 0 & ,\dots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & ,\dots, 1 & , 0 & ,\dots, 0 \\ z_1 & ,\dots, z_k & , z_{k+1} & ,\dots, z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{-(n-k-1)} z_1 & ,\dots, \theta^{-(n-k-1)} z_k & , \theta^{-(n-k-1)} z_{k+1} & ,\dots, \theta^{-(n-k-1)} z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & ,\dots, y_k & ,0,\dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{k-1} y_1 & ,\dots, \theta^{k-1} y_k & ,0,\dots 0 \\ \theta^k y_1 & ,\dots, \theta^k y_k & ,0,\dots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-1} y_1 & ,\dots, \theta^{n-1} y_k & ,1,\dots 0 \end{vmatrix}$$

ossia:

$$(13) \qquad (y_1 , \theta y_2 , \dots \theta^{n-1} y_n) \, . \, (z_{k+1} , \theta^{-1} z_{k+2} , \dots \theta^{-(n-k-1)} z_n) = (-1)^{\frac{(n-k-1)(n-k)}{2}} (y_1 , \theta y_2 , \dots \theta^{k-1} y_k).$$

Cioè: *I minori formati colle k prime linee del determinante $V(y_1, y_2 \dots y_n)$ di un sistema di funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$ sono proporzionali ai minori formati colle prime linee $n-k$ linee del determinante del sistema aggiunto.*

Simili conclusioni valgono pei minori formati colle ultime k linee.

In particolare dalla formula (13) si ha per $k = 0$:

$$(14) \qquad (y_1 \, . \, \theta y_2 \dots \theta^{n-1} y_n) \, . \, (z_1 , \theta^{-1} z_2 , \dots \theta^{-(n-1)} z_n) = 1$$

Il prodotto dei determinanti di due sistemi aggiunti è eguale all' unità.

Di quì si scorge che: *Se le funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$ sono linearmente indipendenti lo sono anche le funzioni aggiunte, e reciprocamente.*

4. È noto che se $f(u), g(v)$ sono i primi membri di equazioni differenziali lineari aggiunte l' una dell' altra, e $\psi(u, v)$ è una funzione bilineare, omogenea delle u, v, e delle loro prime $n-1$ derivate si ha la relazione identica:

$$vf(u) - u\,g(v) = \psi'(u, v).$$

Voglio ora cercare quale relazione sia a questa corrispondente nel calcolo alle differenze finite.

Si consideri perciò l' espressione:

$$(15)\ \psi(y,z) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{V}(y, y_1, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n) \cdot \mathcal{V}_{-1}(z, z_1, \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n);$$

poichè

$$\mathcal{V}_{-1}(z_1 z_2 \dots z_n) = \frac{1}{\mathcal{V}(y_1, y_2 \dots y_n)},$$

il termine generale della somma indicata al secondo membro assume il valore $\psi(y, z_k)$ per $z = z_k$, ed è nullo quando z assume uno qualunque dei valori $z_1, z_2 \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n$, così avremo formato una funzione $\psi(yz)$ che per $z = z_k$, prende il valore $\psi(y, z_k)$ dato dalle formule (7).

Quando ivi si faccia $y = y_k$, quella funzione assume il valore:

$$(16)\qquad \psi(y_k, z) = (-1)^{k-1} \frac{\mathcal{V}_{-1}(z, z_1, \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n)}{\mathcal{V}_{-1}(z_1, z_2 \dots z_n)},$$

e ponendo:

$$(17)\qquad \begin{cases} y_k = (-1)^{n+k} \dfrac{\mathcal{V}_{-1}(z_1 z_2 \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n)}{\mathcal{V}_{-1}(z_1, z_2, \dots z_n)} \\ \mathrm{A}_{-1}(z) = (=1)^n \dfrac{\mathcal{V}_{-1}(z, z_1, \dots z_n)}{\theta^{-1} . \mathcal{V}_{-1}(z_1, \dots, z_n)} \end{cases}$$

si avrà, analogamente alla (8), la relazione:

$$(18)\qquad y_k \mathrm{A}_{-1}(z) = \Delta^{-1} . \psi(y_k, z).$$

si sviluppi ora secondo gli elementi dell' ultima linea il determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & , y_1 & , \dots, y_n \\ \theta y & , \theta y_1 & , \dots, \theta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-1} y & , \theta^{n-1} y_1 & , \dots, \theta^{n-1} y_n \\ \theta^k y & , \theta^k y_1 & , \dots, \theta^k y_n \end{vmatrix}$$

per tutti i valori positivi di $k < n$, sarà identicamente:

$$\theta^k y \,.\, F(y_1, \dots y_n) - \theta^k y_1 \, F(y, y_2, \dots y_n) + \dots + (-1)^n \theta^k y_n \, F(y, \dots y_{n-1}) = 0$$

o, dividendo per $F(y_1, y_2 \dots y_n)$,

$$\theta^k y = \sum_{s=1}^{n} \theta^k y_s \,.\, \psi(y z_s) \dots (0 < k < n) . \tag{19}$$

Similmente si giungerebbe alle formule:

$$\theta^{-k} z = \sum_{s=1}^{n} \theta^{-k} z_s \,.\, \psi(y_s, z) \quad (-n < k < 0) . \tag{20}$$

Se ora si pone:

$$\psi(y, z) = \sum_{r=0}^{n-1} Y_s \, \theta^{-r} z$$

in conseguenza delle formole (19) e (20) si troveranno le relazioni:

$$\theta^k y = \sum_{r=0}^{n-1} Y_r \, s_{k,-r}$$

eliminando le quantità $1, y_1, \dots y_n$, si ha:

$$\begin{vmatrix} \psi(y, z), z & , \theta^{-1} z & , \dots, \theta^{-(n-1)} z \\ y \quad , s_{0,0} & , s_{0,-1} & , \dots, s_{0,-(n-1)} \\ \theta y \quad , s_{1,0} & , s_{1,-1} & , \dots, s_{1,-(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-1} y, s_{n-1,0} & , s_{n-1,-1} & , \dots, s_{n-1,-(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

da cui, ricordando le formule (12),

$$-\psi(y, z) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 0 & , z & , \theta^{-1} z & , \dots, \theta^{-(n-1)} z \\ y & , s_{0,0} & , s_{0,-1} & , \dots, s_{0,-(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{-(n-1)} y & , s_{n-1,0} & , s_{n-1,-1} & , \dots, s_{n-1,-(n-1)} \end{vmatrix} \tag{21}$$

La funzione $\psi(y, z)$ bilineare ed omogenea rispetto alle y, z, ed alle loro differenze finite fino all'ordine $n-1$, è in tutto simile a quella che, nel caso delle differenze infinitesime si trova nella relazione ricordata [1].

Ricordando ora che è:

$$(-1)^n A(y) =$$

$$\begin{vmatrix} y & , y_1 & , \dots y_n \\ \theta y & , \theta y_1 & , \dots \theta y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta^n y & , \theta^n y_1 & , \dots \theta^n y_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & , 0 & , \dots, 0 \\ 0 & , \theta z_1 & , \dots, \theta z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & , \theta^{-(n-2)} z_1 & , \dots, \theta^{-(n-2)} z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & , s_{0,1} & , \dots, s_{0,-(n-2)} \\ \theta y & , s_{1,1} & , \dots, s_{1,-(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta^n y & , s_{n,1} & , \dots, s_{n,-(n-1)} \end{vmatrix}$$

[1] Cfr. p. es. Frobenius, loc. cit., pag. 254.

si sviluppi secondo la prima colonna il determinante identicamente nullo:

$$\begin{vmatrix} \theta z\ , 0 & , \theta z & , z & , \dots \theta^{-(n-2} z \\ s_{0,1}\ , y & , s_{0,1} & , s_{0,0} & , \dots s_{0,-(n-2)} \\ s_{1,1}\ , \theta y & , s_{1,1} & , s_{1,0} & , \dots s_{1,-(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n,1}\ , \theta^n y & , s_{n,1} & , s_{n,0} & , \dots s_{n,-(n-2)} \end{vmatrix}$$

sarà, per le (12) e (21):

$$(-1)^n . \theta z \,.\, \mathrm{A}(y) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} s_{0.1}\, \psi(\theta y\, , \theta z) + (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}} \psi(y\, , \theta z) = 0$$

ed essendo z funzione arbitraria della x:

$$-z\,\mathrm{A}(y) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{ s_{0.1}\, \psi(\theta y\, , z) + (-1)^n\, \psi(y\, , z) \} .$$

Nello stesso modo si giunge alla formula:

$$-y\,\mathrm{A}_{-1}(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{ s_{-1.0}\, \psi(y\, , \theta^{-1} z) + (-1)^n\, \psi(y\, , z) \} ,$$

e sottraendo:

$$y\,\mathrm{A}_{-1}(z) - z\,\mathrm{A}(y) = (-1)^{\frac{n(n-2)}{2}} \{ s_{0.1}\, \psi(\theta y\, , z) - s_{1.0}\, \psi(y\, , \theta^{-1} z) \} .$$

Poichè $y_1 , y_2 , \dots y_n$ è un sistema di integrali della equazione alle differenze:

$$F(y\, , y_1\, , \dots y_n) = \sum_{r=0}^{n} a_r\, \theta^r y = 0 ,$$

si ha (formule (12)):

$$s_{0.1} = -\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \frac{F(y_1 \dots y_n)}{\theta F(y_1 \dots y_n)} \quad \text{ed} \quad s_{-1.0} = \theta^{-1} . s_{0.1} .$$

Se il determinante $F(y_1 \dots y_n)$ fosse invariante per la operazione θ, sarebbe $s_{01} = s_{-1.0} = (-1)^n$, d'onde sostituendo nella (22):

$$\text{(23)} \qquad y\,\mathrm{A}_{-1}(z) - z\,\mathrm{A}(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta \,.\, \psi(y\, , \theta^{-1} z) .$$

che è la formula cercata.

Matematica. — *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Funzioni olomorfe nel campo ellittico (estensione di un celebre teorema di Weierstrass).* Nota di ERNESTO PASCAL, presentata dal Socio CREMONA.

Matematica. — *Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens.* Nota del dott. ORAZIO TEDONE, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Elettricità. — *Sulla Isteresi dielettrica viscosa* (1). Nota di RICCARDO ARNÒ, presentata dal Socio G. FERRARIS.

Il fenomeno, da me posto in evidenza, della rotazione di un cilindro dielettrico in un campo elettrico rotante (2) ed i risultati delle mie esperienze sulla dissipazione di energia, che avviene nel dielettrico sottoposto all' azione di tale campo (3), dimostrano l' esistenza di un ritardo con cui la polarizzazione del dielettrico segue la rotazione del campo stesso.

Due specie di ritardo possono produrre la dissipazione di energia dimostrata: o un ritardo delle variazioni della costante dielettrica, per cui questa assumerebbe valori più piccoli per un campo elettrico la cui intensità va aumentando che per un campo la cui intensità va diminuendo; o un ritardo di tempo fra l' istante dell' applicazione della forza elettrica e l' istante in cui la polarizzazione del dielettrico ha raggiunto il suo valore corrispondente.

A questa seconda specie di ritardo, che viene denominata *isteresi dielettrica viscosa*, sembra essere dovuta, almeno in parte, la dissipazione di energia che avviene nei dielettrici sottoposti all' azione di un campo elettrico alternativo. Ciò risulta essenzialmente:

1° Dagli esperimenti di Northrup (4), i quali dimostrano come il valore del potere induttore specifico di un dielettrico, sotto l' influenza di un

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Museo industriale italiano in Torino.

(2) Rendiconti, fascicolo del 16 ottobre 1892.

(3) Rendiconti, fascicoli del 30 aprile e 12 novembre 1893, 18 marzo, 17 giugno e 18 novembre 1894.

(4) Philosophical Magazine, gennaio 1895.

campo elettrico ciclicamente variabile, dipenda dalla rapidità con cui si effettuano le variazioni del campo stesso.

2° Dagli esperimenti di Janet (1) e di Porter e Morris (2) sopra condensatori soggetti a rapide ed a lente oscillazioni elettriche: per un dato valore della differenza di potenziale tra le armature dei condensatori sperimentati, risulta nel primo caso che la carica è più piccola quando la differenza di potenziale è crescente che quando essa è decrescente; nel secondo caso che la carica è costante sia che quel valore della differenza di potenziale sia stato raggiunto mentre cresce o diminuisce la differenza di potenziale medesima.

3° Dagli esperimenti di Eisler (3), i quali pongono in chiaro l'influenza della frequenza di una data differenza di potenziale alternativa sulla perdita di lavoro per ciclo nel dielettrico di un condensatore, e dimostrano come tale perdita, col crescere della frequenza, dapprima cresca, poi raggiunga un massimo e quindi prenda nuovamente a diminuire.

Le esperienze, di cui intendo in questa Nota riassumere i risultati, furono intraprese con lo scopo di verificare se la dissipazione di energia nei campi elettrici rotanti, od una parte di essa, abbia ad essere attribuita, come per i campi alternativi, al fenomeno di isteresi dielettrica viscosa.

L'effetto dell'isteresi viscosa è, per un campo elettrico rotante, funzione della velocità di rotazione del campo stesso: dunque a rilevare l'esistenza di tale fenomeno basterà sottoporre il dielettrico all'azione di un campo rotante di cui si mantenga costante l'intensità e possa invece venire variata a piacimento la velocità di rotazione.

Per produrre il campo rotante io mi sono servito in queste esperienze, come già nelle altre mie precedenti, della composizione di due campi elettrici alternativi di uguale intensità, mutuamente perpendicolari e presentanti una differenza di fase di 90°, ottenuti per mezzo di una semplice corrente alternativa (4). La durata di una rotazione del campo risultante è allora uguale al periodo della corrente alternativa; e quindi, per variare la velocità di rotazione, non ebbi a far altro che variare la frequenza della corrente, mantenendo però, in tutti gli esperimenti, le intensità dei due campi componenti costanti ed uguali fra di loro.

Nella seguente tabella sono indicati i risultati delle esperienze eseguite col medesimo apparecchio descritto nelle mie Note sovracitate, in corrispondenza di due valori (0,083 e 1,818 unità elettrostatiche C. G. S.) dell'induzione elettrostatica B, sopra un cilindro cavo di carta paraffinata del peso di 2,011 grammi, dell'altezza di 26 mm. del diametro esterno di 30 mm. e della grossezza di 1 mm. Nella seconda colonna sono registrati i valori della

(1) Comptes Rendus, 20 febbraio 1893.
(2) Proceedings of the Royal Society, vol. 57.
(3) Zeitschrift für Elektrotehnik, 15 giugno 1895.
(4) Nota sovracitata: Rendiconti, fascicolo del 16 ottobre 1892, p. 285.

frequenza n della corrente alternativa e nella terza colonna le letture d in mm. fatte col cannocchiale.

N^o		n	d
I.	1	44	5,5
B = 0,083	2	22	9,5
	3	11	13,5
II.	4	44	59
B = 1,818	5	22	87
	6	11	129

La lettura d, a cui è proporzionale il lavoro in erg per ogni ciclo fatto dalle forze elettriche deviatrici, si riferisce, a seconda del valore di B in corrispondenza del quale si è sperimentato, a due sensibilità diverse dell'apparecchio.

Questi risultati dimostrano che l'energia dissipata per ogni ciclo nel cilindro dielettrico varia col variare della velocità di rotazione del campo stesso. Sembra dunque che la dissipazione di energia, o parte di essa, sia l'effetto di isteresi viscosa nel dielettrico sperimentato.

Fisica. — *Azione dei raggi Röntgen e della luce ultravioletta sulla scarica esplosiva nell'aria.* Nota dei dott. A. Sella e Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Fisica. — *Sulla riflessione dei raggi di Röntgen.* Nota del dott. R. Malagoli e C. Bonacini, presentata dal Socio Blaserna.

Queste note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Chimica. — *La Dimetilanilina in crioscopia.* Nota di G. Ampola e C. Rimatori, presentata dal Socio Paternò.

Quali solventi negli studi crioscopici sono state sperimentate molte sostanze di funzione chimica assai diversa, ma per le basi, se si eccettuano poche esperienze eseguite da Eykmann con la Naftilammina, la Difenilammina e la Paratoluidina ([1]) e talune con l'Anilina intorno alla quale ritorneremo prossimamente, non è conosciuto altro. A colmare tale lacuna abbiamo intrapreso lo studio del comportamento come solventi di diverse basi organiche, ed in questa prima Nota riferiamo i risultati ottenuti con la Dimetilanilina. La Dimetilanilina da noi adoperata ci fu fornita dalla Casa Kahlbaum di Berlino e l'abbiamo purificata distillandola a pressione ridotta e cristallizzandola frazionatamente. Il suo punto di congelazione era 1°.96 e si mantenne tale durante le nostre esperienze.

([1]) Zeits. f. phy. Ch. t. IV, pag. 497.

I. Sostanze varie.

Benzina C^6H^6. PM. = 78

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
1	0.6778	0.54	0.796	62.088	72.8
2	1.4811	1.09	0.735	57.330	78.8
3	3.2580	2.34	0.718	56.004	80.7
4	4.5624	3.22	0.705	54.990	82.2
5	6.1791	4.24	0.686	53.508	84.5
6	7.6324	5.30	0.694	54.132	83.5
7	9.3529	6.37	0.681	53.118	
8	11.9463	7.91	0.662	51.636	
9	15.1972	9.79	0.644	50.232	
10	19.0119	12.09	0.635	49.530	
11	23.2631	14.15	0.600	46.800	
12	28.1709	16.45	0.587	45.786	98.8

Tiofene C^4H^4S. PM. = 84

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
13	0.7706	0.56	0.726	60.984	79.8
14	1.5821	1.14	0.720	60.480	80.5
15	2.9034	2.04	0.702	58.968	82.6
16	4.1162	2.77	0.672	56.448	86.3
17	5.6815	3.76	0.661	55.524	87.7
18	6.8813	4.50	0.653	54.852	
19	8.4704	5.43	0.641	53.844	
20	10.1163	6.36	0.628	52.752	
21	12.0510	7.54	0.625	52.50	
22	14.4357	8.87	0.614	51.576	
23	17.1719	10.30	0.599	50,316	
24	26.8313	15.28	0.569	47.796	101.9

Toluol C^7H^8. PM. = 92

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
25	0.5448	0.32	0.587	54.004	98.8
26	1.6291	1.02	0.626	57.592	92.6
27	3.7022	2.26	0.610	56.120	95.08
28	5.9158	3.52	0.595	54.740	97.4
29	8.5262	4.96	0.581	53.452	
30	10.7517	6.11	0.568	52.252	
31	12.9138	7.18	0.555	51.060	
32	15.0523	8.32	0.552	50.784	
33	17.3453	9.34	0.538	49.496	
34	32.0953	15.79	0.491	45.172	118.1

Bensaldeide C^7H^6O. PM. = 106

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
35	1.1891	0.66	0.555	58.830	104 5
36	2.6666	1.44	0.540	57.240	107.4
37	4.7422	2.53	0.533	56.498	108.8
38	6.7251	3.54	0.526	55.756	110.2
39	8.8231	4.57	0.517	54.802	
40	10.9222	5.58	0.510	54.060	
41	12.9122	6.51	0.504	53.424	
42	16.0659	7.94	0.494	52.364	
43	19.3185	9.44	0.488	51.728	
44	21.3880	10.44	0.488	51.728	
45	29.2014	13.85	0.474	50.244	122.3

Paraxilene $C^6H^4.(CH^3)^2$. PM. = 106

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
46	0.5513	0.325	0.589	62.434	98.4
47	1.6677	0.90	0.539	57.134	107.6
48	2.9057	1.56	0.536	56.816	108.2
49	4.5639	2.44	0.534	56 604	108.6
50	6.0611	3.17	0.523	55.438	110.8
51	7.9976	4.135	0.517	54.802	
52	10.4384	5 24	0.501	53.106	
53	12.8633	6.30	0.489	51.834	
54	14.6366	6.99	0.477	50.562	
55	16.6424	7.92	0.475	50.350	
56	18.5416	8.87	0.478	50.668	
57	21.2053	9.71	5.457	48.442	
58	22.9286	10.34	0.450	47.700	
59	28.6602	12.59	0.439	46.534	132.1

Cloroformio $CHCl^3$ PM. = 119,5

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
60	0.5407	0.25	0.462	55.209	125.5
61	1.1511	0.56	0.486	58.077	119.7
62	2.4576	1 18	0.480	57.360	120.8
63	4.1555	1.985	0.477	57.001	121.5
64	6.2902	3.00	0.476	56.882	121.8
65	8.5340	3.99	0.467	55.806	
66	10.0624	4.66	0.463	55.328	
67	11.8127	5.46	0.462	55.209	
68	14.0333	6.47	0.461	55.089	
69	16.1701	7.40	0.457	54.611	
70	18.3946	8.36	0.454	54.263	
71	21.8177	9.42	0.431	51.504	134.5

Nitrobenzina $C^6H^5.NO_2$. PM. = 123

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
72	0.2768	0.16	0.578	71.094	100.3
73	0.9991	0.49	0.490	60.270	118.3
74	2.2058	1.04	0.471	57.933	123.1
75	3.9086	1.84	0.470	57.810	123.4
76	5.6612	2.68	0.473	58.179	122.6
77	8.2043	3.78	0.460	56.580	
78	10.7805	4.91	0.455	55.965	
79	13.3801	6.02	0.449	55.227	
80	16.9672	7.45	0.439	53.997	
81	20.6595	9.08	0.439	53.997	
82	31.0940	13.02	0.418	51.414	136.3

Veratrol $C^6H^4.(OCH_3)^2$ PM. = 138

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
83	0.8535	0.40	0.468	64.584	123.9
84	2.2700	1.00	0.440	60.720	131.8
85	3.3723	2.09	0.539	74.382	
86	5.9885	2.47	0.412	56.856	140.7
87	8.1399	3.28	0.402	55.476	
88	10.8736	4.29	0.394	54.372	
89	13.6478	5.28	0.386	53.268	148.2
90	16.9486	6.40	0.377	52.026	
91	20.2709	7.56	0.372	51.336	
92	24.5545	8.88	0.361	49.818	
93	29.2126	10.48	0.358	49.404	
94	35.2273	12.46	0.353	48.714	164.3

Ossalato d' etile $C^6H^{10}O^4$ PM. = 146

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
95	1.7345	1.145	0.660	96.360	
96	3.3413	1.77	0.529	77.234	
97	5.3260	2.51	0.471	68.766	
98	7.3456	3.21	0.437	63.802	
99	10.4715	4.24	0 404	58.984	143.5
100	12.9873	5.18	0.398	58.108	145.7
101	16.9747	6.42	0.379	55.334	
102	20.1207	7.28	0.361	52.706	
103	24.7321	8.72	0.352	51.398	
104	29.2547	9.80	0.334	48.764	
105	33.8840	11.14	0.328	47.888	176 8

Bromobenzina C^6H^5Br. PM. = 157

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
106	0.5758	0.215	0.373	58.561	155.4
107	1.6941	0.64	0.377	59.189	153.8
108	3.0410	1.10	0.361	56.677	160.6
109	4.5331	1.64	0.361	56.677	160.6
110	6.3250	2.27	0.358	56.206	162.01
111	8.6616	3.08	0.355	55.735	
112	11.3754	3.92	0.344	54.008	
113	15.9175	5.52	0.346	54.322	
114	19.8906	6.79	0.341	53.537	
115	23 5529	7.88	0.334	52.438	
116	32.6273	10.88	0.333	52.281	174.10

Bromotoluene C^7H^7Br. PM. = 171

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
117	0.6080	0.23	0.378	64.638	150.7
118	2.7378	0.94	0.343	58.653	169.09
119	4.8088	1.62	0.336	57.456	172.6
120	7.4810	2.54	0.339	57.969	171.09
121	10.2979	3.52	0.341	58.311	
122	12.7590	4.31	0.337	57.627	
123	14.9377	5.00	0.334	57.114	
124	18.5193	6.00	0.323	55.233	
125	26.6162	8 86	0.332	56.772	174.6

Bromuro d'etilene. $C^2H^4Br^2$.PM.=188

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
126	0.6771	0.22	0.325	61.100	179.4
127	1.7918	0.57	0.318	59.784	182.3
128	3.8186	1.09	0.285	53.580	203 5
129	5.3859	1.66	0.308	57.804	188.3
130	7.5721	2.36	0.311	58.468	186.4
131	9.5711	2.98	0.311	58.468	186.4
132	11.8935	3.64	0.306	57.528	
133	14.3974	4.36	0.302	56.776	
134	16.7756	5.02	0.298	56.024	
135	19.3004	5.72	0.296	55.648	
136	21.6973	6.34	0.246	46.248	
137	25.1052	7.48	0.297	55,836	
138	28.9705	8.49	0.293	55.084	
139	33.8735	9.60	0.283	53.204	204.9

Bromoformio $CHBr^3$ PM = 253

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
140	1 1591	0.29	0.250	63.250	232
141	2.3987	0.60	0.250	63.250	
142	4.4822	1 06	0.236	59.708	
143	6.1670	1.46	0.236	59.708	
144	8.7804	2.09	0.238	60 214	
145	12.4514	2.90	0 232	58.696	250
146	16.9115	3.94	0.232	58.696	250
147	21.1124	4.82	0.228	57.684	254.8
148	26.8130	6.23	0.232	58.696	
149	34.2629	7 86	0.229	57.937	
150	40.3887	9.12	0.225	56.925	
151	46.6552	11.00	0.235	59.455	246.8

II. Alcooli.

Alcool metilico CH^4O. PM. = 32

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
152	0.4369	0.63	1.444	46.112	40.1
153	1.1837	1.40	1.182	37.824	
154	2.2466	2.12	0.943	30.176	
155	3.5228	2.70	0.766	24.512	
156	4.7285	3.085	0.652	20.864	
157	5.7400	3.36	0.585	18.720	
158	6.8849	3.62	0.525	16.800	
159	8.7167	3.94	0.452	14.464	
160	11.5242	4.39	0.380	12.160	
161	17.3273	4.98	0.287	9.184	
162	26.4231	5.56	0.210	6.720	
163	45.1621	6.365	0 140	4.480	414.2

Alcool isobutilico $C^4H^{10}O$. PM. = 74

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
164	0.4576	0.36	0.786	58.164	73.7
165	1.1991	0.82	0.683	50.542	
166	1.9495	1.20	0.615	45.510	
167	2 6898	1.52	0.565	41.810	
168	3.9600	1.98	0.500	37.000	
169	5.3442	2.40	0.449	33.226	
170	7.9743	2.98	0.373	27.602	
171	12.0429	3.70	0.307	22.718	
172	15 9375	4.24	0.266	19.684	
173	20.5304	4.70	0.228	16 872	
174	26.4965	5.29	0.199	14.726	
175	33.4201	5.78	0.172	12.728	
176	39.5580	6.12	0.154	11.396	
177	45.7847	6.44	0.140	10.360	416.2

Trimetilcarbinol $C^4H^{10}O$. PM. = 74

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
178	0.3420	0.20	0.584	43.216	99.3
179	0.9534	0.65	0.681	50.394	
180	1.9341	1.17	0.604	44.696	
181	3.0717	1.68	0.546	40.404	
182	5.4531	2.52	0.462	34.188	
183	7.3252	3.03	0.413	30.562	
184	9.5571	3.52	0.368	27.232	
185	13.9253	4.36	0.313	23.162	
186	23.8571	5.70	0.238	17.612	
187	35.9346	6.30	0.175	12.950	
188	46.9156	6.42	0.136	10.064	426.4

Alcool benzilico C^7H^8O PM. = 108

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
189	0.6900	0.36	0.521	56.260	111.1
190	1.8824	0.88	0.467	50.436	
191	4.1005	1.74	0.424	45.792	
192	6.9815	2.64	0.378	40.824	
193	9.6211	3.355	0.348	37.584	
194	13.5760	4.28	0.315	34.020	
195	17.3074	5.06	0.292	31.536	
196	21.9481	5.94	0.270	29.160	
197	27.4477	6.98	0,254	27.432	
198	34.9599	8.22	0.235	25.380	
199	41.1066	9.56	0.232	25.056	250

Alcool caprilico $C^8H^{18}O$. PM = 130

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
200	0.4682	0.26	0.555	72.150	104.5
201	1.3222	0.655	0.495	64.350	
202	2.6539	1.14	0.429	55.770	
203	4.1681	1.66	0.398	51.740	
204	5.8522	2.17	0.370	48.100	
205	8.1277	2.82	0.346	44.980	
206	10.7222	3.46	0.322	41.860	
207	14.6036	4.32	0.295	38.350	
208	22.9034	6.02	0.262	34.060	
209	30.7558	7.39	0.240	31.200	
210	38.2192	8.545	0.223	28.990	
211	44.1497	9.58	0.211	27.430	274.8

Etere dietilico della glicerina
$C^7H^{16}O^3$. PM. = 148

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
212	0.5061	0.20	0.395	58.460	146.8
213	1.2123	0.44	0.362	53.576	
214	2.2820	0.79	0.346	51.208	
215	3.0177	1.03	0.341	50.468	
216	4.9509	1.61	0.325	48.100	
217	7.1293	2.04	0.286	42.328	
218	9.7370	2.59	0.265	39.220	
219	13.0644	3.24	0.248	36.704	
220	16.7522	3.865	0.230	34.040	
221	21.0140	4.58	0.217	32.116	
222	25.3932	5.25	0.206	30.488	
223	38.9396	7.15	0.138	27.084	
224	44.4381	8.02	0.180	26.640	
225	49 8530	8.73	0.175	25.900	
226	55.9307	9.44	0.168	24.864	
227	61.4144	10.12	0.164	24.272	353.6

III. Alcaloidi.

Piridina C^5H^5N. PM. = 79

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
228	1.6554	1.60	0.966	76.31	
229	3.3639	2.72	0.807	63.75	73.1
230	6.1911	4.52	0.730	57.67	79.4
231	8.7865	6.08	0.691	54.60	83.9
232	11.1032	7.47	0.672	53.08	
233	14.0979	9.11	0.646	51.03	
234	17.4233	10.81	0.620	48.98	
235	25.6461	14.26	0.555	43.84	104.5

Piperidina $C^5H^{11}N$. PM. = 85

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
236	1.4869	0.80	0.538	45.730	
237	2.4482	1.36	0.555	47.175	
238	3.3562	1.88	0.560	47.600	
239	4.7198	2.66	0.563	47.855	102.6
240	6.4586	3.60	0.557	47.345	104.1
241	8.3720	4.56	0.544	46.240	
242	10·4981	5.56	0.529	44.965	
243	12 7477	6.69	0.524	44.540	
244	14.9872	7.63	0.509	43.265	
245	17.5096	8.78	0.501	42.585	
246	20.3331	9.81	0.482	40.970	
247	22.0227	10.66	0.484	41.140	
248	25.4703	11.82	0.464	39.440	
249	29.2338	13.00	0.444	37.740	
250	37.2818	15.72	0.421	35.785	137.7

Anilina C^6H^5. NH_2. PM. = 93

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
251	0.5912	0 35	0.592	55.056	97.9
252	1.6738	0.98	0.585	54.405	99 1
253	2.9746	1.73	0.581	54.033	99.8
254	4.3559	2.49	0.571	53.103	101.5
255	5.9441	3.36	0.560	52.080	103.3
256	10.5570	5.61	0.531	49.383	
257	13.4042	6.86	0.512	47.616	
258	16.4155	8.18	0.498	46.314	
259	19.4332	9.34	0.480	44.640	
260	22.3230	9.66	0.432	40.176	134.2

Ortotoluidina $C^6H^4<^{NH_2}_{CH_3}$. PM. = 107

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
261	0.7690	0.46	0.598	63.986	96.9
262	2.0785	1.14	0.548	58.636	105.4
263	3.4335	1.83	0.532	56.924	109.02
264	4.8602	2.52	0.518	55.426	111.9
265	6.1924	3.16	0.513	54.891	113.06
266	8.0605	4.02	0.498	53.286	
267	9.6089	4.69	0.488	52.216	
268	12.0459	5.72	0.474	50.718	
269	14.1597	6.62	0.466	49.862	
270	18.4409	8.40	0.455	48.685	
271	24.2329	10.38	0.428	45.796	135.5

Chinolina C^9H^7N. PM. = 129

N. d'ord.	Concentrazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
272	2.5204	1.64	0.650	83 850	
273	4.9485	2.52	0.509	65.661	
274	7.6560	3.66	0.478	61.662	121.3
275	11.0482	4.88	0 441	56.889	131.5
276	14.3402	5.99	0.410	52.890	
277	18.6731	7.505	0.401	51.729	
278	24.5546	8.40	0.342	44.118	169.5

IV. Acidi.

Acido formico $CH^2\ O^2$ PM. = 46

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
279	0.6820	0.64	0.938	43.148	61.8
280	2.3057	1.64	0.712	32.752	75.4
281	3.4376	2.08	0.605	27.830	
282	4.5992	2.40	0.521	23.966	111.1
283	6.2383	2.71	0.434	19.964	133.5
284	9.0818	3.00	0.330	15.180	
285	12.3242	3.26	0.264	12.144	
286	16.9684	3.56	0.209	9.614	
287	22.2210	3.90	0.175	8.050	
288	36.6946	5.44	0.148	6.808	
289	54.3942	8.52	0.156	7.176	371,7

Acido isobutirrico $C^4H^8O^2$. PM. = 88

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
290	0.5161	0.29	0.562	49.456	103.3
291	1.3053	0.68	0.520	45.760	111.3
292	2.8353	1.41	0.496	43.648	115.8
293	5.2495	2.44	0.464	40.832	124.7
294	7.2654	3.24	0.445	39.160	
295	11.9448	4.94	0.413	36.344	
296	17.3056	6.64	0.383	33.704	148.3
297	24.9954	8.95	0.350	30.800	
298	28.8489	9.93	0.334	30.272	
299	38.5372	12.80	0.332	29.216	144.6

Acido valerianico $C^5H^{10}O^2$.PM. = 102

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
300	0.4886	0 69	1.412	144.024	41.07
301	1.1242	1.03	0.916	93.432	
302	2.1963	1.49	0.678	69.156	
303	3.8688	2.18	0.563	57 426	103.01
304	6.2003	3.04	0.490	49.970	118.3
305	9.1003	4.02	0.441	44.982	131.5
306	12.6977	5.11	0.402	41.004	
307	23.2470	8.20	0.352	35 904	
308	27.8196	9.40	0.337	34.374	
309	33.6953	10.94	0 324	33.048	175,8

V. Fenoli.

Fenol C^6H^6O. PM. = 94

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
310	0.4558	0.27	0.592	55.648	97.9
311	0.6875	0.39	0.567	53.298	
312	1.4647	0.82	0.559	52.546	
313	2.5261	1.40	0.554	52.076	
314	4.8854	2.62	0.536	50.384	
315	5.8919	3 18	0.539	50.666	
316	7.4800	4.01	0.536	50.384	
317	8.1695	4.34	0.531	49.914	
318	8.4653	4.44	0.524	49.256	
319	10.9329	5.55	0.507	47.658	
320	14.8562	7.31	0.492	46.248	
321	19.4422	9.24	0.475	44.650	122.1

Cresol $C^6H^4 < {CH^3 \atop OH}$. PM. = 108

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
322	0.4129	0.17	0.411	44.388	141.1
323	1.3670	0.68	0.497	53.676	116.7
324	2.2547	1.14	0.505	54.540	114.8
325	3.4055	1.66	0.487	52.596	119.5
326	5.0822	2.40	0.472	50.976	122.8
327	6.7350	3.10	0.460	49.680	
328	9.3582	4.20	0.448	48.384	
329	11.5576	5.06	0.437	47.196	
330	16.1563	6.96	0.430	46.440	
331	21.6427	9.02	0.416	44.928	
332	30.1969	12.30	0.407	43.956	
333	35.1759	14.19	0.403	43.524	143.9

Timol $C^{10}H^{14}O$. PM. = 150

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
334	0.5157	0.20	0.387	58.050	149.8
335	1.6516	0.63	0.381	57.150	
336	3.1518	1.22	0.387	58.000	149.8
337	5.2939	2.015	0.380	57.000	
338	5.4451	2.10	0.385	57.750	150.6
339	7.4102	2.79	0.376	56.400	
340	8.5724	3.28	0.382	57.300	
341	10.9192	4.11	0.376	56.400	
342	14.1370	5.22	0.369	55.350	
343	15.7345	5.58	0.354	53.100	
344	16.3180	5.98	0.366	54.900	
345	20.2292	7.61	0.376	56.400	154.2

Carvacrol $C^{10}H^{14}O$. PM. = 150

N. d'ord.	Concen-trazione	Abbass. termom.	Coeffic. d'abbass.	Abbass. molecolare	Peso molecol.
346	0.4695	0.18	0.383	57.450	151.4
347	1.9366	0.76	0.392	58.800	147,9
348	3.9620	1.51	0.381	57.150	152.2
349	5.9228	3.16	0.364	54.600	159.3
350	8.3975	3.02	0.359	53 850	161.5
351	10.7922	3.88	0.359	53.850	
352	13.2314	4.72	0.356	53.400	
353	16.8280	5.92	0.351	52.650	
354	19.7228	6.88	0.348	52.200	
355	22.1505	7.61	0.343	51.450	
356	24.5466	8.32	0.338	50.700	
357	27.4617	9.30	0.338	50.700	171.5

Dalle esperienze che precedono si deduce prima di tutto che i corpi di varia funzione chimica si comportano nella Dimetilanilina in modo abbastanza regolare. In generale può dirsi che la Dimetilanilina come solvente ha un comportamento molto vicino a quello degli idrocarburi e dei loro prodotti di sostituzione. Ed invero:

1° L' abbassamento molecolare degli alcooli, che è molto prossimo al normale per soluzioni diluite, diminuisce rapidamente col crescere della concentrazione, tanto che per l' alcool metilico si riduce a meno di 7 per una concentrazione di circa il 26 % e per lo stesso alcool benzilico scende a 25 per una soluzione al 34 %.

2° Il fenol ordinario ed il p. cresol danno un abbassamento inferiore al normale che diminuisce con la concentrazione, ma molto meno rapidamente che per gli alcool. Gli altri omologhi del fenol (timol e carvacrol) può dirsi che si comportano regolarmente.

3° Per gli acidi abbiamo una notevole differenza col crescere del loro peso molecolare. L' acido formico si comporta come l' alcool metilico, ma per i suoi omologhi il fenomeno è molto meno marcato. Del resto per quanto la Dimetilanilina sia una base debole, non è esclusa in questo caso la formazione di sali che alteri il fenomeno.

4° Gli alcaloidi si comportano abbastanza regolarmente.

5° Per tutte le altre sostanze (idrocarburi, etere, aldeidi) si osserva che in soluzioni diluite l' abbassamento molecolare è ordinariamente superiore al normale, e che per quelle molto concentrate può divenire notevolmente inferiore, come del resto avviene per quasi tutte le sostanze in tutti i solventi.

Scegliendo fra le nostre esperienze quelle relative a sostanze che hanno un comportamento più regolare, e limitandoci ai dati forniti da soluzioni nè molto diluite, nè molto concentrate, si hanno le seguenti medie;

Benzina (1. 2. 3. 4.)	57. 727
Tiofene (1. 2. 3. 4.)	59. 220
Toluol (2. 3.)	56. 856
Benzaldeide (1. 2. 3.)	57. 522
Paraxilene (2. 3. 4.)	56. 851
Cloroformio (2. 3. 4. 5.)	57. 327
Nitrobenzina (2. 3. 4. 5.)	58. 548
Veratrol (1. 2. 4.)	60. 720
Bromobenzina (2. 3. 4. 5. 6.)	56. 896
Bromotoluene (2. 3. 4.)	58. 026
Bromuro d' etilene (2. 4. 5. 6)	58. 631
Di cui la media è	58. 02.

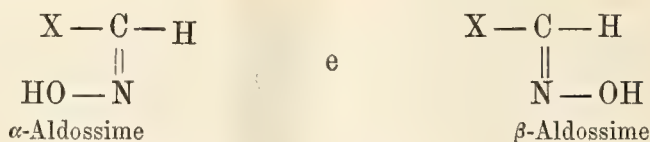
Non essendo noto il calore latente di fusione della Dimetilanilina, non abbiamo potuto calcolare con la formola di van' t Hoff la costante dell' abbassamento molecolare e noi crediamo che si possa adottare il numero 58.

Con la regola di Raoult si calcola 75. 02.

Chimica. — *Nuove ricerche sulla trasformazione delle α-aldossime in nitrili* [1]. Nota di G. Minunni e D. Vassallo, presentata dal Socio Paternò.

Le belle ricerche di A. Hantzsch [2] hanno, come è noto, dimostrato che i derivati acetilici delle β-ossime per azione dei carbonati alcalini si sdoppiano nettamente, già a temperatura ordinaria, in acido acetico e nitrili, e che le α-acetilossime isomere nelle stesse condizioni non forniscono nitrili, ma rigenerano semplicemente le α-ossime. Questi fatti sono di grande importanza, perchè furono logicamente considerati come una prova dell'esattezza delle formole stereochimiche

$$\begin{array}{c} X - C - H \\ \| \\ HO - N \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{c} X - C - H \\ \| \\ N - OH \end{array}$$

α-Aldossime β-Aldossime

che, secondo la teoria di Hantzsch e Werner, competono alle aldossime isomere.

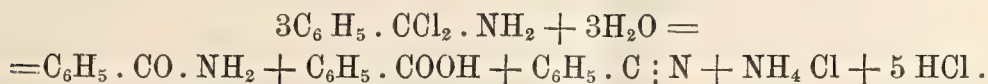
La trasformazione delle α-ossime in nitrili fu effettuata molti anni addietro da Lach [3], il quale ottenne benzonitrile riscaldando l'α-benzaldossima da sola, oppure in presenza di anidride acetica. Ma in queste reazioni, come fece giustamente osservare Hantzsch, è possibile che per l'azione del calore l'α-benzaldossima si trasformi dapprima nell'isomero β, e che questo in una seconda fase fornisca il nitrile.

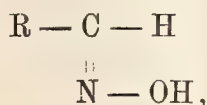
Esperienze descritte da uno di noi in una Memoria pubblicata nella « Gazzetta chimica italiana » (t. XXII, II, 174 e 191) hanno però dimostrato, come si possa ottenere il nitrile da un' α-ossima, operando a temperatura ordinaria ed in condizioni, in cui la trasformazione dell'α-ossima nel suo isomero non sembra possibile. Risulta da quelle esperienze, che l' α-benzoilbenzaldossima, trattata in soluzione eterea con acido cloridrico gassoso secco a temperatura ordinaria, si sdoppia quantitativamente in benzonitrile ed acido benzoico, e che risultato analogo si ottiene, sottoponendo allo stesso trattamento l'α-acetilbenzaldossima. Fu inoltre osservato, che lasciando in riposo per molti giorni in tubi chiusi a temperatura ordinaria una soluzione eterea di α-acetilbenzaldossima saturata a —10° con acido cloridrico gassoso secco, si forma, per azione dell' idracido sul benzonitrile proveniente dallo sdoppiamento dell' acetilossima, il prodotto di addizione

$$C_6H_5 . CCl_2 . NH_2 ,$$

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Palermo.
[2] Berichte, 24, 13 e 36.
[3] Berichte, 17, 1571.

che trattato con acqua fornisce acido benzoico, benzammide e benzonitrile, secondo l'equazione seguente:

$$3C_6H_5 . CCl_2 . NH_2 + 3H_2O =$$
$$= C_6H_5 . CO . NH_2 + C_6H_5 . COOH + C_6H_5 . C \vdots N + NH_4Cl + 5 HCl .$$

In base a questi fatti uno di noi ([1]) sollevò dei dubbî sull'esattezza delle formole geometriche attribuite alle ossime isomere da Hantzsch e Werner. Secondo la teoria di questi chimici l'eliminazione dell'acqua e la trasformazione diretta in nitrile è possibile soltanto nelle β-ossime

$$\begin{array}{c} R - C - H \\ \parallel \\ \quad\; N - OH , \end{array}$$

in cui l'idrogeno e l'ossidrile si trovano in posizione corrispondente ([2]). Ma nelle reazioni studiate da uno di noi il benzonitrile si forma, secondo il nostro modo di vedere, direttamente dai derivati dell'α-benzaldossima.

La possibilità che questi corpi, prima di reagire, si trasformino in derivati della β-ossima è, secondo noi, inammissibile, perchè si opera non solo a bassa temperatura, ma anche in presenza di acido cloridrico, che ha, come è noto, la proprietà di trasformare i derivati acetilici e benzoilici delle β-ossime in quelli delle α-ossime.

Così trattando la β-benzaldossima con cloruro di benzoile, oppure con cloruro di acetile, si ottengono i derivati dell'α-benzaldossima; trattando con acido cloridrico gassoso l'acetil-β-benzaldossima già formata (ottenuta con anidride acetica), avviene istantaneamente la trasformazione in acetil-α-benzaldossima.

Ci è sembrato opportuno studiare l'azione dell'acido cloridrico sui derivati benzoilici di altre α-aldossime, seguendo il metodo indicato da uno di noi, saturando cioè la soluzione eterea del derivato con acido cloridrico gassoso a — 10°, e lasciando la massa per alcuni giorni a temperatura ordinaria. I derivati benzoilici furono preparati trattando l'α-ossima con cloruro di benzoile in soluzione eterea a temperatura ordinaria ([3]).

I fatti da noi osservati sono i seguenti:

I. La *benzoil-α-m-nitrobenzaldossima* (p. di f. 161°) preparata secondo le indicazioni di Minunni e Corselli ([4]) si sdoppia per l'azione dell'acido cloridrico in acido benzoico e m-nitrobenzonitrile fusibile a 117°.

([1]) Gazz. chim. ital., t. XXII, II, 191.

([2]) Berichte, 23, 26.

([3]) La descrizione particolareggiata delle esperienze eseguite si trova, unitamente ai dati analitici, in una nota, che verrà pubblicata quanto prima nella « Gazzetta chimica italiana ».

([4]) Gazz. chim. ital., t. XXII, II, 171.

II. La *benzoil-α-cuminaldossima*, che dall'alcool bollente cristallizza in aghi bianchi fusibili a 125-126°, fornisce allo sdoppiamento acido benzoico e cumonitrile bollente a 239-241°.

III. Dalla *benzoil-α-anisaldossima* (p. di f. 109-110°) già preparata da Minunni e Corselli si ebbe il nitrile anisico fusibile a 59-60°.

IV. La *benzoil-α-salicilaldossima* cristallizza dall'alcool acquoso bollente in aghi bianchi fusibili a 114,5-115°. Con l' acido cloridrico si comporta in modo analogo, perchè fornisce acido benzoico e salicilonitrile fusibile a 97-98°.

V. Il miscuglio di α- e β-furfuraldossima (p. di f. 45-65°) che secondo Goldschmidt e Zanoli (1) si ottiene trattando il furfurolo con una soluzione alcalina di idrossilammina, fornisce con cloruro di benzoile un composto unico che ha la composizione del derivato benzoilico della furfuraldossima, e che fonde a 138-138,5°. Questo composto, che, in base a quanto si sa sull'azione dei cloruri acidi sulle β-aldossime, deve essere considerato come il derivato dell'α-furfuraldossima, si sdoppia per l'azione dell'acido cloridrico in furfuronitrile (p. di f. 145°) e acido benzoico.

VI. Il derivato benzoilico della propilaldossima è un olio denso, giallognolo che non cristallizza nè per lungo riposo, nè per raffreddamento con sale e neve. Trattato con acido cloridrico gassoso in soluzione eterea fornisce propionitrile (p. di eb. 97-98°), acido benzoico e tracce di una sostanza cristallina fusibile verso 160° con decomposizione.

Questi fatti dimostrano, che lo sdoppiamento dei derivati acidi delle α-ossime in acido organico e nitrile per azione dell'acido cloridrico secco a temperatura ordinaria è una reazione generale che può essere rappresentata con la seguente equazione:

$$R.CH:NO.CO.R = R.C\vdots N + R.COOH.$$

In base ai risultati delle nostre esperienze si può perciò affermare, che tanto dalle α-, quanto dalle β- ossime si possono ottenere nitrili a *temperatura ordinaria*. Differente è soltanto il mezzo, con cui si riesce ad effettuare questa trasformazione, e cioè per i derivati (acetilici o benzoilici) della serie α impiegando l'acido cloridrico secco, per quelli della serie β i carbonati alcalini. Per conseguenza la trasformazione in nitrile non potrà più considerarsi, a nostro modo di vedere, come un metodo per determinare la configurazione delle aldossime, neppure nel caso, in cui si riuscisse a conciliare le formole stereochimiche attribuite da Hantzsch e Werner alle aldossime coi fatti da noi osservati, secondo i quali anche le α- ossime possono fornire nitrili senza trasformarsi prima negli isomeri della serie β.

(1) Berichte, 25, 2573.

Chimica. — *Sui cementi idraulici — Fusioni al forno elettrico.* Note di G. ODDO, presentate dal Socio CANNIZZARO.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisiologia. — *La respirazione dell'uomo sul Monte Rosa. Eliminazione dell'acido carbonico a grandi altezze.* Nota del prof. UGOLINO MOSSO, presentata dal Socio ANGELO MOSSO.

Ho studiato l'eliminazione dell'acido carbonico alle seguenti altezze sul livello del mare:

Torino, nell'Istituto di fisiologia	metri	276
Gressoney la Trinité	"	1627
Alpe Indra sulla strada del Monte Rosa	"	2515
Accampamento Regina Margherita presso la capanna Linty	"	3047
Capanna Gnifetti	"	3620
Capanna Regina Margherita	"	4560
Camera pneumatica dell'Istituto fisiologico	"	7400.

Queste esperienze le feci seguendo la spedizione di mio fratello al Monte Rosa dal luglio all'agosto 1894. Le persone sulle quali eseguii i miei studî erano soldati alpini, cioè: il caporale Jachini d'anni 22, del peso di kgr. 71,120, della statura di m. 1,75; il soldato Solferino d'anni 22, del peso di kgr. 63,910, della statura di m. 1,71; il soldato Sarteur d'anni 22, del peso di kgr. 64,820, della statura di m. 1,73. Mi servii dell'apparecchio che ho descritto nella Nota precedente [1].

Ho preso la precauzione di fare le esperienze nei giorni di riposo, possibilmente sempre alla stessa ora e così lontano dal pasto che si potesse trascurare l'influenza della digestione. Ho seguito lo stesso metodo che ho descritto nella Nota antecedente, e qui per brevità riferisco, sotto forma di tabelle, le esperienze fatte in ciascuna delle località dove ci siamo fermati. Le medie ottenute per mezz'ora nelle determinazioni fatte a Torino sono le seguenti:

Caporale Jachini	aria inspirata	litri	270,	CO^2	dell'aria espirata	gr.	16,1
Soldato Solferino	"	"	205	"	"	"	12,6
Soldato Sarteur	"	"	200	"	"	"	12,5.

[1] Ugolino Mosso, *Apparecchio portatile per determinare l'acido carbonico nell'aria espirata dall'uomo.* Rendiconti della R.Accad. dei Lincei, 1896, 1° sem., fasc. 5°, pag. 221.

La prima tappa è stata Gressoney la Trinité (m. 1627) dove arrivammo il 18 del mese di luglio. I soldati erano accampati all' aperto e le esperienze si facevano sotto una tenda militare.

I. Esperienze fatte a Gressoney la Trinité a 1627 metri.

	Numero d'ordine	Data	Ore	Temperatura ambiente	Pressione barometrica	Litri di aria inspirata in mezz'ora	Grammi di CO^2 eliminati in mezz'ora	Grammi di CO^2	
								per Kgr. e per ora	contenuti in un litro di aria
Jachini	1	21 VII	9,25	17°	65 cm.	261,075	15,423	0,434	0,059
Jachini	2	21 »	14,4	18	»	285,010	17,036	0,479	0,059
Solferino	3	22 »	15	21	»	206,223	11,998	0,375	0,053
Sarteur	4	23 »	15	25	»	207,983	13,003	0,400	0,062
Sarteur	5	24 »	13,30	26	»	177,203	9,224	0,284	0,052
Solferino	6	24 »	15,55	24	»	289,633	18,380	0,574	0,063

Il giorno 25 luglio la spedizione lasciò Gressoney e si accampò sotto tende in una località denominata Alpe Indra (m. 2515), posta in un piano fiancheggiato da tre parti da montagne, ed ai piedi del ghiacciaio che ha lo stesso nome. Il giorno successivo incominciarono le esperienze.

II. Esperienze fatte all' Alpe Indra a 2515 metri.

	Numero d'ordine	Data	Ore	Temperatura ambiente	Pressione barometrica	Litri di aria inspirata in mezz'ora	Grammi di CO^2 eliminati in mezz'ora	Grammi di CO^2	
								per Kgr. e per ora	contenuti in un litro di aria
Jachini	7	26 VII	10,45	15°	62 cm.	290,405	17,676	0,497	0,061
Solferino	8	26 »	16,30	16	»	208,561	12,383	0,386	0,059
Solferino	9	29 »	9,35	10	»	240,421	9,528	0,298	0,039
Sarteur	10	29 »	10,50	10	»	174,990	9,965	0,306	0,057
Jachini	11	29 »	14,16	12	»	283,126	17,563	0,494	0,062

Il giorno 30 luglio, continuando a salire, ci siamo attendati a 3047 m., poco distanti dalla capanna Linty, in un piano che ha servito di accampamento a S. M. la Regina Margherita nelle sue escursioni al Monte Rosa.

III. Esperienze fatte all' accampamento Regina Margherita a 3047 metri.

	Numero d'ordine	Data	Ore	Temperatura ambiente	Pressione barometrica	Litri di aria inspirata in mezz'ora	Grammi di CO^2 eliminati in mezz'ora	Grammi di CO^2	
								per Kgr. e per ora	contenuti in un litro di aria
Jachini	12	1 VIII	14,30	15°	51 cm.	243,898	13,926	0,388	0,053
Solferino	13	2 »	15,39	13	»	303,660	16,483	0,515	0,054
Sarteur	14	3 »	15	12	»	220,354	12,601	0,392	0,057

A quest' altezza, benchè l' aria sia rarefatta di circa un terzo, non si osservò alcun fatto nella funzione respiratoria che possa riferirsi al male di montagna.

Il 5 agosto ci traslocammo nella capanna Gnifetti (m. 3620). Questa è circondata da ogni parte da ghiacciai; a nord s' innalza un contrafforte che la ripara dai venti. La Direzione del Club alpino italiano aveva concesso alla spedizione l' uso della piccola capanna che è vicino alla grande. Le esperienze vennero fatte in questa capanna.

IV. Esperienze fatte alla capanna Gnifetti a 3620 metri.

	Numero d'ordine	Data	Ore	Temperatura ambiente	Pressione barometrica	Litri di aria inspirata in mezz'ora	Grammi di CO^2 eliminati in mezz'ora	Grammi di CO^2	
								per Kgr. e per ora	contenuti in un litro di aria
Jachini	15	7 VIII	14,20	10°	48 cm.	231,649	14,388	0,405	0,062
Solferino.	16	7 »	16,20	5	»	231,866	16,597	0,518	0,071
Sarteur	17	8 »	17,25	7	»	218,828	11,216	0,345	0,051

Comparvero a questa altezza i primi sintomi di un' alterazione nella funzione del respiro; infatti la mia respirazione durante il sonno e qualche volta durante la veglia assumeva una forma decisamente periodica. Anche in altre persone si manifestarono nella capanna Gnifetti dei disturbi respiratorî specialmente nel sonno. Nessuna modificazione osservai nei soldati.

Il giorno 8 la nostra spedizione incominciò a traslocarsi nella capanna Regina Margherita a 4560 metri. Quivi giunti e ristabilitici dalla faticosa ascensione, siamo restati dieci giorni. In principio abbiamo sofferto qual più qual meno. La respirazione periodica era in me così marcata, che non potevo dormire a lungo durante la notte, perchè mi svegliavano le profonde inspirazioni che di quando in quando dovevo fare. Anche durante il giorno respiravo a periodi, ed il respiro diveniva penoso quando, non distratto da occupazioni, vi badavo. I soldati alpini furono quelli che meno sentirono l' influenza dell' aria rarefatta; in essi la respirazione periodica compariva distinta solamente durante la notte e non sempre nè in tutti. Ma anche coloro che sono abituati a quell' atmosfera per il loro lungo soggiorno, come i guardiani della capanna, alpigiani sui quarant' anni, presentarono disturbi respiratorî. Le esperienze furono fatte nella stanza destinata ad osservatorio dove la temperatura oscillò fra $+7°$ e $+20°$: fuori la temperatura si mantenne sempre inferiore allo zero fra $-2°$ e $-15°$.

V. Esperienze fatte nella capanna Regina Margherita a 4560 metri.

	Numero d'ordine	Data	Ore	Temperatura ambiente	Pressione barometrica	Litri di aria inspirata in mezz'ora	Grammi di CO^2 eliminati in mezz'ora	Grammi di CO^2 per Kgr. e per ora	Grammi di CO^2 contenuti in un litro di aria
Jachini	18	12 VIII	16,28	7°	43 cm.	276,427	15,282	0,430	0,055
Jachini	19	13 »	17,30	13	»	289,296	16,096	0,454	0,055
Sarteur	20	16 »	16,35	12	»	192,065	11,284	0,347	0,058
Sarteur	21	17 »	10,25	18	»	151,830	8,698	0,268	0,057
Solferino	22	18 »	10,20	20	»	267,220	14,595	0,456	0,054
Solferino	23	18 »	13,45	19	»	259,171	12,703	0,396	0,050

Ritornati a Gressoney la Trinité (metri 1627) ho ancora fatto le seguenti serie di esperienze.

VI. Esperienze fatte a Gressoney la Trinité di ritorno dal Monte Rosa.

	Numero d'ordine	Data	Ore	Temperatura ambiente	Pressione barometrica	Litri di aria inspirata in mezz'ora	Grammi di CO^2 eliminati in mezz'ora	Grammi di CO^2 per Kgr. e per ora	Grammi di CO^2 contenuti in un litro di aria
Sarteur	24	23 VIII	10	15°	65 cm.	161,229	8,938	0,275	0,055
Jachini	25	23 »	11,20	12	»	301,973	18,411	0,518	0,060
Solferino	26	23 »	15,40	12	»	197,861	10,454	0,336	0,053

Per avere più facilmente sott' occhio i risultati delle precedenti esperienze le riassumo nella seguente tabella, riportando il peso del CO^2 eliminato in mezz' ora alle diverse altezze.

	1627 m.		2515 m.		3047 m	3620 m.	4560 m.		1627 m
Jachini . .	15,423	17,036	17,676	17,563	13,926	14,388	15,282	16,096	18,411
Solferino . .	11,998	18,380	12,383	9,528	16,483	16,597	14,595	12,703	10,454
Sarteur . . .	9,224	13,003	9,965		12,601	11,216	11,284	8,698	8,938

Appare evidente che la rarefazione non modificò gran fatto l' eliminazione del CO^2, rimanendo essa quasi la stessa che nella pianura.

Anche la quantità dell' aria respirata in mezz' ora non subì una variazione notevole, come si vede dalla seguente tabella.

	1627 m.		2515 m.		3047 m.	3620 m.	4560 m.		1627 m.
Jachini . .	261,075	285,010	290,405	283,126	243,898	231,649	276,427	289,296	301,973
Solferino . .	206,223	289,633	208,561	240,421	303,660	231,866	267,220	259,171	197,861
Sarteur . . .	207,983	177,203	174,990		220,354	218,826	192,065	151,830	161,229

Da questi dati risulta che quando si è tranquilli ed in riposo non compaiono modificazioni importanti nella eliminazione del CO^2 e nel volume del-

l'aria respirata a grandi altezze. È necessario però notare che se si passa dallo stato di quiete a quello di lavoro intenso dei muscoli, il bisogno di una respirazione più accelerata compare in modo visibile e più presto che non nei luoghi meno elevati.

Arrivato a Torino volli verificare se i medesimi risultati potevano ottenersi per rarefazioni maggiori dell'atmosfera. A tale scopo mi servii della camera pneumatica che esiste nell'Istituto fisiologico. È questa una campana cilindrica di ferro della capacità di circa 900 litri, alta m. 1,80, del diametro di m. 0,79. Una persona può stare dentro coll'apparecchio a determinazione dell'acido carbonico, che ho descritto nella precedente Nota e farlo funzionare. Una pompa aspirante, messa in movimento da un motore a gas, mantiene una corrente d'aria sufficiente alla respirazione, mentre l'aria nella campana va continuamente rarefacendosi. Però l'atmosfera nella campana può mantenersi per mezzo di una chiavetta alla pressione voluta.

Questa serie di esperienze l'ho fatta sopra di me. Io entravo nella campana al mattino ed al pomeriggio circa due ore dopo la colazione. Facevo prima una determinazione di acido carbonico per una mezz'ora alla pressione atmosferica ordinaria. Dopo un quarto d'ora incominciava la depressione nella campana. Ottenuto in circa mezz'ora il grado di rarefazione che desideravo, rimanevo in quell'atmosfera per alcuni minuti. Applicavo prima la maschera sulla faccia e respiravo attraverso le valvole. Dopo qualche minuto congiungevo le valvole col contatore e così incominciava l'esperienza. Subito dopo facevo passare l'aria espirata attraverso i tubi di barite mettendo in movimento lo schizzatoio. Dovendo lavorare manualmente e fare attenzione allo esperimento non ero nello stato di riposo completo. Da una finestra praticata nella parete della campana un aiuto leggeva dal di fuori sul contatore il valore di ogni mia respirazione.

1ª Esperienza. Il giorno 17 febbraio 1896 entro nella camera pneumatica alle ore 14,5; la pressione atmosferica è di 75 cm.; dopo 10 minuti incomincio l'esperienza. In mezz'ora respiro litri 308,528 di aria ed elimino gr. 24,595 di CO^2. La temperatura della campana era 20°. Il numero delle respirazioni passò da 9 a 12 per minuto.

2ª Esperienza. Alle ore 16 rientro nella campana ed incomincia subito la rarefazione dell'aria. Alle ore 16,25 la pressione interna è 36 cm. L'esperienza venne fatta a questa pressione che corrisponde ad un'altezza di 5950 metri. Alle ore 16,30 incomincia l'esperienza, ed in mezz'ora respiro litri 345,156 di aria ed elimino gr. 24,851 di CO^2. La temperatura della campana era 21°. Il mio polso 100 al minuto. Il numero delle respirazioni passò da 8 a 12 per minuto. Non ho sofferto, sentivo però il bisogno di respirare meglio, e finita l'esperienza l'ingresso di una maggior quantità di aria nella camera mi fece piacere.

Paragonando i risultati di queste due esperienze si vede che non vi è una variazione notevole nell'eliminazione dell'acido carbonico per la respi-

razione alla pressione ordinaria di 75 cm. e per la respirazione alla pressione di 36 cm. Il volume dell' aria respirata aumentò leggermente.

3ª *Esperienza.* Il giorno 23 febbraio 1896 entro nella camera pneumatica alle ore 9,17, la pressione ordinaria è di 74 cm. Alle ore 9,19 incomincio l'esperienza, ed in mezz'ora respiro litri 327,173 di aria ed elimino gr. 23,583 di CO^2. La temperatura della campana era 17°,5. Il numero delle respirazioni 8 a 10 al minuto.

4ª *Esperienza.* Rientro nella campana alle ore 10,10, ed alle 10,45 la pressione interna è 34 cm. di mercurio. L'esperienza venne fatta a questa depressione, che corrisponde a 6405 metri di altezza. Incomincio l'esperienza ad ore 10,51, ed in mezz'ora respiro litri 381,409 di aria ed elimino gr. 24,263 di CO^2. La temperatura della campana passò da 17° a 19°,5. Il polso era 104 al minuto. Il respiro da 10 a 15 al minuto. Non ho provato vertigini, non mi sentii male.

Anche in queste due esperienze, sebbene la depressione sia stata maggiore che nella antecedente, non si ebbe una variazione notevole nel CO^2 eliminato, aumentò solo la frequenza dei movimenti respiratorî.

Ho voluto sottopormi ad una rarefazione maggiore dell' aria.

5ª *Esperienza.* Il giorno 17 febbraio 1896 la pressione esterna è 743; dopo aver fatto un'esperienza di controllo come le anzidette, rientro nella camera alle ore 10,25, la pressione in mezz'ora raggiunge i 30 cm. di mercurio e corrisponde ad un'altezza di metri 7402. Incomincio l'esperienza alle ore 11. Ma dopo 12 minuti devo sospendere perchè non era più in stato di attendere all'esperienza e sentivo un gran bisogno di respirare. Il polso era 95 al minuto.

6ª *Esperienza.* Il giorno 22 febbraio 1896 ho voluto ripetere questa esperienza alla pressione di 30 cm. colla speranza di riuscire, ma dopo 11 minuti dacchè era incominciata, non ho più potuto continuare e non ricordo il perchè. Mi accorsi che l'intelligenza e la memoria erano diminuite, ed il sistema nervoso e muscolare non rispondevano più in modo normale, come lo provò il carattere alterato nella scrittura delle note che prendevo durante l'esperienza.

L'acido carbonico, calcolato per quel tempo che hanno durato le due esperienze e portato a 30 minuti, sarebbe di gr. 13,22 per la 5ª esperienza e di gr. 15,667 per la 6ª.

L'aria respirata per 30 minuti sarebbe stata di litri 580,812 per la 5ª esperienza e di 370,306 per la 6ª esperienza.

Alla pressione di 30 cm. si sarebbe dunque verificato una forte diminuzione nell' acido carbonico eliminato ed un aumento nell' aria respirata. Tutto questo però è comparso quando sopravvenne malessere insieme a disordini funzionali.

In base alle esperienze riferite in questa Nota, si deve ammettere che l'uomo respira sulle montagne fino all'altezza di 6400 metri un volume d'aria quasi eguale a quello che respira al livello del mare.

La rarefazione dell' aria produce una diminuzione della quantità di ossi-

geno, ma l'ossigeno contenuto nell'aria anche alla pressione atmosferica di 34 cm. è ancora sufficiente per i bisogni del sangue, e non è necessaria una maggiore attività respiratoria.

La quantità di CO^2 eliminata dall'uomo nell'aria rarefatta corrispondente ad un'altezza di 6400 metri è poco diversa da quella che esso elimina a 276 metri sul livello del mare.

Fisiologia. — *Sull'azione fisiologica di alcuni derivati della santonina.* Nota preliminare del dott. D. Lo Monaco, presentata dal Socio Luciani.

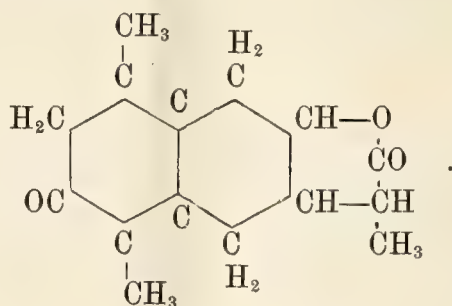
Innumerevoli sono le ricerche chimiche compiute in questo ultimo ventennio allo scopo di dimostrare la costituzione chimica della santonina. Questo campo di studî è stato principalmente battuto dalla Scuola di Chimica dell'Università di Roma diretta dall'illustre prof. Cannizzaro, il quale ha il merito di avere arricchito la scienza di uno dei capitoli più completi ed interessanti. In conseguenza questa sostanza, della quale non si conosceva che la sola formula grezza, è stata trattata con tutti i reagenti sia ossidanti che riducenti, sia fisici che chimici, fornendo così un numero straordinario di derivati, per mezzo dei quali, se da una parte si è ottenuto di decifrare varî nuclei o sezioni della molecola da utilizzarsi poi per la dimostrazione della formula di costituzione completa; dall'altra servono come esempî di parecchie nuove teorie chimiche.

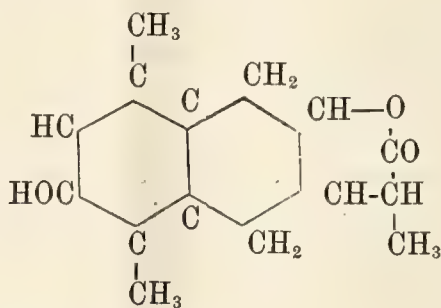
Lo studio farmacologico di tutti questi derivati o meglio dei più importanti, messo in relazione con quello della sostanza-madre (la cui azione fisiologica è ben determinata, e quella terapeutica è molto importante) merita di essere fatto; sia perchè esso può riuscire utile contributo alla dimostrazione della teoria del rapporto che esiste tra costituzione chimica e azione fisiologica, sia per le applicazioni terapeutiche utili che possono scoprirsi in qualcuno di questi nuovi corpi.

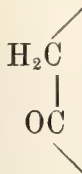
Con questo scopo noi abbiamo intrapreso questo lavoro, usufruendo dei prodotti preparati e gentilmente fornitici dall'illustre prof. Cannizzaro e dai prof. Grassi-Cristaldi e Andreocci. Prima però di riportare i risultati sperimentali ottenuti con queste sostanze, crediamo opportuno di descriverle sommariamente raggruppandole secondo l'interesse farmacologico che esse presentano.

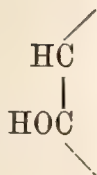
È noto che la santonina ($C_{15}H_{18}O_3$), scoperta da Kahler e Alms, i quali la estrassero dai fiori dell'Artemisia marittima che cresce nel Turkestan, si presenta in prismi incolori che però diventano gialli se esposti alla luce. Essi sono inodori e insipidi, insolubili nell'acqua fredda, e solubili nella calda

(nella proporzione di 1:300), nell' alcool, nell' etere, nel cloroformio e nelle soluzioni alcaline. Chimicamente il prof. Cannizzaro e i suoi allievi hanno dimostrato che la santonina è un derivato dell'esa-idro-naftalina con un ossigeno chetonico nel nucleo, con 2 metili in posizione para e con una catena laterale residuo dell' acido propionico connessa con legame lattonico, che si trova nell' altro anello naftalico non metilato. Restano ancora a decidere alcune particolarità della struttura di qualche parte della molecola che sono soggetto di varie ricerche in corso. Per ora schematicamente la santonina si può rappresentare con questa formula:

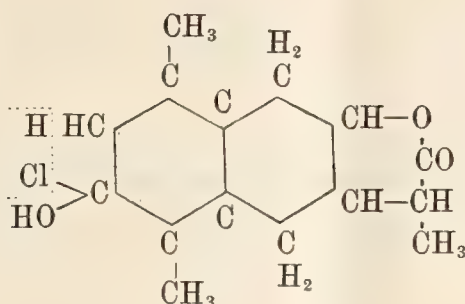
```
        CH3   H2
        |
        C     C
   H2C     C      CH—O
                   |
                   CO   .
                   |
   OC      C      CH—CH
                      |
        C     C       CH3
        |
        CH3   H2
```

Lasciando a sè per molti giorni e a temperatura ordinaria una soluzione di santonina in acido cloridrico fumante, si trasforma in un' altra sostanza che si depone lentamente cristallizzata, l' analisi elementare della quale conduce alla formula $C_{15}H_{18}O_3$. Essa è un isomero della santonina, dalla quale oltre a differire per tutti i caratteri fisici compreso il potere rotatorio essendo essa destrogira, non forma alcun composto con la fenilidrazina e con l'idrossilammina che reagiscono con l'ossigeno chetonico della molecola della santonina; ma invece dà coll' anidride acetica un acetil derivato, la qual cosa indica che questo nuovo prodotto non contiene più l'ossigeno chetonico, ma un OH fenico. La formula quindi sopra riportata si è cambiata in quest'altra:

```
        CH3
        |
        C     CH2
   HC      C       CH—O
                    |
                    CO
                    |
   HOC     C       CH-CH
                      |
        C     CH2     CH3
        |
        CH3
```

Il lato della molecola contenente

```
     /
  H2C
    |
   OC
     \
```

si è mutato per desmotropia in

$$\begin{array}{c} \diagup \\ HC \\ | \\ HOC \\ \diagdown \end{array}$$

e questo nuovo corpo è stato chiamato dal suo scopritore prof. A. Andreocci [1] desmotroposantonina [2].

È possibile, dice questi, che nella trasformazione desmotropica della santonina nel suo isomero, si addizioni prima all'ossigeno chetonico una molecola di HCl formandosi il seguente composto clorurato intermedio, che dovrebbe esistere nella soluzione cloridrica della santonina:

$$\begin{array}{ccccccc} & CH_3 & & H_2 & & & \\ & | & & & & & \\ & C & & C & & & \\ & & C & & & & \\ H\;HC & & & & & CH-O & \\ & & & & & CO & \\ \begin{matrix} Cl \\ HO \end{matrix}\!>\!C & & & & & CH-CH & \\ & & C & & & & \\ & C & & C & & CH_3 & \\ & | & & & & & \\ & CH_3 & & H_2 & & & \end{array}$$

il quale composto, a mano a mano che avviene l'eliminazione del cloro allo stato di acido cloridrico, il cui idrogeno gli vien fornito dal CH_2 vicino, si trasforma depositandosi in desmotroposantonina.

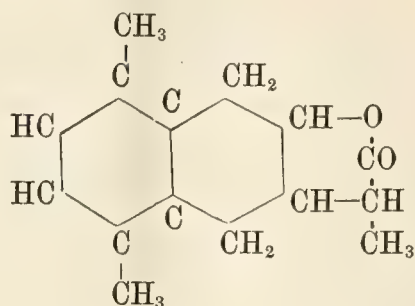
Fondendo questa sostanza con idrato potassico a 210°, il prof. Andreocci ha potuto, dopo ulteriori trattamenti, ricavare uno stereoisomero che ha chiamato iso-desmotroposantonina, la quale alla sua volta differisce dal corpo che la genera e dalla santonina per molti caratteri fisici e chimici.

Altri importanti derivati della santonina sono le due iposantonine

[1] Gazz. chim. ital., vol. XXIII, 1893, parte II, p. 469.

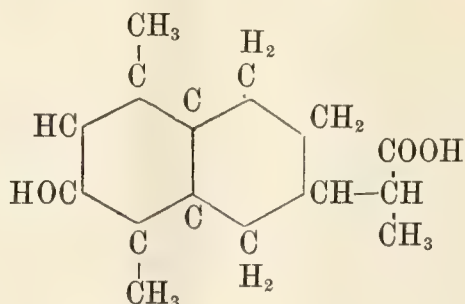
[2] Per desmotropia s'intende la proprietà che si riscontra in alcune formole di costituzione, un atomo d'idrogeno delle quali possiede una speciale mobilità potendo, col passare da un posto a un altro della molecola, formare sostanze differenti fra di loro. Per capire bene questa definizione, bisogna partire dal concetto che una formula qualsiasi di costituzione si può paragonare a una specie di edifizio in equilibrio. I corpi desmotropici sarebbero per l'appunto quelli in cui questo equilibrio si può ottenere in parecchi modi. Questa anomalia, chiamata da Laur (D. chem. G., 18, 648 e 19, 730) tautomeria, e da Jacobson (D. chem. G., 20, 1732) desmotropia, è stata notata già in parecchie sostanze come l'acido prussico, la floroglucina, l'isatina, il carvol, la santonina ecc. ecc. Essa costituisce una nuova funzione chimica, che merita di essere studiata farmacologicamente per vedere se esiste relazione tra azione fisiologica e stato desmotropico.

$C_{15}H_{18}O_2$ (iposantonina e isoiposantonina) scoperte dal prof. Grassi-Cristaldi [1] alle quali attribuì la seguente formula di costituzione:

```
          CH3
          |
          C       CH2
              C
   HC  /    \   /    \  CH—O
      |      |       |     |
      |      |       |     CO
   HC  \    /   \    /  CH—CH
              C              |
          C       CH2        CH3
          |
          CH3
```

dove non abbiamo nè l'ossigeno chetonico della santonina, nè l'OH fenico della desmotroposantonina, ma il semplice anello naftalico.

Lo studio dell'azione fisiologica delle due iposantonine e delle due desmotroposantonine paragonata a quella della santonina, costituisce la prima parte del nostro lavoro.

La seconda parte delle ricerche comprende le esperienze eseguite con i 4 acidi santonosi $C_{15}H_{20}O_3$ molto ben descritti ultimamente dal prof. Andreocci [2]. Questi acidi hanno la formula di costituzione eguale:

```
          CH3     H2
          |
          C       C
              C
    HC  /    \   /    \  CH2
       |      |       |      COOH
       |      |       |      |
   HOC  \    /   \    /  CH—CH
              C               |
          C       C           CH3
          |
          CH3     H2
```

Essi sono:

1° L'acido destro santonoso preparato per la prima volta dai prof. Cannizzaro e Carnelutti [3] per l'azione dell'acido jodidrico e del fosforo rosso sulla santonina.

2° L'acido levosantonoso ottenuto, or non è molto, dal prof. Andreocci facendo agire l'H nascente sull'isodesmotroposantonina.

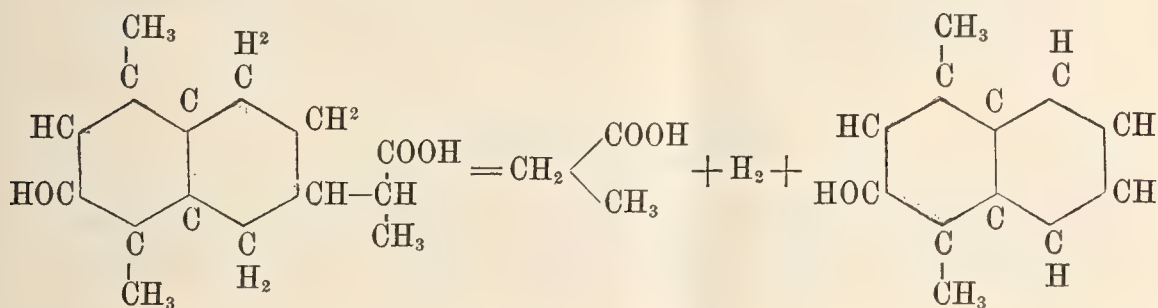
3° L'acido racemo santoso che è la riunione del 1° col 2°. Esso corrisponde all'acido isosantonoso preparato dai prof. Cannizzaro e Carnelutti nel 1882 [4].

[1] Gazz. chim. ital. XIX, 1889, pag. 382.
[2] Gazz. chim. ital. XXV, 1895, parte I.
[3] Gazz. chim. ital. XII, pag. 393.
[4] Loc. cit.

4° L'acido desmo-tropo-santonoso scoperto dal prof. Andreocci riducendo la desmotroposantonina con l'H nascente. Questo acido devia a sinistra la luce polarizzata, ma con minore intensità del levo-santonoso.

Lo studio fisiologico dell'acido racemo e del destro-santonoso è stato pubblicato dal compianto prof. Coppola ([1]). Noi, oltre a ripetere e controllare queste ricerche, siamo ora in grado di completarle prendendo in esame tutti e 4 gli acidi, e servendoci della conoscenza esatta che abbiamo ora della loro costituzione. Vedremo poi se l'azione fisiologica degli acidi santonosi somiglia a quella delle desmotroposantonine che contengono pure l'ossidrile fenico, e se essa resta influenzata dal diverso potere ratatorio; unico loro carattere differenziale.

Gli acidi santonosi per azione della potassa a forte calore si scindono in dimetilnaftolo, idrogeno e acido propionico. Ecco come avviene la reazione:

```
    CH3                                                     CH3
    |     H2                                                |      H
    C     C                                                 C      C
       C        CH2                                            C
HC              COOH           COOH              HC                  CH
                          = CH2<        + H2 +
HOC             CH—CH          CH3               HOC                 CH
       C           |                                           C
    C     C       CH3                                   C      C
    |     H2                                            |      H
    CH3                                                 CH3
```

L'azione fisiologica di questi prodotti di scomposizione è paragonabile a quella degli acidi santonosi? È questo il problema che ci siamo proposti di risolvere, e che formerà la terza parte del nostro lavoro. Abbiamo poi aggiunto altre due serie di esperienze. La prima comprende quelle eseguite sugli elminti per determinare quale influenza esercitino sulla vitalità di essi la santonina, la desmotroposantonina, l'iposantonina e alcuni altri derivati, e nello stesso tempo per investigare il meccanismo d'azione della santonina, che finora è controverso. Nella seconda serie abbiamo descritto i prodotti di eliminazione estratti, dall'urina di cani ai quali si somministrava la santonina per diverse vie, ora allo stato libero, ora in combinazione. In queste esperienze ci ha preceduto solo il Jaffé ([2]), il quale, dando questa sostanza per bocca ai cani, ha estratto un composto nuovo che ha chiamato santogenina.

([1]) Lo Sperimentale, 1887.

([2]) *Ueber das Verhalten des Santonins im thierischen Stoffwechsel.* Zeitschf. f. klin. med. XVII. H. 3 u. 4.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio G. Ferraris, a nome anche del Corrisp. Favero, relatore, legge una Relazione sulla Memoria dell'ing. N. Nicoli intitolata: *Sull'efflusso dei fluidi e specialmente dei liquidi soprariscaldati sotto forti pressioni*, concludendo col proporre l'inserzione di questo lavoro negli Atti accademici.

Il Socio Cerruti, relatore, a nome anche del Socio Beltrami, legge una Relazione sulla Memoria del dott. G. Bernardi, avente per titolo: *Estrazione abbreviata della radice cubica dei numeri*, proponendo che all'autore sia inviato un ringraziamento per la fatta comunicazione.

Le conclusioni delle Commissioni, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Brioschi dà la dolorosa notizia della morte del Corrispondente prof. Ernesto Padova, mancato ai vivi il 9 marzo 1896; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 18 luglio 1891.

Il Socio Beltrami, legge il seguente cenno necrologico del prof. E. Padova.

Ernesto Padova è stato uno dei più distinti allievi della scuola di Pisa, insegnante egregio e zelantissimo, cultore appassionato degli studî matematici, dei quali sempre amò nutrirsi largamente, anche al di là di quella già estesa cerchia cui lo legavano i suoi doveri di professore.

Pubblicò intorno a 50 lavori, alcuni dei quali di non breve mole, sopra svariati soggetti sia dell'analisi pura e delle sue applicazioni, sia della fisica matematica, sia, e massimamente, della meccanica analitica e dell'idrodinamica.

Nel primo gruppo si notano specialmente gli studî sull'integrazione delle equazioni a derivate parziali, come pure quelli sulle coordinate curvilinee e sulla geometria differenziale. In fisica matematica il Padova si occupò più specialmente di questioni attinenti alla teoria dell'elasticità, ma in questi ultimi anni molto s'interessò alle ricerche elettromagnetiche di Maxwell e di Hertz, che egli si sforzò di ricondurre sul terreno della dinamica classica. In meccanica analitica si occupò ripetutamente delle equazioni generali, si addentrò nello studio di parecchie questioni importanti, come quella della stabilità del moto e quella dei moti relativi, ed analizzò numerosi ed interessanti problemi della dinamica dei corpi rigidi. In idro-

dinamica arrecò pregevoli contributi alle due belle teorie inaugurate da Dirichlet, a quella cioè dell'ellissoide fluido, che fu argomento della lodata sua tesi d'abilitazione presso la Scuola normale di Pisa, ed a quella del moto d'un solido in un fluido indefinito, alla quale si riferisce anche uno degli ultimi opuscoli da lui dati alla luce.

Dei menzionati lavori, 12 apparvero negli Atti di questa nostra Accademia, alla quale il compianto professore molto si onorò di venire aggregato nel 1891 e dove lascia numerosi amici e colleghi, cui la sua perdita immatura ha recato vivo e profondo cordoglio.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Corrispondenti Bassani, Riccò, Segre, dal generale De Tillo, dal dott. von Wettstein, e dal Ministero della Marina.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società Geologica di Manchester; la società di scienze naturali di Emden; la R. Biblioteca di Berlino; la Biblioteca dell'Università di Strassburg; l'Osservatorio astronomico di Vienna.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

Le Università di Roma e di Pisa; la R. Accademia delle scienze di Berlino; l'I. R. Osservatorio astronomico-meteorologico di Trieste; l'Ufficio per la misura del grado di Vienna; le Università di Greifswald e di Lund.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 12 aprile 1896.

Achiardi G. d'. — Le tormaline del granito elbano. P. 2.ª Pisa, 1896. 8°.

Albert I.er P.ce de Monaco. — Sur la deuxième campagne scientifique de la « Princesse Alice ». Paris, 1895. 4°.

Arcidiacono S. — Sul terremoto del 13 aprile 1895 avvenuto in provincia di Siracusa. Roma, 1895. 4.°

Arvelo (Capitan) — Tabla estelar. Montevideo, 1896. 8.°

Bassani F. — Appunti di ittiologia fossile italiana. Napoli, 1895. 4°.

Bentivegna R. — Sul risanamento della città di Forlì (Min. Interni). Roma, 1895. 4°.

Berlese A. e *Leonardi G.* — Notizie intorno all' effetto degli insettifughi nella lotta contro la Cochylis Ambiguella. Firenze, 1896. 8°.

Bordano O. — Contributo allo studio del Bacterium Coli commune (Min. Interni). Roma, 1896. 4°.

Campanile F. e *Stromei E.* — La fosforescenza ed i raggi X nei tubi di Crookes e di Geissler. Napoli, 1896. 8°.

Carlinfanti E. — Contributo alle analisi chimico-legali del latte (Min. Interni). Roma, 1896. 4°.

Cohn F. — Nathanael Pringsheim. Berlin, 1895. 8°.

Cope E. D. — Criticism of D.r Baur's rejoinder on the homologies of the paroccipital bone &. S. l. 1896. 8°.

Id. — Reply to D.r Baur's critique on my paper on the Parrocipital bone of the Scaled Reptiles and the Systematic Position of the Pythonomorpha. S. l. 1895. 8°.

Id. — The Reptilian Order Cotylosauria. — On Plistocene Mammalia from Petite Anse, La. Philadelphia, 1896. 8°.

Corthell E. L. — The Tehuantepec route. Philadelphia, 1895. 8°.

Daday E. v. — Cypridicola parasitica Nov. Gen. Nov. Sp. Ein neues Räderthier. Budapest, 1893. 8°.

Fényi J. — Meteorologische Beobachtungen angestellt zu Boroma in Sud-Africa (Publ. Haynald-Observat. VII). Kalocsa, 1896. 4°.

Grulich O. — Katalog der Bibliothek der K. Leop.-Carol. D. Akademie der Naturforscher. Halle, 1895. 8°.

Hegyforky J. — Ueber die Windrichtung in den Ländern der Ungarischen Krone. &. Budapest, 1894. 4°.

Hibsch J. E. — Erläuterungen zur geologischen Karte des Böhmischen Mittelgebirges. Bd. I. Wien, 1896. 8°.

Lozano y Ponce de León D. — Las radiaciones de Röntgen qué son y para qué sirven. Barcelona, 1895. 8.°

Madarász J. v. — Erläuterungen zu der aus Anlass des II internationalen Ornithologen-Congresses zu Budapest veranstalteten Ausstellung der Ungarischen Vogelfauna. Budapest, 1891. 8°.

Martino E de. — Navi della R. Marina. — Acquarelli pubblicati per cura del Ministero della Marina. 16 tavole. Roma, 1892.

Mascari A. — Osservazioni sul pianeta Venere fatte negli anni 1892-93-94-95 all' Osservatorio di Catania e sul Monte Etna. Leipzig, 1895. 4°.

Id. — Sulla frequenza delle macchie solari osservate nel R. Osservatorio di Catania durante l'anno 1893. Roma, 1894. 4°.

Nádor F. — Die Characeen (Chareceae L. Cl. Richard) mit besonderer Rücksicht auf die in Ungarn beobachteten Arten. Budapest, 1893. 4°.

Pagliani L. — Circa i fatti principali riguardanti l' igiene e la sanità pubblica nel Regno nel 2° sem. 1895 (Min. Interni). Roma, 1896. 4°.

Palet y Barba D. — Estudio del terreno pliocénico de Tarrasa y de sus relaciones con las formaciones contiguas. Barcelona, 1896. 8°.

Pretto O. de. — La degradazione delle montagne e sua influenza sui ghiacciai. Roma, 1896. 8°.

Relative Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen 1892-94. Wien, 1895. 8° (*Dono del Min. della Marina austriaca*).

Riccò A. — All' Osservatorio Etneo. Catania, 1895. 8°.

Id. — Eclisse di luna del 5 settembre 1895, osservata all' Osservatorio Etneo ed in quello di Catania. Roma, 1895. 4°.

Id. — Photograph of the Nebula near 42 Orionis, made at the astrophysical Observatory to Catania. May, 1895. 8°.

Salazar A. E. &. Newmank. — Kosto komparatibo en Chile del Gas i de la Elektrizidad komo sistemas de distribuzion de enerjia Santiago. 1896. 8°.

Sanchez A. — La Cornoide. San Salvador, 1895. 8°.

Segre C. — Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche. Torino, 1896. 8°.

Tillo A. de. — Tables fondamentales du magnétisme terrestre avec Atlas. S. Pétersbourg, 1896. 4°.

Vecchi S. — Per la diffusione dei disegni axonometrici. Parma, 1893. 4°.

Wettstein R. v. — Monographie der Gattung Euphrasia. Leipsig, 1896. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 26 aprile 1896.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali multipli.* Nota del Corrispondente VITO VOLTERRA.

1. Il metodo da me dato (¹) per risolvere i problemi di inversione degl'integrali definiti semplici è suscettibile di estendersi agli integrali multipli. Una tale generalizzazione forma il soggetto della presente Nota, nella quale il problema dell'inversione viene sciolto qualunque siano il numero delle funzioni incognite e quello delle variabili indipendenti da cui esse dipendono. La risoluzione si ottiene in virtù di un procedimento con cui partendo da una funzione qualsiasi finita e continua di più variabili e mediante operazioni di quadratura, si giunge a costruire una nuova funzione pure finita e continua; la quale alla sua volta riproduce la funzione primitiva, allorchè si ripetono su essa quelle stesse operazioni che si sono eseguite sulla prima.

Mi permetto di comunicare all'Accademia il detto procedimento ed il teorema fondamentale da cui esso discende, giacchè non è a mia cognizione che siano state risolute fin qui le questioni funzionali che in tal modo vengono trattate.

2. Sia

$$S_0(x_1, x_2 \dots x_n | y_1, y_2 \dots y_n)$$

una funzione finita e continua di $2n$ variabili e si ammetta che ciascuna

(¹) Seduta del 1° marzo della R. Accademia dei Lincei. — Vedi anche gli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, sedute del 12 gennaio, 26 gennaio e 8 marzo 1896; una Nota successiva sarà presentata nella seduta del 26 aprile.

coppia di variabili x_i, y_i si mantenga compresa entro i limiti α_i, β_i, essendo $\beta_i > \alpha_i$.

Si calcolino, partendo da S_0, le funzioni

$$(1) \qquad S_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) =$$
$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, . \, S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) \, S_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n)$$

in cui $i \geq j \geq 1$. Cominciamo dal dimostrare che S_i è indipendente da j. A tal fine osserviamo che questa proposizione resulta ovviamente per $i = 1$. Supponiamola verificata per tutti i valori dell'indice inferiori ad i, e mostriamo che è vera per i.

Infatti avremo

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) \, S_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1 .. x_n | \xi_1 .. \xi_n) \int_{\xi_1}^{y_1} d\eta_1 \dots \int_{\xi_n}^{y_n} d\eta_n S_{j-h-1}(\xi_1 \dots \xi_n | \eta_1 \dots \eta_n) S_{h-1}(\eta_1 \dots \eta_n | y_1 \dots y_n)$$

ed applicando il principio di Dirichlet il secondo membro diverrà

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n S_{h-1}(\eta_1 .. \eta_n | y_1 .. y_n) \int_{x_1}^{\eta_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{\eta_n} d\xi_n S_{i-j}(x_1 .. x_n | \xi_1 .. \xi_n) S_{j-h-1}(\xi_1 .. \xi_n | \eta_1 .. \eta_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{h-1}(\eta_1 .. \eta_n | y_1 .. y_n) \, S_{i-h}(x_1 .. x_n | \eta_1 .. \eta_n)$$

il che dimostra il teorema.

Denotiamo ora con M il limite superiore dei valori assoluti di S_0; ne resulta come conseguenza che

$$(2) \qquad |S_i| \leq M^{i+1} \frac{(|y_1 - x_1|)^i}{i!} \frac{(|y_2 - x_2|)^i}{i!} \dots \frac{(|y_n - x_n|)^i}{i!}.$$

Infatti se ammettiamo soddisfatta la precedente relazione per il valore i, avremo, ponendo nella (1) $i + 1$ in luogo di i, e prendendo $j = 1$,

$$|S_{i+1}| \leq M^{i+2} \left| \int_{x_1}^{y_1} \frac{(y_1 - \xi_1)^i}{i!} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} \frac{(y_2 - \xi_2)^i}{i!} d\xi_2 \dots \int_{x_n}^{y_n} \frac{(y_n - \xi_n)^i}{i!} d\xi_n \right|$$

$$= M^{i+2} \frac{(|y_1 - x_1|)^{i+1}}{(i+1)!} \frac{(|y_2 - x_2|)^{i+1}}{(i+1)!} \dots \frac{(|y_n - x_n|)^{i+1}}{(i+1)!}$$

il che prova la proposizione.

Dalla (2) segue

$$|S_i| \leq M^{i+1} \frac{(\beta_1 - \alpha_1)^i}{i!} \frac{(\beta_2 - \alpha_2)^i}{i!} \cdots \frac{(\beta_n - \alpha_n)^i}{i!}$$

e perciò la serie

$$F_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = - \sum_0^\infty S_i (x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) \tag{3}$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione finita e continua delle variabili $x_1, x_2 \dots x_n$; $y_1, y_2 \dots y_n$.

3. Operiamo ora sulla F_0 nello stesso modo tenuto colla S_0; costruiamo cioè le funzioni

$$F_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) F_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n)$$

e formiamo la serie uniformemente convergente

$$- \sum_0^\infty F_i (x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) .$$

Dico che la sua somma sarà S_0.

Per provarlo si può seguire lo stesso metodo tenuto nella Nota citata [1] per dimostrare il teorema medesimo nel caso in cui S_0 è una funzione di due sole variabili; ma si può anche far uso di un altro procedimento come ora mostreremo.

Si ponga il coefficiente binomiale

$$\frac{m(m-1) \dots (m-i+1)}{i!} = m_i, \ (i > 0); \quad m_0 = 1$$

e cominciamo dal dimostrare che

$$F_i = (-1)^{i+1} \sum_i^\infty {}_m m_i S_m = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m m_i S_m . \tag{4}$$

Infatti questa formula è vera per $i = 0$.

Supponiamola verificata per valori dell' indice inferiori ad i e mostriamo che è vera per l' indice i. A tal fine poniamo un apice ad una qualsiasi funzione F o S, quando alle y_h si sostituiscono le ξ_h, e poniamo due apici

[1] *Sulla inversione degli integrali definiti.* Rendiconti R. Accad. dei Lincei, fasc. del 15 marzo 1896, § 2.

quando le ξ_h si sostituiscono invece alle x_h. Avremo allora, applicando le note regole pel prodotto delle serie,

$$F'_{i-j}\,F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \sum_{0\,h}^m (m-h)_{i-j}\,h_{j-1}\,S'_{m-h}\,S''_h\,,$$

e per la convergenza uniforme della serie

$$F_i = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F'_{i-j} F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \sum_0^m {}_h (m-h)_{i-j} h_{j-1} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S'_{m-h} S''_h$$

$$= (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m S_{m+1} \sum_0^m {}_h (m-h)_{i-j}\,h_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m (m+1)_i S_{m+1} = (-1)^{i+1} \sum_i^\infty {}_m m_i S_m$$

La (4) resta dunque provata. Ne segue

$$-\sum_0^\infty {}_i F_i = S_0 + \sum_1^\infty S_m\,(m_0 - m_1 + m_2 - \dots \pm m_m)\,.$$

Ma per una nota proprietà dei coefficienti binomiali

$$m_0 - m_1 + m_2 - \dots \pm m_m = 0\,,$$

onde

$$-\sum_0^\infty {}_i F_i = S_0$$

come volevasi dimostrare.

4. Riprendiamo la (3); da essa segue

$$F_0'\,S_0'' = -\sum_0^\infty {}_i S_i'\,S_0''$$

$$F_0''\,S_0' = -\sum_0^\infty {}_i S_i''\,S_0'$$

quindi per la convergenza uniforme delle serie

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_0'\,S_0'' = -\sum_0^\infty \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_i'\,S_0'' = -\sum_1^\infty S_i = F_0 + S_0$$

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_0''\,S_0' = -\sum_0^\infty \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_i''\,S_0' = -\sum_1^\infty S_i = F_0 + S_0$$

e per conseguenza

$$F_0 + S_0 = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\,F_0'\,S_0'' = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\,F_0''\,S_0'\,.$$

5. Riassumendo i diversi risultati ottenuti potremo enunciare il teorema seguente:

Posto

$$\text{(A)} \qquad F_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = -\sum_0^\infty S_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

in cui

$$S_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) S_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n);$$

se la funzione $S_0(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)$ *da cui si parte è finita e continua per valori di* x_i, y_i *compresi fra* α_i *e* β_i, *anche* $F_0(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)$ *sarà una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi entro gli stessi limiti; e avremo la formula reciproca della* (A), *cioè*

$$\text{(A')} \qquad S_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = -\sum_0^\infty F_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

in cui

$$F_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) F_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n).$$

Inoltre sussisterà la relazione

$$\text{(B)} \qquad F_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) + S_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, F_0(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) \, S_0(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, F_0(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n) \, S_0(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n).$$

6. Consideriamo una funzione finita e continua qualunque delle $2n$ variabili $x_1 \dots x_n$; $y_1 \dots y_n$ il cui simbolo sia una lettera maiuscola, per esempio H. Posto $S_0 = -H$, si calcoli la corrispondente F_0. Denoteremo nel seguito, per uniformità di notazione, la $-F_0$ colla lettera minuscola, cioè porremo

$$h = -F_0 .$$

Se H oltre essere funzione delle $2\,n$ variabili $x_1 \dots x_n$; $y_1 \dots y_n$ è funzione continua di altri m parametri $z_1, z_2 \dots z_m$; dalla precedente costruzione resulterà che anche h sarà funzione continua degli stessi parametri. Noi scriveremo

$$H = H(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n;\ z_1 \dots z_m),$$
$$h = h\,(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n;\ z_1 \dots z_m);$$

o anche più semplicemente

$$H = H(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n),$$
$$h = h(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)$$

se vorremo porre in evidenza le sole variabili di cui si tien conto nel calcolo pel passaggio dall' una all'altra funzione.

La relazione (B) mediante le H, h, si scriverà

$$(5) \qquad -H(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n) - h(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, H(x_1 \dots x_n \mid \xi_1 \dots \xi_n)\, h(\xi_1 \dots \xi_n \mid y_1 \dots y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, H(\xi_1 \dots \xi_n \mid y_1 \dots y_n)\, h(x_1 \dots x_n \mid \xi_1 \dots \xi_n).$$

7. Abbiasi ora la relazione funzionale

$$f(y_1 \dots y_n) = \varphi(y_1 \dots y_n) + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \, \varphi(x_1 \dots x_n)\, H(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)$$

in cui φ denota una funzione finita e continua.

Moltiplicando per $h(y_1 \dots y_n \mid z_1 \dots z_n)\, dy_1 \dots dy_n$ e integrando rispettivamente fra i limiti $\alpha_1,\ z_1;\ \alpha_2, z_2; \dots \alpha_n,\ z_n$, in cui $\beta_i > z_i > \alpha_i$, si otterrà

$$\int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n \, f(y_1 \dots y_n)\, h(y_1 \dots y_n \mid z_1 \dots z_n) =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n \, \varphi(y_1 \dots y_n)\, h(y_1 \dots y_n \mid z_1 \dots z_n) +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dx_n \varphi(x_1 \dots x_n) \int_{x_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{x_n}^{z_n} dy_n H(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)\, h(y_1 \dots y_n \mid z_1 \dots z_n)$$

e a cagione della (5) il secondo membro diverrà

$$= -\int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dx_n \, \varphi(x_1 \dots x_n)\, H(x_1 \dots x_n \mid z_1 \dots z_n) = \varphi(z_1 \dots z_n) - f(z_1 \dots z_n).$$

Avremo quindi

$$\varphi(z_1 \dots z_n) = f(z_1 \dots z_n) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n \, f(y_1 \dots y_n)\, h(y_1 \dots y_n \mid z_1 \dots z_n).$$

Potremo dunque enunciare il teorema:

La relazione funzionale

$$(C)\quad f(y_1 \dots y_n) = \varphi(y_1 \dots y_n) + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \, \varphi(x_1 \dots x_n) \, H(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

si inverte mediante la formola

$$(C')\quad \varphi(z_1 \dots z_n) = f(z_1 \dots z_n) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n \, f(y_1 \dots y_n) \, h(y_1 \dots y_n | z_1 \dots z_n)$$

in cui h *si calcola dalla* H *mediante le formole precedenti.*

8. Non sempre i problemi d'inversione si riducono immediatamente alla forma precedente in modo da risolverli applicando subito il procedimento indicato. Per gl' integrali semplici [1] la detta riduzione è immediata, invece la questione si presenta in modo molto complicato nel caso di integrali multipli. Per chiarire questo fatto si consideri, per esempio, il problema di determinare $\varphi(x_1, x_2)$ dalla relazione funzionale

$$(6)\qquad \theta(y_1, y_2) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \, H(x_1, x_2 | y_1, y_2).$$

Derivando la precedente espressione rapporto ad y_1 e ad y_2 otterremo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y_1 \partial y_2} = \varphi(y_1, y_2) H(y_1, y_2 | y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial H(x_1, y_2 | y_1, y_2)}{\partial y_1} dx_1$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2) \frac{\partial H(y_1, x_2 | y_1, y_2)}{\partial y_2} dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \frac{\partial^2 H(x_1, x_2 | y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}.$$

Supposto $H(y_1, y_2 | y_1, y_2) \lesseqgtr 0$, dividendo per questa funzione la relazione precedente, essa potrà scriversi sotto la forma

$$(7)\qquad f(y_1, y_2) = \varphi(y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2) \, T(x_1 | y_1 ; y_2) \, dx_1$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2) \, V(x_2 | y_2 ; y_1) \, dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \, S(x_1, x_2 | y_1, y_2)$$

che è evidentemente ben diversa dalla (C).

9. In generale, allorchè $H(y_1 \dots y_n | y_1 \dots y_n) \gtreqless 0$, la equazione funzionale

$$(8)\qquad \theta(y_1 \dots y_n) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \, \varphi(x_1 \dots x_n) \, H(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

[1] Cfr. Nota citata § 4.

condurrà, derivandola rapporto ad $y_1, y_2 \dots y_n$, e quindi dividendo per $H(y_1 \dots y_n \mid y_1 \dots y_n)$, ad una relazione in cui il primo membro è noto ed il secondo contiene la somma della funzione incognita e di integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e sotto ai quali comparisce la funzione incognita stessa. Essa avrà quindi la forma

$$(9) \qquad f(y_1 \dots y_n) = \varphi(y_1 \dots y_n)$$

$$+\sum_1^n{}_h \sum_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n}) T_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | y_{i_1} \dots y_{i_h}; y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n})$$

nella quale $i_1 \dots i_n$ denota una permutazione dei numeri $1, 2 \dots n$; con $\varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n})$ si intende la funzione $\varphi(x_1 \dots x_n)$ in cui si sono sostituite $y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n}$ al posto di $x_{i_{h+1}} \dots x_{i_n}$; e $\sum_{i_1 \dots i_h}$ indica una somma ottenuta facendo tutte le combinazioni h ad h degl' indici $1, 2, \dots n$. La f e le $T_{i_1 \dots i_h}$ che compariscono nella formola precedente sono funzioni note.

Per ricondurre la equazione funzionale (9) alla forma (C) bisognerà trasformarla in modo da far comparire nel secondo membro due soli termini, cioè il primo termine $\varphi(y_1 \dots y_n)$ ed un solo integrale multiplo.

Supponiamo per un momento che si sia riesciti a trasformare la relazione funzionale (9) in modo da eliminare nel secondo membro tutti gli integrali semplici, doppii ecc., fino a quelli d'ordine $r-1$, e quindi che la $\sum_h$ anzichè da 1 ad n sia estesa da r ad n. Essa allora sarà ridotta al tipo

$$(10) \qquad f(y_1 \dots y_n) - \varphi(y_1 \dots y_n) =$$

$$\sum_r^n{}_h \sum_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n}) T_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | y_{i_1} \dots y_{i_h}; y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n})$$

Mostriamo come, giunti a questo punto, sia possibile trasformare l' equazione funzionale in modo da eliminare gl'integrali d'ordine r.

Sia $s_1 \dots s_r$ una delle combinazioni d' ordine r degl' indici $1, 2 \dots n$, a cui nel secondo membro della equazione precedente corrisponda un integrale d' ordine r.

Si sostituisca in ambo i membri della equazione (10) $z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}$ in luogo di $y_{s_{r+1}} \dots y_{s_n}$; quindi si moltiplichino ambo i membri per

$$(11) \qquad t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) \, dy_{s_1} \dots dy_{s_r}$$

e si integri rispettivamente rapporto ad ogni y_{s_q} da α_{s_q} a z_{s_q}. Denotiamo con (D) la equazione che così si ottiene; il suo primo membro sarà

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} [f(y_{s_1} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) -$$

$$- \varphi(y_{s_1} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})] t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}).$$

Per trovarne l'espressione del secondo membro, consideriamo il termine generico del secondo membro della (10) corrispondente alla combinazione $i_1 \dots i_h$ di indici e supponiamo che g di essi, $i_1 \dots i_g$ siano rispettivamente eguali a $s_1 \dots s_g$, mentre i rimanenti $i_{g+1} \dots i_h$ siano diversi dalle $s_{g+1} \dots s_r$. Allora, dopo la moltiplicazione pel fattore (11) e le successive integrazioni, il termine stesso assumerà la forma

$$(12) \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_g}}^{z_{s_g}} dy_{s_g} \int_{\alpha_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{\alpha_{s_1}}^{y_{s_1}} dx_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_g}}^{y_{s_g}} dx_{s_g} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \dots$$

$$\dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h}, y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}} \dots z_{s_{r+v}}) .$$

$$. T_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h} | y_{s_1} \dots y_{s_g}, z_{i_{g+1}} \dots z_{i_h}; y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}} \dots z_{s_{r+v}}) .$$

$$. t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) .$$

Se noi applichiamo il principio di Dirichlet ad ogni integrale eseguito rapporto a $y_{s_1}, \dots y_{s_g}$ ed al corrispondente integrale rapporto ad $x_{s_1}, \dots x_{s_g}$, la espressione precedente potrà scriversi.

$$(12') \qquad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_g}}^{z_{s_g}} dx_{s_g} \int_{\alpha_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \dots$$

$$\dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h}, y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}} \dots z_{s_{r+v}}) L .$$

avendo posto

$$(13)\ L = \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{x_{s_g}}^{z_{s_g}} dy_{s_g} T_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h} | y_{s_1} \dots y_{s_g}, z_{i_{g+1}} \dots z_{i_h}; y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, z_{s_{r+v}})$$

$$. t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})$$

Scriviamo nella (12′) $x_{s_{g+1}}, \dots x_{s_r}$ invece di $y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}$, e chiamiamo L′ il risultato di questa sostituzione eseguita su L; la (12′) acquisterà la espressione

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h}, x_{s_{g+1}} \dots x_{s_r}, z_{s_{r+u}} \dots z_{s_{r+v}})\, \mathrm{L}'$$

nella quale la funzione incognita φ è moltiplicata per una funzione nota L′ e comparisce sotto ad un integrale multiplo d'ordine $r+h-g$ e quindi d'ordine inferiore o eguale ad n.

Dai precedenti resultati segue che il secondo membro dell'equazione (D) assumerà la forma

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \varphi(x_{s_1} \dots x_{s_r}, z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \mathrm{T}_{s_1 \dots s_r}(x_{s_1} \dots x_{s_r} | y_{s_1} \dots y_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) \cdot$$
$$\cdot\, t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) +$$
$$+ \sum_{r+1}^{n} {}_h \sum_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n})\, \mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | z_{i_1} \dots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n})$$

in cui si è scritto separatamente dapprima il solo termine nel quale φ figura sotto ad un integrale d'ordine r, mentre gli altri che vengono successivamente contengono la funzione incognita sotto ad integrali multipli i cui ordini vanno da $r+1$ ad n. Le $\mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \dots i_h}$ saranno funzioni note che si dedurranno facilmente dalle precedenti L.

Tenendo ora conto della relazione (vedi form. (5))

$$\int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \mathrm{T}_{s_1 \dots s_r}(x_{s_1} \dots x_{s_r} | y_{s_1} \dots y_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})\, t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})$$
$$= -\mathrm{T}_{s_1 \dots s_r}(x_{s_1} \dots x_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) - t_{s_1 \dots s_r}(x_{s_1} \dots x_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})$$

la equazione (D) si scriverà

$$(14) \quad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \varphi(x_{s_1}, \dots x_{s_r}, z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})\, \mathrm{T}_{s_1 \dots s_r}(x_{s_1} \dots x_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})$$
$$= -\mathrm{F}_{s_1 \dots s_r}(z_1 \dots z_n) +$$
$$+ \sum_{r+1}^{n} {}_h \sum_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n})\, \mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | z_{i_1} \dots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n})$$

in cui $F_{s_1 \dots s_r}(z_1 \dots z_n)$ è una funzione nota e precisamente

$$F_{s_1 \dots s_r}(z_1 \dots z_n) = \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} f(y_{s_1} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+1}} z_{s_n}) t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}).$$

Formiamo le equazioni analoghe alla (14) che si ottengono prendendo tutte le combinazioni $s_1 \dots s_r$ degli n indici r ad r. Sommandole, il primo membro resulterà tale che il suo valore ricavato dalla (10) assumerà la forma

$$f(z_1 \dots z_n) - \varphi(z_1 \dots z_n)$$

$$-\sum_{r+1}^{n} {}_h \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n}) T_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | z_{i_1} \dots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n})$$

e perciò, denotando con $\overset{(2)}{T}_{i_1 \dots i_h}$ delle quantità note, otterremo l' equazione

$$f(z_1 \dots z_n) + \sum\nolimits_{i_1 \dots i_r} F_{i_1 \dots i_r}(z_1 \dots z_n) = \varphi(z_1 \dots z_n)$$

$$+\sum_{r+1}^{n} {}_h \sum\nolimits_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n}) \overset{(2)}{T}_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | z_{i_1} \dots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n}).$$

L'equazione funzionale è stata dunque trasformata in modo da eliminare gl' integrali d' ordine r. Così procedendo noi potremo perciò dalla (9) eliminare successivamente gl' integrali di 1°, 2°, 3° ... ordine finchè essa non si riduca alla forma (C).

Ogni qual volta una equazione della forma (8) sarà tale che θ e H saranno finite continue e derivabili, e $H(y_1, y_2 \dots y_n \mid y_1, y_2 \dots y_n)$ sarà diversa da zero, noi potremo, col metodo indicato, ricavare la φ; supponendo naturalmente che sia $\theta = 0$ per $y_i = \alpha_i$.

10. Come esempio consideriamo il caso della equazione (6) che abbiamo ricondotto al tipo (7).

Una prima trasformazione, ottenuta eliminando gl' integrali del primo ordine, ridurrà questa equazione alla forma

$$(15)\quad f(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} t(x_1 | z_1; z_2) f(x_1, z_2) dx_1 + \int_{\alpha_2}^{z_2} v(x_2 | z_2; z_1) f(z_1, x_2) dx_2$$

$$= \varphi(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2 M(x_1, x_2 | z_1, z_2) \varphi(x_1, x_2)$$

in cui

$$M(x_1, x_2 | z_1, z_2) = S(x_1, x_2 | z_1, z_2) + t(x_1 | z_1 ; z_2) V(x_2 | z_2 ; x_1) +$$

$$+ v(x_2 | z_2 ; z_1) T(x_1 | z_1 ; x_2) + \int_{x_1}^{z_1} t(\xi_1 | z_1 ; z_2) S(x_1, x_2 | \xi_1, z_2) d\xi_1$$

$$+ \int_{x_2}^{z_2} v(\xi_2 | z_2 ; z_1) S(x_1, x_2 | z_1, \xi_2) d\xi_2 .$$

Chiamando $g(z_1, z_2)$ il primo membro della (15), dalla (C') si ricaverà finalmente

$$\varphi(z_1, z_2) = g(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2\, m(x_1, x_2 | z_1, z_2)\, g(x_1, x_2) .$$

11. Accenniamo ora brevemente al caso in cui si abbiano ν equazioni del tipo

$$(16)\quad \theta_s(y_1 ... y_n) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 ... \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \sum_1^{\nu}{}_i\, \varphi_i(x_1 ... x_n) H_{is}(x_1 ... x_n | y_1 ... y_n), \quad (s = 1, 2 ... \nu)$$

colle ν funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2 ... \varphi_\nu$. Per risolverle cominciamo dal derivarle rispetto ad $y_1, y_2 ... y_n$. Se il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11} \dots H_{1\nu} \\ . \quad . \quad . \quad . \\ H_{\nu 1} \dots H_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

in cui si sono fatte le $x_i = y_i$ è diverso da zero, potremo facilmente porre [1] la (16) sotto la forma

$$(17)\qquad f_s(y_1 ... y_n) = \varphi_s(y_1 ... y_n) + K_s, \quad (s = 1, 2 ... \nu)$$

in cui f_s è una funzione nota e K_s è una somma d'integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e che contengono linearmente le funzioni incognite. Supponendo note $\varphi_2 ... \varphi_\nu$, dalla prima delle (17) potremo ricavare φ_1 mediante il procedimento esposto superiormente. Sostituendone la espressione nelle successive $\nu - 1$ equazioni, avremo un sistema di $\nu - 1$ equazioni che conservano il tipo (17) dalle quali φ_1 è eliminata. Così procedendo per successive eliminazioni si ricondurrà la questione a risolvere una sola equazione funzionale del tipo esaminato con una sola funzione incognita.

(1) Cfr. Nota citata § 5.

Matematica. — *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

In una Nota precedente [1] ho indicate alcune delle proprietà fondamentali delle serie ordinate secondo le potenze intere negative del simbolo D, rappresentativo dell'operazione di derivazione, convenendosi di intendere con $D^{-n}\varphi(x)$ quella determinazione che è nulla dell'ordine $h+m$ per il punto $x=0$, se φ è nulla dell'ordine h in quel punto. Nel presente lavoro mi propongo di mostrare come quelle serie si prestino facilmente all'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee o, in altri termini, come esse siano atte a rappresentare l'operazione F^{-1} inversa di una forma differenziale lineare F [2].

È nota l'analogia, già ravvisata fin dal Lagrange e dal Libri, fra le equazioni differenziali lineari omogenee e le equazioni algebriche; è pure noto come benchè studiata e svolta da numerosi autori in varî sensi e per una così lunga serie di anni, essa conduca oggi ancora a risultati di grande interesse, come ne fanno fede recenti lavori dei signori Picard e Vessiot. È quindi naturale di pensare che questa analogia debba riposare su alcunchè di essenziale, ed è altrettanto naturale di cercare di estenderla, raffrontando le forme differenziali lineari coi polinomî razionali interi, poi, con un passo ulteriore, le inverse delle forme differenziali colle funzioni razionali fratte. Questo riavvicinamento, facilitato dall'impiego delle serie più sopra ricordate, non solo permette di porre in migliore luce risultati già noti, ma serve anche a dedurre nuove conseguenze, fra cui quella espressione analitica di F^{-1} che costituisce l'oggetto principale della presente Nota.

1. Abbiasi una forma differenziale lineare dell'ordine n

$$F(\varphi)=\pi_0\,D^n\varphi+\pi_1\,D^{n-1}\varphi+\cdots+\pi_{n-1}\,D\varphi+\pi_n\,\varphi \tag{1}$$

i cui coefficienti $\pi_0, \pi_1, \ldots \pi_n$ siano funzioni analitiche regolari in un intorno comune di un determinato valore della variabile x, per esempio del valore $x=0$, essendo di più π_0 differente da zero in quel intorno. Per brevità, gl'integrali dell'equazione differenziale lineare omogenea $F=0$ si diranno *integrali della forma.*

Diremo *razionalmente risolubili* quei problemi riguardanti la forma F, la cui soluzione si ottiene colle sole operazioni razionali e di derivazione

[1] *Operazioni distributive: l'integrazione successiva.* Rend. della R. Accademia dei Lincei, fasc. 7°, 1° sem., 1896.

[2] Con *forma differenziale lineare* F, s'intende, secondo il solito, il primo membro di un'equazione differenziale lineare $F=0$; è chiaro che F è simbolo di una operazione funzionale distributiva.

eseguite sui coefficienti della forma stessa, senza che sia necessario di conoscerne gl' integrali.

Dalla forma F si possono dedurre, applicando la regola di derivazione al simbolo D (come se la F fosse un polinomio razionale intero in D) le nuove forme

$$F'(\varphi) = n\pi_0 D^{n-1}\varphi + (n-1)\pi_1 D^{n-2}\varphi + \cdots + \pi_{n-1}\varphi ,$$

$$F''(\varphi) = n(n-1)\pi_0 D^{n-2}\varphi + (n-1)(n-2)\pi_1 D^{n-2}\varphi + \cdots 1.2\,\pi_{n-2}\varphi ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(\varphi) = n!\,\pi_0\,\varphi ,$$

che si diranno le *derivate funzionali* successive di F.

Con queste derivate funzionali si forma il noto sviluppo per $F(\varphi\,\psi)$:

$$(2)\qquad F(\varphi\psi) = \varphi F(\psi) + D\varphi . F'(\psi) + \frac{1}{2!} D^2\varphi . F''(\psi) + \cdots + \frac{1}{n!} D^n\varphi . F^{(n)}(\psi).$$

2. Essendo ψ una funzione incognita, φ una funzione data, la

$$F(\psi) = \varphi$$

è un' equazione differenziale non omogenea, la cui integrazione equivale alla esecuzione dell' operazione funzionale F^{-1}, inversa di F, sulla funzione φ. Questa operazione F^{-1} è a determinazione multipla: dico però che se ne può dare una determinazione unica e determinata mediante una serie della forma

$$(3)\qquad \sum \lambda_\nu D^{-\nu}\varphi ,$$

in cui le λ_ν sono funzioni analitiche determinabili *univocamente* e *razionalmente*. Di più, per ogni elemento di funzione analitica φ regolare nell' intorno di $x = 0$, la serie precedente è convergente assolutamente ed in ugual grado in un intorno di quello stesso punto e rappresenta quindi un elemento di funzione analitica regolare nell' intorno di $x = 0$.

Per giungere a questo risultato, procederemo come segue: dovendo essere

$$(4)\qquad FF^{-1} = 1 ,$$

applicheremo l' operazione F alle serie (3), ordineremo per le potenze decrescenti di D ed uguaglieremo a zero i coefficienti delle singole potenze di D (meno quello di D^0) in forza di quanto è stato dimostrato al § 8 della Nota precedente. Avremo così una successione di equazioni che varranno a determinare di mano in mano i coefficienti λ_ν; in quanto alla legittimità del procedimento, essa si dimostrerà *a posteriori* mostrando che i coefficienti λ_ν per esso ottenuti soddisfano alla condizione di convergenza (9) della precedente Nota.

3. Dalla (4) ricaviamo anzitutto che il più alto esponente del simbolo D

nello sviluppo (3) è $-n$, il che esprimeremo dicendo che quello sviluppo è dell'ordine $-n$. Posto dunque

$$F^{-1} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_\nu D^{-\nu},$$

applichiamo la F ad ambo i membri ed ordiniamo il secondo membro per le potenze decrescenti di D. Con un calcolo facile, scorgiamo che nei coefficienti si presentano in evidenza le derivate funzionali di F, essendo

$$FF^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu+1}) + \frac{1}{2!}F''(\lambda_{\nu+2}) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\lambda_{\nu+n})\right)D^{-\nu},$$

dove sono da porre uguali a zero tutte le λ con indice inferiore ad n. Avremo dunque dalla (4), per il citato teorema:

$$(5)\quad \begin{cases} \pi_0\,\lambda_n = 1 \\ \dfrac{1}{n-1!}F^{(n-1)}(\lambda_n) + \pi_0\,\lambda_{n+1} = 0 \\ \dfrac{1}{n-2!}F^{(n-2)}(\lambda_n) + \dfrac{1}{n-1!}F^{(n-1)}(\lambda_{n+1}) + \pi_0\,\lambda_{n+2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu+1}) + \cdots \dfrac{1}{n-1!}F^{(n-1)}(\lambda_{\nu+n-1}) + \pi_0\,\lambda_{\nu+n} = 0 \end{cases}$$

che determinano univocamente le $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ come elementi di funzioni analitiche regolari nell'intorno di $x=0$. Si ha in particolare:

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi_0}, \quad \lambda_{n+1} = \frac{n\pi_0' - \pi_1}{\pi_0^2}, \text{ ecc.}$$

La forma stessa delle equazioni (5) dimostra inoltre che tutti questi coefficienti sono determinati *razionalmente* mediante i coefficienti $\pi_0, \ldots \pi_n$ della forma data.

4. Rimane ora da dimostrare la validità effettiva dello sviluppo trovato. A quest'uopo, indichiamo con $\overline{\lambda}_\nu$ la serie di potenze di x che si ottiene sostituendo nella λ_ν, ad ogni coefficiente, il rispettivo valore assoluto; indichiamo con Φ la forma che si ottiene da $\frac{1}{\pi_0}F$ mutando pure, nello sviluppo in serie dei singoli coefficienti $\frac{\pi_1}{\pi_0}, \frac{\pi_2}{\pi_0}, \ldots \frac{\pi_n}{\pi_0}$ di essa F, ogni coefficiente nel rispettivo valore assoluto, e con $\Phi', \Phi'', \ldots$ le sue derivate funzionali; sia infine r il raggio dell'intorno di $x=0$ in cui convergono le serie di potenze $\frac{\pi_1}{\pi_0}, \frac{\pi_2}{\pi_0}, \ldots \frac{\pi_n}{\pi_0}$ e $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots \lambda_{n+\nu-1}$ e si ponga

$$|x| = u, \qquad u < r_1 < r.$$

La relazione ricorrente (5) ci darà:

$$(6)\qquad \lambda_{n+\nu} = -\frac{1}{\pi_0}\left(\mathrm{F}(\lambda_\nu) + \mathrm{F}'(\lambda_{\nu+1}) + \cdots + \frac{1}{n-1\,!}\,\mathrm{F}^{(n-1)}(\lambda_{\nu+n-1})\right)$$

da cui

$$\bar{\lambda}_{n+\nu}(u) \leq \Phi\big(\bar{\lambda}_\nu(u)\big) + \Phi'\big(\bar{\lambda}_{\nu+1}(u)\big) + \cdots - \frac{1}{n-1\,!}\,\Phi^{(n-1)}(\bar{\lambda}_{\nu+n-1}).$$

Sia ora g il massimo valore delle $\bar{\lambda}_n(u), \bar{\lambda}_{n+1}(u), \ldots \bar{\lambda}_{\nu+n-1}$ per $u \leq r_2 < r_1$; si ponga per brevità

$$\omega(u) = \frac{r_1}{r_1 - u}$$

e si avrà per una nota proposizione della teoria delle serie di potenze:

$$\bar{\lambda}_{n+s}(u) \leq g\,\omega(u), \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1)$$

e quindi

$$\bar{\lambda}_{n+\nu}(u) < g\left(\Phi(\omega) + \Phi'(\omega) + \cdots + \frac{1}{n-1\,!}\,\Phi^{(n-1)}(\omega) + \frac{1}{n!}\,\Phi^{(n)}(\omega)\right).$$

Ma l'espressione entro parentesi, per la formula (2), non è altro che

$$e^{-u}\,\Phi(e^u\,\omega),$$

espressione che per tutti i valori di $u < r_2$ ammette un limite superiore finito h, che si può senza inconvenienti supporre in ogni caso maggiore dell'unità. Questo numero h dipende naturalmente dalla forma Φ, ossia dalla F, ma non dalla funzione arbitraria φ cui essa forma è applicata. Ne viene

$$\bar{\lambda}_{n+\nu}(u) < hg,$$

ma si ha

$$|\lambda_{n+\nu}(x)| \leq \bar{\lambda}_{n+\nu}(u),$$

onde

$$|\lambda_{n+\nu}(x)| < hg$$

e quindi

$$|\lambda_{n+\nu+1}| < h^2 g,\ |\lambda_{n+\nu+2}| < h^3 g, \ldots, |\lambda_{n+\nu+i}| < h^{i+1} g.$$

Ora queste condizioni rientrano evidentemente come caso particolare nelle condizioni (9) di convergenza incondizionata date nella Nota precedente: per cui risulta dimostrata la validità effettiva dello sviluppo (3) dato per F^{-1}. Questo sviluppo si può ordinare per le potenze crescenti di x ed incomincia colla potenza x^n: esso ci dà quindi quell'integrale dell'equazione $\mathrm{F}(\psi) = \varphi$ che è nullo insieme alle sue $n-1$ prime derivate per $x = 0$, e che gli autori tedeschi chiamano *integrale principale* (Hauptintegral).

Riassumendo, possiamo quindi concludere che:

L'integrale principale dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$\mathrm{F}(\psi) \equiv \pi_0\,\mathrm{D}^n\psi + \pi_1\,\mathrm{D}^{n-1}\psi + \cdots + \pi_{n-1}\,\mathrm{D}\psi + \pi_n\,\psi = \varphi$$

in cui $\pi_0, \pi_1, \dots \pi_n$ *sono elementi di funzioni analitiche regolari in un intorno di* $x=0$ *e* π_0 *non si annulla in questo intorno, è espresso dalla serie*

$$\psi = \frac{1}{\pi_0} D^{-n}\varphi + \frac{n\pi_0' - \pi_1}{\pi_0^2} D^{-n-1}\varphi + \cdots + \lambda_\nu D^{-\nu}\varphi + \cdots$$

i cui coefficienti sono determinati dalla equazione ricorrente

$$\lambda_{\nu+n} = -\frac{1}{\pi_0}\left(F(\lambda_\nu) + F'(\lambda_{\nu+1}) + \cdots + \frac{1}{n-1\,!} F^{(n-1)}(\lambda_{\nu+n-1})\right)$$

insieme alle condizioni

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots \lambda_{n-1} = 0\,,\ \lambda_n = \frac{1}{\pi_0}\,.$$

Per ogni elemento di funzione φ *regolare in un intorno di* $x=0$, *questa serie è convergente assolutamente ed in ugual grado in un intorno conveniente di* $x=0$ *e fornisce quindi per* ψ *un elemento di funzione analitica. I coefficienti della serie trovata sono razionalmente esprimibili per i coefficienti della forma data.*

Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ un sistema fondamentale di integrali della forma F e $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ il corrispondente sistema di moltiplicatori. È nota la formula di risoluzione dell' equazione non omogenea

$$F(\psi) = \varphi$$

ottenuta da Lagrange col metodo della variazione delle costanti arbitrarie; questa formula è:

$$\psi = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \int^x \mu_n\, \varphi\, dx$$

e ci dà l' integrale principale quando in tutte ed n le quadrature si prende il limite inferiore uguale a zero. Con ciò le quadrature si riducono alla nostra operazione D^{-1} e la formula di Lagrange viene a scriversi

$$F^{-1}\varphi = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h\, D^{-1}(\mu_h\, \varphi).$$

La F^{-1} si può ora sviluppare per le potenze negative di D mediante la formula (7) della Nota precedente e indicando con $\mu^{(r)}$ la $D^r\mu$, avremo

$$F^{-1}\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{\nu-1}\, \alpha_h\, \mu_h^{(\nu-1)} D^{-\nu}\varphi.$$

Ma questo sviluppo non può, per il teorema del § 8 della citata Nota, differire da quello trovato al § precedente: onde concludiamo che le λ_ν definite dal sistema (5) sono esprimibili in funzione degl' integrali e dei moltiplicatori della F, mediante la formula

$$\lambda_\nu = (-1)^{\nu-1} \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h\, \mu_h^{(\nu-1)}. \tag{7}$$

In particolare le condizioni $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ e $\lambda_n = \frac{1}{\pi_0}$ ci dànno le equazioni

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha_h \mu_h^{(i)} \,, \quad (i = 0\,,1\,,2\,,\ldots n-2)\,,$$

$$\sum_{h=0}^{n} \alpha_h \mu_h^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_0}\,,$$

che sono, come è noto, quelle che servono a determinare i moltiplicatori.

Meteorologia. — *Riassunto delle Osservazioni meteorologiche fatte all' Osservatorio Etneo.* Nota del Corrispondente A. Riccò [1].

L' Osservatorio Etneo è posto al piede del cratere centrale di Mongibello, a circa 1 km. dall' orlo S-SE: dista dall'Osservatorio di Catania 27 km. nella direzione N. 15° W; gli strumenti meteorologici sono all' altezza 2947^m sul mare.

Si accede all' Osservatorio Etneo da Catania con tre ore di via carrozzabile fino a Nicolosi, tre ore di via mulattiera fino alla *Casa del Bosco*, poi per sentieri più o meno visibili dopo un' altra ora si arriva alla *Cantoniera meteorico alpina*, e dopo altre 3 ore all' Osservatorio; nella buona stagione si giunge coi muli fino davanti alla porta dell' Osservatorio. Nell' inverno da Casa del Bosco in su vi è neve, per lo più molle, di spessore crescente fino ad alcuni metri attorno all' Osservatorio Etneo, sulla quale i muli non possono camminare: perciò il viaggio riesce assai faticoso, e col cattivo tempo, pressocchè impossibile. Per il soggiorno continuo lassù, anche nell' inverno, non abbiamo nè personale, nè mezzi sufficenti; tanto più che manca finora una linea telegrafica o telefonica di comunicazione coll' abitato.

Il termobarografo Richard che potrebbe funzionare da solo per 40 giorni, d' inverno agisce male e spesso si ferma, anche usando lubrificanti incongelabili.

Per tutto questo le nostre osservazioni meteorologiche, specialmente nella stagione fredda, sono scarse e discontinue. Però siccome lassù i fenomeni meteorologici hanno molte regolarità e variazioni ristrette, si potrà da quel che si è fatto finora, ottenere valori delle medie meteorologiche delle stagioni abbastanza vicini al vero: naturalmente quelle dell' inverno hanno un peso minore. Nulla di meno crediamo opportuno pubblicare i risultati

(1) Queste osservazioni saranno pubblicate più completamente negli Annali dell' Ufficio Centrale di meteorologia e Geodinamica. Tutti i calcoli e le riduzioni per questo lavoro sono stati fatti dall' assistente prof. G. Saija.

ottenuti finora, stante il particolare interesse che presenta la singolare località dell' Osservatorio Etneo.

Le osservazioni dirette della temperatura cominciarono nell' agosto 1891: il termobarografo fu messo in posto ed in azione nell' agosto 1892: le osservazioni dirette del barometro cominciarono nel marzo 1893. Le osservazioni dirette si fanno ad ore 6, 9, 12, 15, 18, 21; dal termobarografo la temperatura e la pressione sono state rilevate pure di tre ore in tre ore, stante la ristrettezza della variazione diurna.

Le riduzioni delle registrazioni del termobarografo sono state portate fino a tutto giugno 1895; ma poi avendo riconosciuta l' insufficenza delle osservazioni termometriche invernali, abbiamo aggiunto quelle fatte nell' ultimo inverno 1895-96.

Temperatura. Per le stagioni e per l' anno si ha:

Stagioni	Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno
Giorni d' osservazione	17	147	166	224	554
Medie	— 6°.6	— 1°.5	+ 7°.3	+ 2°.7	+ 0°.4

Si ha dunque all' Osservatorio Etneo una temperatura bassa, uniforme, presso a poco come nel circolo polare artico in Europa. Queste medie sono pressochè eguali a quelle del Brocken (Harz), alla latitudine + 51°.48′ ed altitudine di solo 140^m.

Per più di metà dell' anno le medie diurne all' Osservatorio Etneo sono inferiori allo zero. Per anomalia la temperatura può scendere sotto zero anche d' estate.

Nell' Osservatorio di Catania le osservazioni simultanee hanno dato:

	Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
Temp. media in Catania	+ 10°.3	+ 14°.8	+ 24°.9	+ 20°.3	+ 17°.6
Diff. colla temp. all'Oss. Etneo	+ 16.9	+ 16.3	+ 17.6	+ 17.6	+ 17.2
Diff. temp. per 100^m di altezza	0.59	0.57	0.61	0.61	0.60
Diff. altezz. per 1° di temper.	170^m	177^m	164^m	164^m	166^m

Dove si vede che la media d' estate sull' Etna è più bassa della media d' inverno in Catania.

La differenza delle medie dei due Osservatorii sono assai regolari, maggiori nella stagione calda che nella fredda, come è stato trovato altrove.

La oscillazione diurna della temperatura nelle varie ore rispetto la media è:

Ore	0	3	6	9	12	15	18	21
	— 1°.1	— 1°.1	— 0°.7	+ 0°.6	+ 1°.7	+ 1°.3	0°.0	— 0°.7

assai ristretta e regolare, col massimo a mezzodì, cioè coincidente col massimo dell' irradiazione solare; perchè lassù l' atmosfera poco densa, povera di vapore acqueo, e continuamente rinnovata da forti venti, non accumula calore. A 18^h la temperatura è eguale alla media diurna.

Gli estremi assoluti di temperatura osservati finora sono:

Massima	+ 16°.3	al 14 luglio 1894
Minima	— 13.3	al 5 febbraio 1896
Escursione	+ 29°.6	

L' escursione annua in Catania è circa da 0° a 40°.

L' escursione diurna media fra minimo e massimo all' Osservatorio Etneo è:

Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
3°.5	3°.7	4°.8	3°.8	4°.0

Temperatura della cima dell' Etna. Colle trovate variazioni della temperatura coll' altezza, partendo dalle medie per l' Osservatorio Etneo si ottengono le seguenti per la cima del vulcano (3313^m):

Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
— 8°.8	— 3°.6	+ 5°.1	+ 0°.5	— 1°.8

Le temperature effettivamente osservate sull' orlo del cratere sono in media di circa mezzo grado superiori alla calcolata, il che vuol dire che il cratere stesso per le azioni vulcaniche riscalda assai poco l' atmosfera circostante, come era da aspettarsi per il rapido rinnovamento dell' aria lassù.

Temperatura del suolo. Alla superficie per la radiazione solare, il terreno essendo poroso e nero, può arrivare fino a circa 40° nell' estate. Ma essendo la temperatura media annua dell' aria vicina allo zero, scavando la temperatura del suolo si trova rapidamente decrescente, e vicina a zero alla profondità di un paio di metri: ed in certe epoche e luoghi si può trovare anche ghiaccio, ma il suolo, anche profondo, non è gelato.

Nel terreno fra l' Osservatorio Etneo ed il cratere centrale vi sono poi singolari anomalie di temperatura. Al piede del cratere stesso in alcuni piccoli *thalweg* la neve, venendo coperta dall' arena trascinata giù dal vento e dalle acque piovane o di fusione, si conserva tutto l' anno: naturalmente in questi punti la temperatura del suolo è più bassa che altrove.

Nello stesso spazio fra l' Osservatorio ed il Cratere e sulle falde di questo vi sono numerose fumarole: ivi il terreno è assai caldo, ed in alcuni luoghi arriva a 60° e 70° a pochi centimetri di profondità.

Osservazioni attinometriche (1). Sono state fatte in 23 giorni d' estate nel 1894 e 1895 coll' attinometro di Arago. Essendo all' Osservatorio Etneo la pressione circa 0,7 di atmosfera ed avendo spesso osservato d' estate presso mezzodì, colla rappresentazione grafica delle osservazioni, abbiamo ottenuto facilmente la differenza di temperatura che darebbero i termometri, nero e bianco dello strumento, quando i raggi solari attraversassero lo spessore e

(1) Queste osservazioni furono eseguite da Riccò, Mascari e Tringali, il quale ha pure fatta la riduzione e la rappresentazione grafica delle osservazioni.

massa $\varepsilon = 1$ dell' atmosfera, ossia in direzione verticale fino al livello del mare: ci è risultata in media

$$\Delta_1 = 14^{\circ}.75$$

Colla estrapolazione grafica ci è risultato per lo spessore dell' atmosfera $\varepsilon = o$ ossia al disopra dell' atmosfera, la differenza dei termometri in media

$$\Delta_0 = 19^{\circ}.32$$

quindi il coefficiente di trasmissione risulta

$$p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 0.767.$$

In Catania si hanno corrispondentemente i seguenti valori

$$\Delta_1 = 14^{\circ}.65, \ \Delta_0 = 19.75, \ p_1 = 0.742$$

In Catania Δ_0 risulta alquanto maggiore che sull' Etna, perchè la riflessione e radiazione atmosferica, che si aggiunge alla radiazione solare, in basso è più forte per la maggior densità ed impurità dell' aria. Il coefficente di trasmissione p in Catania è alquanto minore, perchè quivi l' atmosfera più ricca di vapor acqueo esercita assorbimento maggiore sui raggi solari.

L' effettiva trasmissione zenitale, all' Osservatorio Etneo, ossia per la massa d' aria 0.7, quale all' incirca si avvera al mezzodì d' estate, è

$$p^{0,7} = 0.828$$

più sensibilmente superiore a quella trovata per Catania.

Ma le osservazioni attinometriche all' Osservatorio Etneo presentano una singolarità molto caratteristica: per più di metà delle osservazioni nelle ore meridiane le differenze dei termometri invece di crescere, diminuiscono. Questo abbassamento è certamente dovuto alle correnti ascendenti, le quali sull' Etna nelle ore meridiane sono assai attive (come lo sono in generale sulle alte montagne, specialmente isolate) e trascinano in alto nubi e vapori visibili, ed anche invisibili, i quali esercitano un forte assorbimento sulla radiazione solare.

Questa anomalia non ha luogo affatto in Catania.

Pressione atmosferica. Da 299 giorni di osservazione diretta e registrata si hanno le seguenti medie:

Stagioni	Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
Millimetri	528.8	531.4	538.6	536.8	533.9

Si rileva subito la grande differenza di $9^{mm}.8$ fra l' estate e l' inverno, mentre in Catania è minima. Ciò dipende dalla dilatazione dello strato d' aria interposto fra le due stazioni, per cui all' estate una massa notevole d' aria passa al di sopra dell' Osservatorio Etneo, e vi aumenta la pressione: infatti trascurando l' umidità, la detta dilatazione sarebbe:

$$\frac{\frac{1}{2}\left[(24^{\circ}.9 + 7^{\circ}.3) + (10^{\circ}.3 - 6^{\circ}.6)\right] 2947^{m}}{273} = 152^{m}$$

Ora, se colle formole ipsometriche si cerca quale è l' altezza corrispondente alle differenze di pressione $9^{mm}.8$, all' altitudine e condizioni meteorologiche dell' Osservatorio Etneo, si trova 148^{m}: l' accordo non potrebbe esser migliore.

L' oscillazione diurna della pressione è assai piccola e regolare: le differenze colle medie diurne sono:

Ore	0	3	6	9	12	15	18	21
Millimetri	+0.18	—0.13	—025	+0.06	+0.23	+0.03	—0.11	—0.03

con un massimo intorno a mezzanotte ed un altro a mezzodì.

Gli estremi di pressione osservati sono:

	mm	
Massima	545.9	al 12 settembre 1894, 9^{h}
Minima	515.4	al 16 novembre 1894, 9
Escursione	30.5	

L' escursione è circa la stessa in Catania, il che significa che sull' Etna la minor densità dell' aria è compensata dalla maggiore mobilità nel produrre le variazioni di pressione.

Tensione del vapore acqueo. Da 191 giorni d' osservazione diretta del psicrometro si hanno le seguenti medie:

Stagioni	Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
Millimetri	2.6	2.6	4.3	3.5	3.2

Questi valori sono tutti circa $\frac{1}{3}$ dei corrispondenti in Catania, il che prova la forte diminuzione del vapor acqueo coll' altezza, in media di $0^{mm}.22$ per 100^{m}. Le precedenti medie delle stagioni sono ben rappresentate dalla nota formola del dott. Hann.

$$e_h = e_0 \times 10^{\frac{h}{6500}}$$

partendo dalla media e_0 di Catania: ciò prova che le emanazioni di vapori dal cratere centrale non modificano sensibilmente l' umidità dell' aria all' Osservatorio Etneo.

La variazione diurna della tensione del vapor acqueo è poco rilevante: il massimo non cade a mezzodì, come la temperatura, ma verso le 15^{h}, probabilmente in causa delle correnti ascendenti che continuano a portar sù vapori nelle ore pomeridiane.

Gli estremi osservati sono:

	mm	
Massimo	7.7	al 14 luglio 1894, 15^{h}, vento SE
Minimo	0.8	al 25 gennaio 1893, 21^{h}, vento WNW

Umidità relativa. Si hanno le seguenti medie in centesimi di saturazione:

Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
79	63	52	65	65

tutte un po' superiori alle simultanee per Catania, il che vuol dire che sull'Etna la scarsità del vapor acqueo è più che compensata dalla bassa temperatura nel produrre una umidità relativa abbastanza elevata.

L'andamento diurno è dato dalle seguenti medie orarie:

Ore	6	9	12	15	18	21
	65	62	56	66	64	63

ove il forte minimo normale a mezzodì, è seguito da un caratteristico rapido aumento, certamente dovuto pur esso all'azione delle correnti ascendenti.

Gli estremi dell'umidità verificatisi diverse volte sono:

Massimo 100, Minimo 9: Escursione 91.

Questi massimi son dovuti specialmente alle nubi che talvolta avvolgono l'Osservatorio Etneo: qualche volta ai vapori del cratere centrale che producono lo stesso effetto.

Righe spettrali atmosferiche. Ho studiate le variazioni di grossezza di diverse righe spettrali al variare dell'altezza del sole, su cui dirigevo lo spettroscopio, nelle stazioni Catania, Nicolosi, Osservatorio Etneo, ove la pressione atmosferica e la densità dell'aria è nel rapporto 10 : 9 : 7, e la tensione o la quantità del vapor acqueo è circa come 10 : 7 : 3.

Fra le righe o zone atmosferiche osservate, le più interessanti sono:

	α	*Rain band*	δ
Lunghezza d'onda	628	594	580

Ho fatto 33 serie di osservazioni in Catania, 31 in Nicolosi, 34 all'Osservatorio Etneo.

Per ogni serie si è calcolata la distanza zenitale del sole e quindi lo spessore d'aria attraversata, e poi la massa secondo i predetti rapporti delle pressioni atmosferiche nelle stazioni.

Per eliminare l'influenza degli errori di osservazione sono riuniti in una media i valori della grossezza delle righe, i quali corrispondono a valori vicini della massa d'aria attraversata. Le grossezze della riga α sono espresse in numeri, ritenendo 10 la grossezza della riga solare *C*; la grossezza della *Rain band*, o meglio della sua componente principale, è stata confrontata alla riga solare D_2, considerata come 10; l'intensità della zona δ si è stimata in gradi da 0 a 7, da invisibile a molto forte.

I risultati sono dati dalla seguente tabella, dove si vede che la grossezza od intensità delle righe o dei fasci cresce pressochè proporzionalmente alla massa d'aria attraversata: quindi il rapporto della detta intensità alla massa d'aria è all'incirca costante; per α e δ è anche pressocchè eguale nelle tre stazioni, invece per la *Rain band* il rapporto all'Osservatorio Etneo, ove il vapor acqueo è tanto più scarso, *è meno della metà* di quel che è nelle due altre stazioni inferiori.

TABELLA

	Massa d'aria attraversata.	Grossezza g delle righe			Rapporti $r = g : m$		
	m	α	*rain band*	δ	α	*rain band*	δ
Etna	0,8	1,6	0,5	0,3	2,0	0,6	0,4
	1,4	2,8	0,6	1,1	2,0	0,4	0,8
	2,9	5,3	0,6	1,6	1,8	0,2	0,6
	6,1	8,1	3,7	3,3	1,3	0,6	0,5
	8,3	10,1	5,2	4,2	1,2	0,6	0,5
Medie....	....	....	....	....	1,7	0,5	0,5
Nicolosi	1,3	2,0	1,6	0,1	1,5	1,3	0,1
	2,0	3,3	2,8	0,9	1,6	1,3	0,4
	4,9	6,8	5,4	2,0	1,4	1,1	0,4
	7,8	8,7	7,8	4,4	1,1	1,0	0,6
Medie....	....	....	....	....	1,4	1,2	0,4
Catania	1,4	2,4	2,0	0,5	1,7	1,4	0,4
	2,6	3,8	3,5	1,0	1,5	1,3	0,4
	6,2	7,4	7,3	4,0	1,2	1,2	0,6
	10,3	11,9	8,5	5,8	1,2	0,8	0,6
Medie....	....	....	....	....	1,4	1,2	0,4

Dunque è fuori di dubbio che mentre la α e δ dipendono dai gaz componenti costanti dell' atmosfera, e sono causate dal loro assorbimento, la *Rain band* dipende invece dal vapor acqueo.

Ciò è confermato dal trovarsi che tanto all' Osservatorio Etneo che in quello di Catania (ove si hanno osservazioni psicrometriche), ai massimi d' intensità della *Rain band* corrisponde una media della tensione del vapor acqueo maggiore di quella che corrisponde ai minimi. Infatti si ha:

			mm	mm
Etna:	media tensione del vapor acqueo per i	massimi della *Rain band*	3.8	diff. 1.1
»	» » » » »	minimi » » »	2.7	
Catania	» » » » »	massimi » » »	11.9	» 1.7
»	» » » » »	minimi » » »	10.2	

Dunque la *Rain band* veramente merita il nome datole da Piazzi-Smyth, perchè indica l' umidità dell' aria, e quindi la probabilità della pioggia.

Evaporazione. Osservata con evaporimetri eguali esposti all' ombra a Nord all' Osservatorio Etneo ed in Catania, nei mesi in cui l' acqua non gela, si hanno le seguenti medie:

	Giugno.	Luglio.	Agosto.	Settembre.	Giugno a Settembre.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
Etna	4.5	5.7	4.4	4.4	4.8
Catania	4.6	6.9	5.3	5.7	5.7
Differenze	— 0.1	— 1.2	— 0.9	— 1.3	— 0.9

Dunque negli stessi giorni l' evaporazione è minore nell' Etna che in Catania: ciò significa che l' azione favorevole della minor pressione e della maggior ventilazione all' Osservatorio Etneo è più che bilanciata dalla bassa temperatura. Infatti se si confronta l' evaporazione diurna media di luglio sull' Etna con quella di gennaio in Catania, nei quali mesi si hanno nelle due stazioni temperature medie poco differenti, si ha:

					mm
Etna:	luglio	temp. media	+ 8.3.	Evaporazione	5.7
Catania:	gennaio	» »	+ 9.6.	»	1.8

cioè sull' Etna evaporazione più che tripla.

La massima evaporazione diurna osservata finora sull' Etna è stata di 10^{mm}, mentre in Catania si è avuto fin $18^{mm}.3$ nel settembre 1893, per straordinaria siccità e forte vento di ponente.

Vento. La direzione del vento all' Osservatorio Etneo è determinata osservando quella del fumo del cratere centrale: così questo dato è indipendente dalla presenza del cratere stesso che domina l' Osservatorio.

Da 248 giorni d' osservazione si hanno i seguenti rapporti di frequenza dei diversi venti su 100 osservazioni.

N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Σ
6	13	6	3	1	1	21	49	100

Ove vedesi la grandissima preponderanza del NW e poi dell' W.

La risultante secondo la formola del Lambert, ossia il vento unico che produrrebbe egual movimento d' aria, avrebbe la direzione NW 5° N e dovrebbe spirare 60 volte in 100 osservazioni.

La direzione del fumo dell' Etna si osserva anche da Catania, ed i risultati ottenuti sono abbastanza concordanti coi precedenti.

La forza del vento espressa nella scala da 0 a 4, dalla calma al vento fortissimo che impedisce di camminare, per le diverse ore del giorno è in media:

6	9	12	15	18	21
1.8	1.7	1.6	1.9	2.0	2.1

con un minimo a mezzodì ed un massimo vespertino: invece in Catania la brezza di mare produce un massimo nelle ore meridiane e pomeridiane, specialmente d' estate.

I venti che portarono la pioggia nel periodo 1892-95 all' Osservatorio Etneo furono quasi sempre W o NW; invece in Catania il vento che porta maggiori pioggie è il NE.

Nubi. La quantità media delle nubi, stimata in centesimi di cielo coperto all' Osservatorio Etneo ed in Catania in giorni corrispondenti, è:

	Inverno.	Primavera.	Estate	Autunno.	Anno.
Giorni d' osservazione	13	22	144	64	243
Osservatorio Etneo	(15)	49	22	46	33
Osservatorio di Catania	33	46	13	39	33

Eccettuato l' inverno, all' Osservatorio Etneo si hanno più nubi che in Catania: ciò dipende dalle correnti ascendenti che portano sù vapori e nubi, ed anche dall' azione condensante esercitata dall' Etna, come tutte le montagne alte, specialmente isolate.

Il risultato contrario per l' inverno, quantunque si tratti di osservazioni simultanee, non merita gran peso, perchè in questa stagione si scelgono per le visite all' Osservatorio Etneo le giornate di bel tempo su Mongibello.

La seguente statistica dei giorni sereni, misti, coperti dà un risultato analogo:

	Inverno (90g)			Primav. (92g)			Estate (92g)			Autunno (91g)			Anno (365g)		
	Ser.	Mis.	Cop.	Ser.	Mis.	Cop.	Ser.	Mis.	Cop.	Ser.	Mis.	Cop.	Ser.	Mis.	Cop.
Etna	(28)	(48)	(14)	25	21	46	44	38	10	22	42	27	119	149	97
Catania	25	29	36	34	30	28	74	13	5	36	33	22	169	105	91

ma si trova che anche nel complesso dell' anno vi è all' Osservatorio Etneo un maggior numero di giorni nuvolosi ed uno minore di giorni sereni: la differenza è più notevole in estate.

All' Osservatorio di Catania si nota quando la cima dell' Etna è coperta da nubi: in media si hanno i seguenti numeri di giorni per stagione ed anno:

Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
51	48	24	44	167

con un minimo ben netto nell' estate.

L' Etna dà luogo alla produzione di nubi di forme speciali, le quali si prestano al pronostico del tempo, come è noto anche popolarmente. Se ne sta facendo uno studio particolare, specialmente dall'assistente ing. A. Mascari, col sussidio della fotografia.

Il periodo della nebulosità sull' Etna è assai caratteristico, e mostra pur esso l' influenza delle correnti ascendenti: si hanno infatti le seguenti differenze: colla media diurna:

Ore	6	9	12	15	18	21
	— 10	— 4	+ 11	+ 14	+ 2	— 13

ove notasi il grande massimo pomeridiano.

Precipitazioni atmosferiche. Per i venti violentissimi che di frequente spirano all' Osservatorio Etneo, la collocazione di un pluviometro capace di raccogliere per lunghi periodi tutta la pioggia e la neve che cade, presenta singolari difficoltà. Alla metà del luglio 1895 si collocò un pluviometro di speciale costruzione e grande capacità: da quell' epoca al 15 marzo 1896 si è raccolto $300^{mm}.0$ di pioggia ed acqua di fusione della neve, mentre in Catania nello stesso periodo di 8 mesi se ne è raccolta $537^{mm}.75$, cioè quasi il doppio. Anche tenuto conto che il pluviometro riceve tanto meno di pioggia e neve quanto più è spinta obliquamente dal vento, che lassù è molto più forte, risulta certamente che le precipitazioni atmosferiche all' Osservatorio Etneo sono ancora più scarse che in Catania.

Anche la frequenza delle precipitazioni atmosferiche all' Osservatorio Etneo conferma il detto ora, infatti si ha:

	Inverno.	Primavera.	Estate.	Autunno.	Anno.
Giorni con pioggia	1	1	2	2	6
" con nevicata	11	5	1	4	21
" con grandinata (o nevischio)	1	1	3	5	10
" con precipitaz. atmosferiche	13	7	6	11	37

Numeri piccoli in sè e rispetto a Catania, che nell' anno ne presenta circa il doppio. Siccome in queste regioni le precipitazioni atmosferiche mancano quasi completamente nei mesi caldi, così sull' Etna le pioggie sono rare, e sono surrogate da nevicate o caduta di nevischio. Questi fenomeni dell' Etna essendo ben visibili da Catania e da Nicolosi, ci riesce possibile di completare la statistica delle precipitazioni atmosferiche sulla Montagna durante le assenze invernali del personale dall' Osservatorio Etneo.

La neve al piede dell' Etna, al livello del mare, in Catania, non cade tutti gli inverni, e raramente arriva a coprire il terreno; sul versante meridionale dell' Etna, nella regione *piedemontana* ogni anno avvengono nevicate di alcuni decimetri: raramente arrivano ad oltrapassare l' altezza di 1^{m}; nella regione *nemorosa* in tutti gli inverni si ha più di un metro di neve; nella regione *deserta,* al *piano del Lago* la neve ordinariamente arriva a 3^{m}; intorno all' Osservatorio, può accumulandosi per l' azione del vento, arrivare fino a 5^{m}.

Negli ultimi 5 inverni le date della prima e dell' ultima nevicata, e della scomparsa della neve sull' Etna, e le corrispondenti temperature all' Osservatorio Etneo sono in media:

Prima nevicata.	Ultima nevicata.	Scomparsa della neve.
15 ottobre	2 giugno.	16 luglio
$+3.0$	$+3^{o}.1$	$+8^{o}.3$

Dunque si hanno nevicate all' Osservatorio Etneo per 7 $\frac{1}{2}$ mesi e la neve vi persiste per 9 mesi. Le nevicate cominciano e finiscono presso a poco con

eguale temperatura media, superiore sensibilmente allo zero e vi persistono fino circa al massimo del calore estivo.

Sull' Etna non vi sono nè ghiacciai nè nevi perpetue, poichè all' estate scompare tutta la neve che non è riparata. Dunque la temperatura annua media della cima dell' Etna, — 1°.8 è superiore a quella del limite delle nevi perpetue: la cima non raggiunge il detto limite, ma gli è assai vicina.

E siccome la base è al limite inferiore delle nevi sporadiche, ne viene che sulle falde dell' Etna le nevi variano continuamente durante l' anno, e solo nella parte superiore persistono per tutto il semestre freddo.

Occorrerebbe una lunga serie di osservazioni per stabilire il luogo e la temperatura media della stagione al limite inferiore delle nevi nelle diverse stagioni: l' osservazione ha dato finora:

Autunno (novembre e dicembre (¹)) :	Tacca Albanelli	2300ᵐ,	temper.	0°.0
Inverno (gennaio e febbraio) :	Casa del Bosco	1500 ,	»	+ 1 .9
Primavera (marzo, aprile, maggio) :	Tacca Arena	2100 ,	»	+ 3 .3
Estate (giugno) . . . . :	Cratere centrale	3300 ,	»	+ 3 .8

Come vedesi le temperature sono ineguali e crescenti, il che vuol dire che alle prime nevi per fermarsi occorre che la temperatura sia scesa a 0°, ma le successive, accumulandosi, persistono a temperature medie sempre più alte.

Neviere. Sull' Etna vi sono diverse località, dette *Tacche* della neve, ove la neve coperta da sabbia vulcanica, sia artificialmente, sia naturalmente dalle eruzioni, dai venti o dalle acque, si trasforma in ghiaccio e si conserva lungamente, producendo così delle anomalie nella distribuzione ed estensione delle nevi. L' acqua di parziale fusione delle *Tacche* scorre in parte sotterra, formando dei singolari cunicoli di ghiaccio, a sezione semicircolare. Attualmente nel versante meridionale vi è una trentina di queste *Tacche*, comprese fra le direzioni SE ed W divergenti dal cratere centrale: queste neviere si estendono in giù fino all' altitudine 1750ᵐ.

Nel versante settentrionale ve ne sono una ventina che arrivano in basso fino all' altitudine minima 750ᵐ, giusto 1000 più in giù che nel versante meridionale più battuto dal sole.

Perfino entro al cratere centrale sul pendio interno rivolto a N. si trova spesso il ghiaccio, il che fece credere anticamente ad un ghiacciaio entro il cratere: ma questo ghiaccio scompare all' estate.

Sull' Etna vi sono pure delle *Grotte* ove si conserva la neve: sono apparati eruttivi estinti ed antichi: meravigliosa è la *Grotta degli Archi*, apparato vulcanico dell' eruzione del 1607, formato di una galleria lunga 700ᵐ, rischiarata da sette pozzi o cortili, che non sono altro che gli avanzi dei coni eruttivi impiantati sul detto canale. La neve che vi si raccoglie e si conserva

(¹) In Sicilia il dicembre ha carattere autunnale.

naturalmente e l'acqua che stilla continuamente dalle pareti servono ad abbeverare i pastori e gli armenti che sogliono rifugiarsi là dentro.

Anomalie in senso inverso nella distillazione delle nevi sono prodotte sull' Etna dal calore vulcanico: i nuovi crateri e le lave eruttate conservano per molti anni sensibile calore. Le lave dell' eruzione del 1879 a poca profondità, presso Mojo, sono ancora scottanti; il cratere dell' eruzione del 1886 (Monte Gemmellaro) fino al 1891 aveva calore sufficiente per sbarazzarsi prontamente delle nevi invernali; i crateri dell' ultima eruzione del 1892 anche nell' inverno ultimo 1895-96 si disegnavano in nero sul fondo bianco generale della neve.

Non di rado i vapori caldi che emanano dal cratere centrale, lambendone le falde vi provocano fusione della neve.

Temporali. Le manifestazioni elettriche dell' atmosfera sono generalmente in Sicilia meno frequenti che altrove in Europa, ed in Catania sono ancor più rare, avendosene solo 33 per anno: all' Osservatorio Etneo sono poi rarissime: in 248 giorni di permanenza lassù ne abbiamo osservate in 27 giorni, il che darebbe 32 all' anno; ma in massima parte questi fenomeni hanno luogo non sopra l' Osservatorio Etneo, ma in basso a distanza.

Inoltre i casi in cui le manifestazioni elettriche sono accompagnate da pioggia o grandine, cioè i veri temporali, sono in numero ancor più esiguo.

La *Casa Inglese* dal 1810, e poi l' Osservatorio dal 1880, malgrado le sue grandi masse metalliche e quantunque non fornito di parafulmini, non sono mai stati colpiti dal fulmine.

Tale immunità dell' Osservatorio Etneo deve dipendere (come per Catania secondo il prof. E. Canestrini ([1])) dall' essere coibente il materiale vulcanico del suolo, ed inoltre per l' Osservatorio Etneo dalla presenza del gran cono che lo domina per 360^m d' altezza, e che col suo pennacchio di vapori caldi ed umidi agisce come grande parafulmine e scaricatore dell' elettricità atmosferica.

Confrontando quattro burrasche osservate simultaneamente all' Osservatorio Etneo ed in Catania, si ha: l' abbassamento barometrico è sempre maggiore sull' Etna che in Catania: la variazione termica invece sul vulcano è minore. L' abbassamento rapido del barometro è seguito da rialzo men rapido o lento: il minimo precede quello della temperatura: tutto ciò in conformità a ciò che osservasi generalmente nelle burrasche. Il vento spirante forte o fortissimo sull' Etna è sempre stato W o NW o WNW.

Le condizioni atmosferiche generali furono: minimo di pressione al nord, sull' Italia; pressione uniforme e bassa in Sicilia; venti dominanti occidentali; temporali in Italia.

Ipsometria. Da 144 osservazioni simultanee, riunite in 21 gruppi per

([1]) Atti della Società Veneto-Trentina.

diverse ore e stagioni (escluso l'inverno) fatte nella maggior parte da me all'Osservatorio Etneo e dal prof. Saija all'Osservatorio di Catania, si è calcolata la differenza di livello (2882^m) tra i due Osservatorii, adoperando le tavole meteorologiche internazionali pubblicate per decisione del Congresso di Roma nel 1879, fondate sulla formola di Laplace, coi perfezionamenti introdotti da Rühlmann e Wild, tenendosi conto del vapor acqueo.

Gli errori, cioè le differenze fra calcolo e misura, sono in media:

9^h	15^h	21^h	$\frac{1}{3}(9^h + 15^h + 21^h)$
$+17^m$	$+28^m$	-10	$+12^m$

Assai piccoli, in generale minori di $\frac{1}{100}$; piccolissimi alla sera (21^h) e nella media delle tre ore, cioè minori di $\frac{1}{200}$; nei singoli gruppi le massime differenze sono $+40^m$ e -27^m.

Queste differenze si potrebbero diminuire nelle livellazioni barometriche delle regioni etnee, dando alla costante barometrica della formola invece del valore adottato 18400, il valore risultante dalla media di tutti i confronti che è 18327.

L'applicazione della formola ipsometrica alle medie generali delle osservazioni meteorologiche dà ottimi risultati: infatti si ottiene per altitudine dall'Osservatorio Etneo colle

Osservazioni all'Etna	serie 1892-95 (incompleta)	}		
„ di Catania	„ 1892-95 (id. e simultanea)	}	2958^m	errore $+11^m$
„ di Riposto [1]	„ 1880-89 (completa)	}	2952	„ $+5$

La picciolezza degli errori, oltre a dimostrare l'applicabilità delle formole della ipsometria alla determinazione delle differenze di livello anche grandi fra stazioni meteorologiche non molto lontane, colle loro osservazioni, è anche un controllo sintetico delle principali medie che abbiamo date per l'Osservatorio Etneo.

Fisica. — *Sulle cariche e figure elettriche alla superficie dei tubi del Crookes e del Geissler.* Nota del Socio Emilio Villari.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Osservazioni fatte nell'Osservatorio dell'Istituto nautico di Riposto, Direttore prof. F. Cafiero.

Matematica. — *Funzioni olomorfe nel campo ellittico* (estensione di un celebre teorema di Weierstrass). Nota di ERNESTO PASCAL, presentata dal Socio CREMONA.

Dato un piano complesso (Riemanniana di genere zero), si possono costruire su esso funzioni *trascendenti* le quali abbiano un solo punto di *singolarità essenziale*, infiniti punti-zero, e nessun altro punto d' infinito.

Tali funzioni si sogliono chiamare *olomorfe*, e il punto di singolarità essenziale può porsi in un luogo qualunqne della Riemanniana. Un celebre teorema di Weierstrass insegna a costruire una siffatta funzione mediante un prodotto infinito, quando sono stabiliti i punti-zero della funzione stessa.

Supponiamo ora data una Riemanniana di genere uno (ellittica); proponiamoci per essa il medesimo problema, cioè costruire funzioni trascendenti che non abbiano punti d' infinito salvo i due punti all' infinito dei due piani che costituiscono la Riemanniana, nei quali la funzione abbia singolarità essenziali, e che abbia infiniti punti-zero sulla Riemanniana stessa.

Considerando p. e. la Riemanniana ellittica corrispondente alla relazione solita

$$p'^2(u) = 4\,p^3(u) - g_2\,p(u) - g_3$$

si ha una funzione di u definita nel primo parallelogrammo fondamentale dei periodi 2ω, $2\omega'$, e che in questo possiede infiniti punti-zero, e nessun punto d'infinito, oltre il punto $u = 0$ che è un punto di singolarità essenziale. Disporremo la rete di parallelogrammi nel piano u, in modo che il punto $u = 0$ sia il centro del parallelogrammo fondamentale.

È notevole che per queste funzioni, le quali stanno alle funzioni ellittiche, come le funzioni olomorfe ordinarie stanno alle funzioni razionali, si può dimostrare una formola che è assai simile a quella citata di Weierstrass. Quando i semiperiodi ω, ω' diventano infiniti, le funzioni ellittiche degenerano in funzioni razionali, e il parallelogrammo fondamentale viene ad estendersi per tutto il piano delle u, tali funzioni diventano le funzioni olomorfe ordinarie (quando si trasporti il punto di singolarità essenziale nel punto $u = 0$).

Scopo di questa Nota è di mostrare la costruzione della formola indicata, e infine di applicarla alla costruzione di una funzione da reputarsi, da questo punto di vista, come estensione della funzione olomorfa σ di Weierstrass. Si potrà poi anche definire un numero simile a quello chiamato da Laguerre il *genere* di certe funzioni olomorfe.

Funzioni di tale specie sarebbero p. e. delle serie convergenti i cui termini sono dei due tipi

$$a_n\,p^n \quad , \quad b_n\,p'\,p^n$$

($n =$ numero intero positivo), e che poi per le note proprietà della funzione p, si possono trasformare in serie i cui termini procedono secondo le derivate successive della funzione p.

§ 1. *Estensione della formola di Weierstrass.*

Sia $F(u)$ la supposta funzione olomorfa nel campo ellittico, e indichiamo con $\zeta(u)$ il noto integrale di 2ª specie ellittico

$$\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

e sieno $u_1\ u_2 \ldots$ i punti zero di F nel parallelogrammo fondamentale; tali punti li indichiamo con un indice solo, ma potrebbero anche dipendere da *più* indici. Essi formino un gruppo di punti il cui punto limite è il punto $u = 0$. Consideriamo la serie

$$\sum_n \left[\zeta(u - u_n) - \zeta(u)\right] \frac{p^k(u)}{p^k(u_n)}$$

Dico che si può sempre scegliere un tal valore intero positivo di k, in modo che questa serie sia equiconvergente nel parallelogrammo fondamentale, da cui con un' area, piccola a piacere, sia stato escluso il punto $u = 0$.

In effetti se k non può prendersi fisso al variare di n, potrà sempre prendersi $k = n$ (se le u_n dipendono da più indici, sieno p. e. del tipo u_{mn}, allora si prende k eguale al prodotto degli indici), e per un tale k certamente la serie è convergente in egual grado. Giacchè escludendo dal parallelogrammo fondamentale con aree piccole a piacere il punto $u = 0$, e i punti u_n, nell'area restante i moduli delle funzioni $p(u)$ e $\zeta(u - u_n) - \zeta(u)$ avranno valori sempre finiti che ammetteranno dei *limiti superiori* finiti, e anzi col variare di n il modulo della seconda di queste quantità può rendersi piccolo a piacere. Se sono rispettivamente A, B tali *limiti superiori* i moduli dei termini della serie

$$\sum B \frac{A^n}{p^n(u_n)} = \sum s_n$$

sono rispettivamente maggiori di quelli della serie data; ora questa serie è convergente assolutamente perchè il

$$\sqrt[n]{s_n} = \sqrt[n]{B}\, \frac{A}{p(u_n)}$$

tende a zero per $n = \infty$, giacchè $p(u_n)$ tende ad ∞, e B tende anch' esso a zero per $n = \infty$.

Se le u_n dipendessero da due indici p. e. m, n la serie proposta sarebbe allora una serie doppia, e si potrebbe ripetere lo stesso ragionamento prendendo in considerazione, anzichè il radicale n^{mo}, il radicale $(mn)^{mo}$, po-

tendosi dimostrare facilmente che un simile criterio opportunamente modificato vale anche per le serie doppie, o multiple.

La serie proposta essendo dunque equiconvergente sarà integrabile termine a termine.

Ora dico che ogni termine di quella serie può porsi sotto la seguente forma:

$$\left[\zeta(u-u_n)-\zeta(u)\right]\frac{p^k(u)}{p^k(u_n)}=\left[\zeta(u-u_n)-\zeta(u)\right]+\mathrm{P}_k(u)$$

essendo $\mathrm{P}_k(u)$ *una funzione razionale intera di grado* k *in* $p(u)$ *e* $p'(u)$.

In effetti partiamo dalla cosiddetta formola di addizione per la funzione ζ ponendola sotto la seguente forma

$$\zeta(u-u_n)-\zeta(u)=\frac{1}{2}\frac{p'(u)+p'(u_n)}{p(u)-p(u_n)}-\zeta(u_n)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}p'(u)-\zeta(u_n)p(u)+\left[\frac{1}{2}p'(u_n)+\zeta(u_n)p(u_n)\right]}{p(u)-p(u_n)}$$

Sostituendo questo valore nella espressione precedente si vede che $\mathrm{P}_k(u)$ diventa:

$$\mathrm{P}_k(u)=\frac{1}{p^k(u_n)}\left[\frac{1}{2}p'(u)-\zeta(u_n)p(u)+\left[\frac{1}{2}p'(u_n)+\zeta(u_n)p(u_n)\right]\right]\times$$
$$\times\left[p^{k-1}(u)+p^{k-2}(u)\,p(u_n)+\cdots+p^{k-1}(u_n)\right]$$

Formiamo ora la differenza

$$\frac{\mathrm{F}'(u)}{\mathrm{F}(u)}-\sum\left[\zeta(u-u_n)-\zeta(u)+\mathrm{P}_k(u)\right]$$

Si ha una funzione sempre finita nel parallelogrammo fondamentale (escluso il punto $u=0$) compresivi anche i punti u_n nei quali primo e secondo termine di questa differenza diventano infiniti di primo ordine. Abbiamo dunque una funzione della specie di F; chiamandola $\mathrm{G}(u)$, e integrando si ha (essendo c una costante)

$$\mathrm{F}(u)=\mathrm{C}\,e^{\int \mathrm{G}(u)du}\,\prod_n\left\{\frac{\sigma(u-u_n)}{\sigma(u)}\,e^{\int \mathrm{P}_k(u)du}\right\}$$

Le funzioni

$$\int \mathrm{G}(u)\,du \qquad \int \mathrm{P}_k(u)\,du$$

sono a loro volta funzioni olomorfe nel campo ellittico; la seconda anzi è di grado finito; ammette cioè in $u=0$ un polo, e non propriamente un punto di singolarità essenziale.

§ 2. *Costruzione della funzione da ritenersi come generalizzazione della σ di Weierstrass.*

Quando i punti-zero della funzione sono tali che k può prendersi *costante*, allora il numero $2k$ lo chiameremo *genere* della funzione olomorfa nel campo ellittico.

Passiamo alla costruzione di una funzione di genere 2, da ritenersi come estensione della σ di Weierstrass.

Prendiamo i punti zero della funzione nei punti

$$u_{mn} = \frac{1}{2\, m\omega + 2\, n\omega'}$$

essendo m, n interi positivi o negativi, meno la combinazione $m = 0 \;\; n = 0$. Tali punti hanno per punto limite il punto zero, quindi, almeno da certi valori di m, n in poi, stanno tutti compresi nel parallelogrammo fondamentale.

Dico che con tali punti si può scegliere nelle formole precedenti $k = 1$, e quindi si viene a costruire *una funzione di genere* 2.

In effetti un termine della serie

$$\sum \left[\zeta(u - u_{mn}) - \zeta(u) \right] \frac{p(u)}{p(u_{mn})} ,$$

(per effetto della formola precedente, e degli sviluppi noti

$$p\,(u_{mn}) = \quad \frac{1}{u_{mn}^2} + A_2$$

$$p'(u_{mn}) = - \frac{2}{u_{mn}^3} + B_1$$

$$\zeta\,(u_{mn}) = \quad \frac{1}{u_{mn}} + C_3$$

dove A_2 B_1 C_3 sono delle serie tendenti a zero per u_{mn} tendente a zero, e propriamente contengono come fattore u_{mn} ai gradi 2, 1, 3 rispettivamente) può porsi sotto la forma

$$p(u) \frac{- p(u) + R}{- 1 + S} u_{mn}^3$$

dove R, S sono delle quantità tendenti a zero per u_{mn} tendente a zero. Il denominatore diventa zero solo nei punti $u = u_{mn}$, quindi in una area che escluda il punto $u = 0$ e i punti u_{mn}, la precedente espressione sarà sempre *finita* e ammetterà un *limite superiore* A.

Paragonando allora questi termini con quelli della serie

$$A \sum \frac{1}{|u_{mn}^3|}$$

che, come si sa, è assolutamente convergente, se ne ricava la equiconvergenza della serie in esame.

Il valore di $P_k(u)$ risulta

$$P_1(u)=\frac{1}{p(u_{mn})}\left\{-\zeta(u_{mn})p(u)+\frac{1}{2}p'(u)+\left(\frac{1}{2}p'(u_{mn})+\zeta(u_{mn})p(u_{mn})\right)\right\}$$

onde

$$\int P_1(u)\,dn=\frac{\zeta(u_{mn})}{p(u_{mn})}\zeta(u)+\frac{1}{2}\frac{1}{p(u_{mn})}p(u)+\frac{\frac{1}{2}p'(u_{mn})+\zeta(u_{mn})p(u_{mn})}{p(u_{mn})}u$$

Prendendo $G(u)=0$ costruiamo allora la funzione

$$\sum(u)=\mathop{\Pi}_{mn}\frac{\sigma(u-u_{mn})}{\sigma(u)}e^{\int P_1(u)du}$$

Se i semiperiodi ω ω' diventano ∞, questo sviluppo diventa valido in tutto il piano delle u, le funzioni ellittiche diventano

$$p(u)=\frac{1}{u^2}\quad p'(u)=-\frac{2}{u^3}\quad \zeta(u)=\frac{1}{u}\quad \sigma(u)=u$$

e si ha

$$\mathop{\Pi}_{mn}\left(1-\frac{u_{mn}}{u}\right)e^{\frac{u_{mn}}{u}+\frac{1}{2}\frac{u^2_{mn}}{u^2}}$$

osservando che allora

$$\frac{1}{2}p'(u_{mn})+\zeta(u_{mn})p(u_{mn})=0$$

e quindi l'esponenziale risulta solo di due termini.

Questo sviluppo infinito è appunto quello noto della σ ellittica quando vi si faccia il cangiamento di variabile u in $\frac{1}{u}$.

Fisica. — *Azione dei raggi Röntgen e della luce ultravioletta sulla scarica esplosiva nell'aria* (¹). Nota dei dott. A. Sella e Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

1. Nei Rendiconti della seduta del 1° marzo 1896 di questa Accademia noi rendemmo di pubblica ragione un'esperienza relativa all'azione dei raggi Röntgen sopra una scintilla esplosiva in derivazione sulla corrente di scarica di un rocchetto, la quale illuminava il Crookes. Il fatto da noi osservato era che la distanza esplosiva era molto minore in presenza dei raggi Röntgen, che non quando questi venivano intercettati. L'esperienza riesce con tutta sicurezza nelle condizioni da noi descritte e la differenza fra le due distanze esplosive è così marcata — potendo variare circa del doppio da un caso

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.

all' altro — che non si potrebbe davvero immaginare un' esperienza più dimostrativa di un effetto dei raggi Röntgen.

Noi avevamo ricercato una disposizione sperimentale, che permettesse di mostrare un' azione dei raggi Röntgen sopra la corrente di scarica stessa, che li generava, per giungere a conclusioni circa la loro velocità; ed effettivamente ne segue un limite inferiore. Ma in seguito i fatti sperimentali, che inducono a ritenere i raggi Röntgen come costituiti da vibrazioni trasversali a brevissima lunghezza d' onda crebbero sì, che noi ci occupammo di studiare più intimamente la natura del fenomeno da noi scoperto. Tanto più che si presentava come degno di nota il fatto che secondo le esperienze di Hertz la luce ultravioletta favorisce la produzione di scintille, anzichè impedirla. Perciò diremo in questa Nota dapprima brevemente delle diverse condizioni, in cui ci fu dato di osservare il nostro fenomeno, per poi passare alle nuove esperienze, con cui riuscimmo ad ottenerne l'inversione e poi dimostrare che lo stesso ha luogo per la luce ultravioletta.

2. Nelle nostre prime esperienze, per potere variare comodamente la distanza esplosiva, avevamo posto a terra un punto del circuito fra l'elettrodo negativo del Crookes ed il polo negativo dello spinterometro. Presto ci accorgemmo che soventi questa è condizione essenziale, perchè il fenomeno riesca. Diciamo soventi e non sempre, perchè nella grandissima varietà di disposizioni che noi demmo ai fili, al Crookes ed all' eccitatore, trovammo dei casi in cui non è necessario mettere a terra il catodo, senza che ci sia però riuscito di afferrare le condizioni sperimentali, in cui ciò fosse o no necessario o per lo meno favorevole. Ad ogni modo sarà raccomandabile di porre sempre il catodo a terra, perchè se non avesse a favorire, non osservammo mai che potesse nuocere. Invece in tutte le disposizioni da noi realizzate il fenomeno spariva, se si poneva a terra il polo positivo dell' eccitatore.

Data la grande distanza esplosiva era facile il ricercare con schermi opportuni quale dei due poli doveva essere illuminato per ottenere l'azione impeditrice dei raggi Röntgen, e ci risultò che l' azione ha luogo quando i raggi battono sul *polo positivo*. Appena questo si trova nell' ombra geometrica della sorgente Röntgen, le scintille scoccano, anche se il tratto d'aria fra i due poli, ed il polo negativo seguitano ad essere illuminati. Se proprio si tratti della superficie del polo oppure dell'aria nell' immediata vicinanza, non potemmo decidere causa l' impossibilità di concentrare in un punto i raggi Röntgen, come in analoghe ricerche fece Hertz colla luce ultravioletta.

All' eccitatore si possono dare le forme più svariate, entro certi limiti però, come vedremo meglio in appresso; una disposizione molto istruttiva e che mostra anche senz' altro che si tratta di raggi Röntgen, si ha ponendo al polo negativo una lastra di alluminio e disponendo il tratto di scintilla coincidente col fascio di raggi Röntgen, sì che questi prima di arrivare sull' anodo debbono attraversare la lastra di alluminio.

Alla nostra esperienza si possono dare anche altre disposizioni. Essa si verifica quando la scintilla, su cui agiscono i raggi Röntgen, si trova inserita in serie nel circuito che illumina il Crookes. Così si possono rendere indipendenti le due correnti di scarica che accendono il Crookes e l'eccitatore, prendendo due rocchetti, i cui due primarî sieno in serie e su cui agisca lo stesso interruttore, e ponendo nel secondario dell'uno il Crookes e nel secondario dell'altro l'eccitatore.

Così aggiungeremo che nella nostra disposizione primitiva inserendo fra un elettrodo del Crookes ed il corrispondente polo dell'eccitatore dei circuiti a fortissima antoinduzione, come dei secondarî di grossi rocchetti, oppure delle grandi resistenze (colonne liquide, scintille laterali in serie, ecc.) il fenomeno si manteneva sempre.

Quando i raggi Röntgen impediscono la produzione della scintilla, si ha uno stato di cose molto sensibile alle più piccole perturbazioni. Così avvicinando al tratto esplosivo anche a parecchi centimetri un pezzo di vetro terminato a punta, la scintilla scocca immediatamente annullandosi l'effetto dei raggi Röntgen. Altrettanto avviene avvicinando un pezzo di cartone, ovvero circondando il braccio che porta il polo positivo (anche ad una certa distanza da questo) con un tubo di vetro, ma non così se questo tubo è di cautciù. Ad ogni modo bisogna avere alcune precauzioni per ottenere una grande differenza nelle due distanze esplosive, evitando la vicinanza di corpi estranei presso l'eccitatore, mantenendo bene puliti i poli di esso ecc.

3. L'esperienza fondamentale di Hertz sull'azione della luce ultravioletta sulle scintille, completata poi dagli studi di E. Wiedemann ed Ebert, Elster e Geitel, dimostra, come è noto, che quella favorisce la produzione di queste aumentando la distanza esplosiva e diminuendo il potenziale esplosivo (solo in un caso non bene determinato, Elster e Geitel mostrarono che la luce ultravioletta può agire in modo impediente sulle scariche date da una macchina elettrostatica coll'impedire il fiocco anodico). Ed è, in tale caso, essenziale che il polo illuminato sia il negativo.

Il fenomeno da noi osservato, che diremo il secondo fenomeno, è precisamente il rovescio di quello di Hertz, che diremo il primo; ed interessava quindi moltissimo studiarlo più da vicino.

Cominciammo col porre uno schermo opaco fra il Crookes e l'eccitatore in modo da eliminare i raggi Röntgen, e poi illuminammo l'eccitatore dall'altra parte con un arco voltaico, ricchissimo, come è noto, di radiazioni ultraviolette. Con nostra sorpresa constatammo che la luce dell'arco voltaico agisce nello stesso modo come i raggi Röntgen. Anzi con questa disposizione, cioè un eccitatore sottoposto da una parte all'azione di una sorgente Röntgen, e dall'altra di una sorgente ultravioletta, si può elegantemente dimostrare il diverso grado di trasparenza delle due radiazioni nei diversi corpi, ove si facciano funzionare questi da schermo ora da una parte, ora dall'altra. Anche in questo caso l'azione della luce ultravioletta si fa sentire sul *polo positivo.*

Ottenuto così parallelismo di azione fra le due radiazioni, importava potere osservare se anche coi raggi Röntgen si potesse ottenere il primo fenomeno. Ripetemmo allora la disposizione in cui Hertz scoprì il suo fenomeno, cioè due scintille, l'una attiva, l'altra passiva, date dai secondarii di due rocchetti in serie, essendo la lunghezza della scintilla passiva pochi millimetri fra poli piuttosto grossi. Sostituendo la scintilla attiva con un Crookes, noi osservammo che i raggi Röntgen facilitavano in questo caso la produzione della scintilla.

Non potendo però concentrare i raggi Röntgen con lenti in un punto dato, non era facile il constatare su quale dei due poli posti a così piccola distanza si facesse sentire l'azione. Dopo molti tentativi, che non staremo a descrivere, riferiamo una disposizione che permette di decidere facilmente la questione, ed anche di ottenere i due fenomeni col solo cambiare la distanza esplosiva.

Nella nostra disposizione primitiva (cioè eccitatore in derivazione sulla stessa scarica, che illumina il Crookes) i poli dell'eccitatore sieno costituiti da due sfere di ottone amalgamato del diametro di 52 mm. Allora, regolando l'intensità della corrente del primario del rocchetto, si possono avere distanze esplosive massime variabili. Alla distanza di 13 mm. si ha nettamente il primo fenomeno, per quanto in tale caso il Crookes si illumini debolissimamente; crescendo la distanza sino a 24 mm. si ha sempre ancora il primo fenomeno; verso i 30 mm. non si ha azione, ed a 38 mm. comparisce nettamente il secondo fenomeno. In queste condizioni è molto facile l'osservare che *nel primo fenomeno il polo illuminato vuol essere il negativo, nel secondo invece il positivo.*

Facendo agire su questo stesso eccitatore la luce di un arco voltaico dopo di avere schermato i raggi Röntgen, si osservano, parallelamente ai raggi Röntgen, i due fenomeni, avendosi nettamente il primo alla distanza esplosiva di 24 mm. il secondo a 38 mm. e così si scambia la funzione dei due poli.

Dobbiamo notare che perchè avvenisse il primo fenomeno, non ci accorgemmo mai della necessità che uno dei due poli fosse a terra, come avviene soventi pel secondo.

Il presentarsi del primo o del secondo fenomeno dipende dunque dalla distanza esplosiva. Però la *distanza esplosiva neutra*, cioè quella in cui non vi ha azione, ma bensì passaggio fra i due fenomeni, varia col diametro degli elettrodi dell'eccitatore.

Così con palline di 21 mm. di diametro si ha a tre mm. il primo fenomeno, a 17 mm. il secondo; cosicchè si può dire che si ottiene facilmente il primo con palle grosse relativamente alla distanza esplosiva, il secondo invece con palle piccole; non senza aggiungere però che con punte questo non compare più.

Wiedemann ed Ebert avevano mostrato che l'azione della luce ultravio-

letta non si fa sentire soltanto in quanto essa provoca scintille, che altrimenti non avverrebbero, ma anche con l'alterare la natura della scarica, quand'essa avviene nei due casi. Questo egli mostrava col fare agire un arco voltaico sopra un eccitatore alimentato da una macchina elettrostatica, e poi interponendo nel circuito un telefono, un tubo Geissler, osservando la linea percorsa dalla scintilla nell'aria, ecc.

Lo stesso osservammo anche noi e nei due casi, cioè a distanze esplosive tali che la scarica avvenisse sempre sia con, sia senza raggi Röntgen, ma vicine ora a quelle che danno il primo ora a quelle che danno il secondo fenomeno. Si sente nettamente alterato in altezza il suono della scintilla; un tubo Geissler, interposto nel circuito dell'eccitatore, si illumina con diversa intensità; cambia la traiettoria della scintilla nell'aria in modo da dimostrare, che l'azione della luce Röntgen altera profondamente la natura della scarica.

Su questo fatto vertono ora le nostre ricerche. Abbiamo però creduto di dovere pubblicare sin d'ora i nostri risultati, che dimostrano come l'azione dei raggi Röntgen su di una scintilla esplosiva, agisca ora in un senso ora nell'altro, a seconda delle circostanze, e che nei due casi si rovescia pure la funzione dei due poli e che anche in questo ordine di fatti, esiste parallelismo tra le radiazioni Röntgen e le ultraviolette.

Fisica. — *Sulla riflessione dei raggi Röntgen* [1]. Nota dei dott. R. Malagoli e C. Bonacini, presentata dal Socio Blaserna.

I. — Il prof. Röntgen, che da prime esperienze era stato condotto a negare la riflessione dei raggi da lui scoperti, ebbe invece prova di questo fenomeno nella traccia che un oggetto metallico collocato dietro la lastra determina sopra di essa. I prof. Battelli e Garbasso [2] confermarono poi con prove dirette la riflessione dei raggi X.

Nella presente Nota ci proponiamo di rendere conto di ricerche da noi fatte, allo scopo di utilizzare il fenomeno della riflessione per esaltare il rendimento fotografico dei raggi di Röntgen.

II. — Fino dalle prime prove ci venne fatto di notare, che i negativi ottenuti col nuovo processo presentano un carattere tutto particolare. Anche per deboli pose, la gelatina-bromuro resta impressionata per tutto lo spessore dello strato, talchè allo sviluppo l'imagine si mostra subito anche dalla parte del vetro: nel bagno fissatore poi le imagini indeboliscono stranamente, e talora scompaiono affatto. Quest'ultima è la ragione per cui le negative ottenute

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto tecnico di Modena.

(2) Nuovo Cimento. Serie 4ª, vol. III, fasc. 1.

coi raggi X richiedono d'ordinario un processo di *rinforzo*, quando se ne vogliano ricavare dei buoni positivi.

Sperimentando con lastre di diverse case, ortocromatiche ed ordinarie, con carte alla gelatina-bromuro, e con pellicole autotese, ed anche facendo uso di diversi sviluppi, notammo sempre le stesse particolarità. — Come altri sperimentatori, verificammo avere influenza sulla densità del negativo unicamente la *sensibilità generale* dello strato.

Il carattere speciale osservato nelle nostre fotografie, ci indusse a confrontare l'assorbimento degli strati fotografici per le radiazioni Röntgen e per quelle della luce ordinaria. — Una lastra sensibile fu ritagliata in quattro striscie di eguale larghezza: una di queste si lasciò intatta; e in ciascuna delle altre tre, partendo da un estremo, si levò la strato di gelatina per una porzione trasversale variabile dall'una all'altra progressivamente. Queste si sovrapposero ordinatamente alla prima, di modo che i raggi che arrivavano nelle diverse parti di essa erano condotti ad attraversare, oltre i vetri, un numero di strati sensibili 1, 2, 3, 4.

Esponendo questa pila di lastre, protetta da più giri di carta nera, alle radiazioni del tubo di Crookes, e sviluppandole poi simultaneamente, si ottenne in tutte una tonalità grigia pressochè dello stesso valore, ed in ciascuna non si aveva distacco apprezzabile fra le zone che si trovarono sottoposte ad un numero diverso di strati sensibili.

Esponendo un'identica pila di lastre, scoperta solo superiormente, ad una sorgente di luce ordinaria, notammo invece dopo lo sviluppo che l'azione grafica diminuiva rapidamente (come era prevedibile) colla profondità, e precisamente in ragione degli strati sensibili attraversati dalle radiazioni: sicchè la striscia inferiore appariva divisa in zone di densità nettamente progressive.

Fummo così condotti a concludere che: « dell'energia delle nuove radiazioni soltanto una minima parte viene utilizzata nella produzione dell'imagine latente ».

È evidente poi che il diverso comportamento del vetro per i raggi X e gli ordinarî, non ha influenza sulla comparabilità dei risultati.

III. — Ciò posto, pensammo se non fosse possibile di esaltare l'effetto fotografico dei raggi X conducendoli ad attraversare nuovamente lo strato sensibile dopo aver agito sopra di esso. Ci siamo valsi perciò dell'azione riflettente di un metallo collocato dietro la lastra, disponendo le cose nel modo seguente.

Una lastra sensibile presentava al tubo di Crookes la sua faccia scoperta, su cui era disposto l'oggetto da riprodurre (un intaglio metallico): a contatto della pellicola e per una sola porzione di essa, stava una lamina speculare di ottone, funzionante da riflettore. Allo sviluppo i neri del negativo riuscirono molto più marcati nella parte dell'imagine sovrastante al riflettore; anzi, di questo disegnavasi distintamente l'intero contorno.

IV. Volendo passare ad uno studio sistematico del fenomeno, cercammo dapprima se questo potesse attribuirsi ad una causa diversa dalla riflessione.

È noto per le classiche esperienze di Carey-Lea ([1]), come ogni forma dell' energia sia capace di determinare un' azione latente sul bromuro d' argento. Poteva perciò sospettarsi che la causa del rinforzo del fondo fosse la pressione meccanica risentita dallo strato sensibile, che si viene a trovare fra il riflettore e la lastra di vetro caricata del soggetto. Ma disponendo fra la pellicola ed il riflettore una sottile cornice che ne sopprimesse il contatto, il fenomeno si verificò ancora, sebbene meno accentuato. Di questo indebolimento si può trovare ragione nell' aumentata distanza fra la pellicola ed il riflettore; difatti in altre esperienze con distanze diverse notammo che già a circa 3 millimetri il rinforzo era pressochè inapprezzabile; mentrechè facendo galleggiare una porzione dello strato sopra il mercurio, per modo che il contatto sia intimissimo, il rinforzo del fondo riesce molto intenso.

Poteva ancora ascriversi il fenomeno ad una azione elettrica; dappoichè le esperienze del Righi provano che i raggi X determinano un campo elettrostatico. Ma dividendo il riflettore in due parti, una delle quali durante la posa fu mantenuta in buon contatto col suolo, non si notò alcuna differenza nei due rinforzi. E neppure si aveva differenza, isolando il riflettore con un avvolgimento di carta.

Queste ricerche preliminari, assieme ad un' altra sull' influenza dello spessore del riflettore, che risultò negativa, ci confermarono pienamente nell' idea che il fenomeno studiato dipende realmente dalla riflessione superficiale dei corpi sottoposti allo strato sensibile.

V. — Si venne quindi allo studio del comportamento relativo dei diversi corpi, e specialmente dei metalli.

Una lastra sensibile veniva esposta al tubo Crookes senza alcun oggetto sovrapposto, ma avendo in contatto della pellicola lamine metalliche di eguale spessore, riconoscibili per la forma diversa dall' una all' altra. Dopo sviluppo, si confrontavano le opacità delle singole regioni corrispondenti ai riflettori, con quella del fondo.

Per questi confronti si usò un diafanometro di Abney: esso ci forniva gli spessori diversi di un vetro affumicato, che avevano lo stesso potere assorbente delle regioni esaminate sul negativo. I valori fotometrici forniti da questo istrumento, sono da ritenersi largamente approssimati (l' errore può arrivare a 1:10).

I numeri trovati non misurano il potere riflettente dei metalli corrispondenti alle zone studiate, poichè la trasparenza t del negativo è legata alla quantità q delle radiazioni fotografiche agenti per mezzo della nota formola di Abney:

$$t = e^{-\alpha q}$$

([1]) Bulletin de la Société Française de Photographie. 1892.

α essendo un coefficiente che dipende dal grado di sensibilità della lastra, dallo spessore dello strato sensibile, e dai coefficienti di assorbimento della gelatina pura e satura di argento ridotto. Qualora fossero noti questi ultimi elementi, si potrebbero determinare da questa formola i valori di q relativi alla trasparenza dell' immagine di ciascun riflettore e alla trasparenza del fondo; e quindi, per differenza, i coefficienti di riflessione cercati [1].

VI. — I risultati ottenuti cogli stessi metalli in diversi negativi non furono per vero molto concordanti; perchè, oltre l' influenza della maggiore o minore perfezione del contatto colla pellicola, potemmo notare che aveva pure grande importanza il grado di pulitura della superficie metallica.

Stralciamo dal giornale delle nostre esperienze i valori trovati in due delle migliori prove: esse serviranno a dare un' idea dell' effetto comparativo dei diversi metalli nella riflessione, e della loro efficacia nell' aumentare l' opacità del fondo.

Metalli	Diafanometria del riflettore	Diafanometria del fondo	Metalli	Diafanometria del riflettore	Diafanometria del fondo
Alluminio...	230	230	Pakfong....	290	250
Stagno......	275	»	Acciaio.....	360	»
Ottone......	300	»	Ferro.......	450	»
Zinco.......	340	»	Platino.....	495	»
Piombo.....	370	»	Rame.......	570	»

Da questa tavola si può ad esempio arguire che un riflettore di rame permetterebbe di ridurre la posa circa a metà, dappoichè esso raddoppia l' effetto grafico dei raggi X.

Dei corpi non metallici da noi adoperati come riflettori, la maggior parte mostrò effetti poco notevoli: noteremo però il vetro e la selenite come i migliori.

VII. — Dall' esame dei negativi dove sia riprodotto un oggetto qualunque, si può anche dedurre una loro singolare proprietà. I bianchi dell' immagine sono molto più puri nella regione che durante la posa sovrasta il

[1] A questo proposito facciamo notare che i valori dati dai proff. Battelli e Garbasso (loc. cit.) per la trasparenza dei diversi corpi ai raggi di Röntgen, rappresentano invece soltanto la trasparenza ottica relativa delle loro imagini fotografiche. Infatti, dalla formola di Abney si deduce che la trasparenza relativa di due regioni di uno stesso negativo è data da:

$$T = e^{-\alpha(q-q')}$$

mentre la trasparenza relativa ϑ dei due corpi per i raggi di Röntgen, sarebbe $\vartheta = \frac{q}{q'}$. Cosicchè ϑ, lungi dall' essere proporzionale a T, risulta legato con essa dalla relazione:

$$\vartheta = 1 - \frac{1}{\alpha q'} \log T$$

riflettore, quasichè l'oggetto riprodotto presentasse nelle parti corrispondenti una maggiore opacità.

Abbiamo lungamente cercato quale potesse essere la causa di questa particolarità. Senza dilungarci nel riferire le ricerche che ci diedero risultato negativo, possiamo ormai dire in base a ripetute esperienze, che il fenomeno è dovuto ai corpi sottostanti alla lastra durante la posa, in particolare al sostegno. Questi corpi diffondono dei raggi X che vanno a colpire lo strato sensibile dal di sotto, in tutta la regione non protetta dal riflettore, producendovi un velo. Difatti, se si ha cura di sopprimere l'intervento di questi raggi diffusi, facendo sì che sotto la lastra non si trovino corpi che a grandissima distanza, il fenomeno non si verifica più, cioè i bianchi sono egualmente puri in tutte le regioni della lastra.

Dopo ciò è intanto da ritenere che nessun negativo finora ottenuto col processo Röntgen sia andato esente dal velo dovuto alla diffusione dei corpi sottostanti.

La possibilità poi di evitare questo velo è una nuova ragione per raccomandare l'uso del riflettore, il quale concorre ad avvantaggiare la prova, e col suo potere riflettente, e colla sua opacità.

Chimica. — *Sui cementi idraulici.* Nota del dott. G. Oddo, presentata dal Socio Cannizzaro.

I lavori sui cementi, che io ho pubblicato in collaborazione con E. Manzella [1], hanno avuto l'onore di due riviste critiche, una dell'illustre prof. Cossa [2] e l'altra del dott. Rebufatt [3].

Sopra una quistione così complessa ed ancora oscura, com'è quella della costituzione dei cementi e dei fenomeni che avvengono durante la presa, la critica non mi sorprende, poichè chi ha coltivato un po' questo campo, saprà che, *quot sunt capita tot sunt sententiae.*

E però dalla discussione dei fatti nel nostro caso risulterà, di quali osservazioni si debba tener conto.

Il prof. Cossa incomincia con la seguente osservazione:

« Certamente il solo studio della composizione chimica mediata di un « cemento non può servire a giudicare della natura delle specie chimiche che « lo compongono (silicati, alluminati ecc.); però si ammette che anche dalla « sola composizione centesimale si possono ricavare conseguenze utili per rico- « noscere il loro valore pratico ... ».

(1) Rendic. della R. Accad. dei Lincei 1895, vol. IV, 2° sem., pag. 19 e Gazzetta chimica ital. 1895, V. II, p. 101.

(2) Rendiconti 1895, vol. IV, 2° sem., pag. 263.

(3) Gazz. ch. it., XXV, parte II, pag. 481.

Per rispondere, citerò alcuni tratti delle Memorie di Le Chatelier, all' autorità del quale il prof, Cossa si riferisce, e la quale perciò non può essere sospetta:

« L'analyse chimique brute n'apprend rien sur la nature des composés « formés; elle ne distingue pas un mélange de silice et de chaux, d'un sili- « cate de chaux, un ciment simplement décarbonaté qui n'est pas susceptible « de faire prise, d'un ciment véritable cuit à point.

« Le seul renseignement utile que l'on puisse tirer de l'analyse chimi- « que est de savoir si le ciment ne renferme pas un excès de base, c'est-à- « dire plus de 3 équivalents de protoxyde CaO, MgO, pour 1 équivalent « d'acide (SiO_2, Al_2O_3) . . . . .

« L'analyse *élémentaire* d'un ciment ne peut donc indiquer qu'une limite « de composition au delà de laquelle tous les produits obtenus sont certaine- « ment mauvais. L'analyse *immédiate*, si elle était possible, pourrait seule « jeter quelque jour sur les qualités d'un ciment . . . . .

« J'ai essayé, sans succès, diverses méthodes d'analyse immédiate plus « ou moins détournées: action des sels ammoniacaux, mesure calorimétrique « de la chaleur de dissolution dans les acides, examen de lames minces au « microscope; mais je n'ai réussi par aucune de ces méthodes à obtenir des « resultats concluants » [1].

E nella seconda Memoria [2] ribadisce più volte questi concetti e così a pag. 258 dice:

« Les ciments ne sont pas de mélanges de composés définis, mais des « mélanges de semblable composés: il est donc tout à fait irrationnel de cher- « cher dans une composition chimique donnée un indice quelconque de qua- « lité, il ne faut y voir qu'une probabilité d'analogie avec un autre produit « déterminé ».

Non ci pare ora dubbio, che le poche conseguenze utili che si possono ricavare dalla composizione centesimale per riconoscere il valore pratico dei cementi sono fallaci, e che noi non fummo nè temerarî, nè trascurati, nel ricavare dal nostro lavoro di analisi le seguenti conclusioni (pag. 25):

« Da questi risultati riesce evidente, che nella composizione centesimale « dei cementi italiani ed esteri non esistono notevoli differenze. Faremo sol- « tanto rilevare che tutti i cementi italiani a lenta presa, eccettuato quello « di Marchino, che ha una composizione centesimale del tutto speciale, con- « tengono circa l'1 °/₀ di calce in più dei cementi esteri. Faremo osservare « inoltre, poichè ciò depone per la bontà dei prodotti, che la quantità di ma- « gnesia, di acido solforico e di alcali che contengono o è trascurabile, o è « molto lontana dai limiti di tolleranza. Intanto per ora di questi risultati

[1] Annales des Mines, s. 8ª, tom. XI, pag. 458-460.

[2] Ibidem, s. 9, t. IV, pag. 252.

« di analisi così concordanti, noi possiamo trarre profitto per stabilire, in quale « rapporto stanno nei cementi le basi e gli acidi... ».

Dopo quanto ho riportato a proposito dei tentativi infruttuosi di analisi immediata eseguiti da Le Chatelier, parmi evidente il minore valore della 2ª osservazione:

« Si è trascurato di determinare con saggi microchimici, o almeno con « osservazioni microscopiche, la natura delle sostanze insolubili nell'acido « cloridrico ».

Quale importanza infatti avrebbe potuto avere questa determinazione, consigliata ora per la prima volta, in un miscuglio di sabbia quarzosa e silicati (1) che alla temperatura elevata alla quale si cuociono i cementi ha resistito all'azione della calce, è poi insolubile in acido cloridrico e non oltrepassa ordinariamente il 3 %?

Quale parte può avere questo residuo nel fenomeno della presa, se non quella di funzionare come materiale inerte?

Nella 3ª obiezione il prof. Cossa non trova sufficientemente fondata la conclusione dedotta dalle nostre analisi, che cioè la quantità di basi nei cementi a lenta supera quella dei cementi a rapida, perchè abbiamo confrontato la media aritmetica del tenore percentuale di *otto* cementi a lenta con quella corrispondente di soli *quattro* cementi a rapida presa e crede che « qualora avessimo analizzato un egual numero di cementi per ogni serie, con « molta probabilità la differenza sarebbe potuta riuscire di senso opposto ».

Per seguire il suo consiglio, confrontiamo egual numero di cementi a lenta e a rapida presa, forniti dalle medesime fabbriche (2).

COMPONENTI	Società anonima		F. Gavelli		Schifferdecker		Rapporto tra le basi e gli acidi in tutti i campioni di cementi analizzati (3)	
	lenta 1ª qualità	rapida	lenta	rapida	lenta	rapida		
SiO_2	20,26	21,09	20,18	23,76	19,16	19,33		
Al_2O_3	9,44	10,41	8,88	10,06	9,00	10,20		
Fe_2O_3	1,07	1,02	1,99	1,08	2,10	2,00		
CaO	64,01	60,69	64,05	55,92	60,04	57,85		
MgO	1,01	—	0,70	0,80	0,86	1,00	lenta	rapida
$\frac{CaO + MgO}{SiO_2Al_2 + O_3 + Fe_2O_3}$	2,68	2,36	2,67	2,04	2,69	2,43	2,55	2,21

(1) Fresenius, *Traité d'analyse chimique*, pag. 859.

(2) Omettiamo quelli di Marchino, perchè, come abbiamo fatto rilevare nel nostro lavoro di analisi, il cemento a lenta ha una composizione del tutto speciale.

(3) Eccettuato quello di Marchino a lenta, e se anche di esso si tien conto, il rapporto diventa 2,44.

Dando uno sguardo a questo quadro si osserva subito che la quantità di basi esistente nei cementi a lenta, supera quella dei cementi a rapida. Nè deve ritenersi che questo fatto sia accidentale per questi tre casi, perchè a mio invito le seguenti fabbriche: Società Anonima, Società Cementi, F. Savelli e anche Marchino e C.ⁱ mi hanno concordemente affermato [1], che per la preparazione dei cementi a lenta e a rapida impiegano sempre marne diverse, e quelle che adoperano per i cementi a rapida sono più ricche di argilla.

Basterà poi dare uno sguardo ai numerosi quadri di analisi, che si trovano in tutti i trattati, come in quello di Candlot, *Ciments et chaux hydrauliques*, pag. 34 e 76, che si riferiscono a prodotti di diverse nazioni; e sentire finalmente Le Chatelier che dice, parlando dei cementi a pronta presa (pag. 433, 1ª Mem.):

« ... ceux-ci différent complètement par leur composition, leur cuisson « et leur emploi des ciments Portland. L'expérience a montré que les meil- « leurs résultats étaient obtenus en employant des calcaires riches en argile, « en cuissant peu la roche, et enfin en laissant éteindre le ciment à l'air avant « son emploi ».

A noi quindi si poteva fare il rimprovero, di avere rilevato un fatto non nuovo, ma non mai quello di essere arrivati ad una conclusione erronea.

Per la 5ª osservazione ammiro la diligenza con la quale il prof. Cossa ha riveduto il nostro lavoro; però l'inesattezza, che egli rileva, è dovuta ad un errore di stampa a noi sfuggito, avendo scritto a pag. 25 la parola *pronta* invece di *lenta*. Basta esaminare il seguente quadro, per accorgersi dell' esattezza della nostra conclusione, che i cementi italiani a lenta contengono circa l' 1°/₀ di calce in più dei cementi esteri.

Fabbriche italiane		Calce °/₀	Fabbriche estere		Calce °/₀
F. Gavelli		64,05	Dickerhoff		62,36
Società anonima	1ª qual.	63,53	Schifferdecker		60,04
	2ª »	64,01	Port. Mannheimer		61,00
Società Cementi		62,74	Pelloux	lenta	57,96
				lentissima	56,64

Avendo risposto alle quattro obiezioni d' indole generale, restano per il primo lavoro le osservazioni 1ª, 4ª e 6ª.

Conveniamo che se avessimo esposto i risultati di un' analisi completa, nella quale la somma degli elementi doveva corrispondere alla quantità del composto impiegato, sarebbe stato un errore gravissimo l' esprimere quei composti con la quantità d' idrato a cui corrispondono e non di anidridi. Ma trattandosi di determinazioni analitiche comparative, nelle quali non si è nemmeno tenuto conto dei prodotti che si trovano in quantità trascurabile, credo che quello si potrà considerare come un peccato veniale, dal quale la

[1] Conservo le copie delle mie lettere e le risposte gentilmente ottenute.

comparazione non risentirà nessun nocevole effetto, come nemmeno dall' aver dato per la magnesia la media 0,90 invece di 0,45 (4ª osserv.) e una citazione letteraria errata (6ª osserv.).

Al secondo nostro lavoro il prof. Cossa muove le seguenti due obiezioni:

1.° Non abbiamo tenuto conto sufficientemente dei lavori di Le Chatelier, e avremmo dovuto definire quali sono i componenti che s' idratano e quali specie chimiche siano i sali polibasici dei cementi.

2.° Abbiamo erroneamente adoperato carbonato potassico per anidride carbonica.

Lo scopo del nostro lavoro è molto più modesto di quello che il prof. Cossa avrebbe desiderato.

Pure incominciando ad occuparci dei fenomeni che avvengono durante la presa, noi ci siamo limitati a ricercare (pag. 25): « se i cementi italiani « ed esteri, sia prima che dopo la presa, si comportassero ugualmente rispetto « ad un reattivo comune ». Dalle nostre esperienze è risultato con evidenza che si comportano invece in modo diverso, e siamo venuti alla conclusione che si deve perciò ammettere che hanno costituzione intima diversa.

La soluzione titolata di carbonato potassico è stata per questo scopo un eccellente reattivo, poichè la potassa che si metteva in libertà c' indicava la quantità di calce, che reagiva nelle successive unità di tempo; mentre l' esistenza nei cementi di acidi liberi ci sarebbe stata svelata da una diminuzione dell' alcalinità totale.

Nell' adoperarla non potevamo aver la pretesa di riprodurre condizioni che in natura non esistono e, se invece di avvalersi di un periodo isolato, avesse tenuto di mira la tessitura completa dei nostri lavori, il prof. Cossa non vi avrebbe trovato nessuno scopo determinato di adoperare il carbonato potassico per anidride carbonica e forse non avrebbe creduta necessaria l' ironia che noi abbiamo fatto come quel fisiologo, il quale volendo conoscere l' azione fisiologica dell' acido citrico sull' organismo, studia quella del citrato di chinina.

È proprio vero poi che i lavori di Le Chatelier dovevano esser tenuti in maggior considerazione, di quel che fu da noi fatto, come quelli che avessero chiarito definitivamente, come pare ammettano i due critici, la costituzione dei materiali idraulici e i fenomeni che avvengono durante la presa e rendessero perciò inutile ogni altra indagine in questo campo?

A me così non è sembrato e pur riservandomi di discutere ampiamente quei lavori, quando avrò raccolto maggior numero di dati sperimentali, mi limito per ora a poche osservazioni.

Anzitutto Le Chatelier, per le esigenze del suo metodo, potè studiare al microscopio con la luce polarizzata soltanto il cemento Portland, perchè è il solo a struttura cristallina.

Per la medesima ragione dei tre silicati $SiO_2 . CaO$; $SiO_2 . 2 CaO$ ed $SiO_2 . 3 CaO$, preparati per sintesi, studiò soltanto il primo, che non fa presa, essendo gli altri due amorfi; e dell' ossido di calcio, degli alluminati $Al_2O_3 . CaO$ e $Al_2O_3 . 3CaO$ sintetici, per i quali il merito di averli ottenuti per il primo nel 1865 e di averne dimostrato l' idraulicità è dovuto a Fremy, nessun criterio cristallografico potè ricavare per ricercarne poi la presenza nei cementi anidri, perchè, essendo cristallizzati nel sistema cubico, sono inattivi sulla luce polarizzata.

Interpretando i risultati delle sue ricerche, viene alle seguenti conclusioni generali.

I cementi Portland anidri:

1. non contengono calce libera (pag. 421);

2. sono costituiti da due elementi essenziali:

a) il silicato $SiO_2 . 3 CaO$ che si presenta nelle sezioni in cristalli che l' autore chiama pseudocubici; questo, quando s' idrata, si decompone in $SiO_2 . CaO . 2{,}5 H_2O + 2 Ca(OH)_2$ e determina la presa (pag. 425);

b) un silicato di alluminio, di ferro e di calcio, che non è idraulico, ma funziona nella cottura come fondente e rende possibile la precipitazione del silicato basico.

L' esistenza di piccole quantità di alluminati di calce è solamente probabile (pagg. 414, 416, 421).

Quali sono i dati sperimentali che ve lo hanno condotto?

Ritiene che la calce libera porterebbe la disgregazione dei materiali dopo la presa, perchè in alcune esperienze (pag. 420 1ª Mem.) trova che basta l' 1 °/₀ di *calce dal nitrato fortemente calcinata* per produrre tale effetto.

Ora è noto che non tutte le varietà di calce si comportano ugualmente rispetto all' acqua. Quella dal carbonato granulosa si estingue istantaneamente, quella dal nitrato cristallina invece molto lentamente, dopo ore o all' ebollizione con acqua e non è per lo meno dimostrato perchè se calce libera esiste nei cementi, essa debba paragonarsi a questa e non all' altra [1].

Vedremo in seguito che sottoponendo alla temperatura del forno elettrico fornita da una tensione di 40 Volta e 120 Ampère dei pezzi di calce dal carbonato, sino a farne fondere soltanto una porzione, questa, immersa nell' acqua, dopo otto giorni non era estinta completamente, mentre la porzione ri-

[1] Lo stesso Le Chetelier dice a pag. 452 1ª Mem.: Pour que l'extinction de la chaux produise des effets aussi désastreux, il faut que son extinction soit très lente et ne se complète qu'après le durcissement du mortier. La chaux obtenue par la cuisson du calcaire pur constitue une masse extrêmement poreuse, qui s'éteint dans l' intervalle de quelques secondes; sous cet état elle est peu nuisible, car son hydratation est terminée avant le commencement du durcissement proprement dit. C'est là ce-qui paraît se passer pour les ciments à prise rapide cuits à basse témpérature et très poreux. Mais si la chaux est compacte et ne présente pas des pores possedant une surface d' attaque par l' eau extrêmement considérable, l' hydratation devient fort lente.

masta granulosa e attaccata alla precedente, quantunque avesse subito quella elevata temperatura, si estinse istantaneamente; e similmente fondendo al forno elettrico un miscuglio intimo di $Si\,O_2$ (1 mol.) e CaO (6 mol.) si forma dell' ortosilicato di calcio e rimane della calce che si estingue rapidamente.

Studiamo ora per quali dati sperimentali Le Chatelier al silicato idraulico (eterno scoglio di tutti i cultori di questo campo) attribuisce la formola $Si\,O_2\,3\,CaO$.

Egli non l' ha potuto preparare per fusione diretta di 1 mol. di $Si\,O_2$ con 3 mol. di CaO, anche in presenza di solventi. Crede di averlo ottenuto per l' azione del vapore acqueo sul sale doppio

$$Si\,O_2 . 2\,CaO . Ca\,Cl_2$$

a temperatura un po' superiore ai 450°.

È una polvere amorfa, che fa presa nell' acqua bollente e soltanto dopo otto giorni dà mattoni paragonabili a quelli dei cementi. L' autore crede che sia un composto e non un miscuglio soltanto, perchè se esso contenesse della calce libera, le mattonelle bollite con acqua dovrebbero disgregarsi.

Siamo in un circolo vizioso, e questa volta non si capisce affatto come mai una calce ottenuta a circa 450° possa paragonarsi a quella fusa che si prepara a 1500°.

Avrebbe potuto l' autore osservare al microscopio le sezioni delle mattonelle indurite, dando un' utile applicazione al metodo d' indagini che egli istituisce sui cementi, e senza dubbio con ottimo discernimento, ma anche questo ha trascurato di fare.

Viceversa silicati di calcio che mischiati con calce fanno presa, ne sono stati preparati ad incominciare da Fuchs nel 1833 e a venire a Fremy nel 1865, quantunque non siano stati studiati.

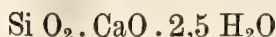
Vedremo in seguito che, fondendo al forno elettrico i miscugli intimi di 1 mol. di $Si\,O_2$ e 3 o 6 mol. di CaO, non ho ottenuto questo preteso silicato tricalcico, bensì il metasilicato di calcio.

Studiando poi Le Chatelier al microscopio le sezioni dei cementi anidri, ha trovato quei cristalli pseudocubici che ho sopra rammentato e sono costituiti da silicati; li ha riscontrati in quantità più abbondante nei grappiers, e dalle analisi di questi ultimi, che contengono ancora 3-4 °/₀ di $Al_2\,O_3\,Fe_2\,O_3$ oltre la magnesia e sono tutt' altro che decisive, ricava che i cristalli pseudocubici hanno la composizione $Si\,O_2 . 3\,CaO$, senza pensare nemmeno ai casi d' isomorfismo che egli ha riscontrato tra gli alluminati $Al_2\,O_3 . CaO$ e $Al_2\,O_3 . 3\,CaO$ e che anche nei silicati crede possibili, dicendo a pag. 419 1ª Mem. per ispiegare un' altra osservazione: « On peut supposer que les deux silicates $Si\,O_2 . 2\,CaO$ et $Si\,O_2 . 3\,CaO$ forment des mélanges isomorfes ... ».

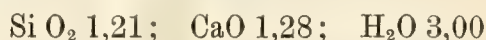
È bene quindi osservare che nessuna relazione esiste tra il lavoro di sintesi

e quello di analisi e nell'un caso e nell'altro le conclusioni sono per lo meno premature.

Nè meno arbitrariamente ricava la formola del silicato idrato

$$Si\,O_2 . CaO . 2{,}5\,H_2O$$

la cui formazione ha determinato la presa.

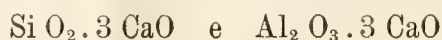
Egli non lo prepara per idratazione del silicato anidro, bensì mischiando una soluzione colloidale di silice con un eccesso di acqua di calce. È amorfo e molto voluminoso (1 grammo arriva ad occupare il volume di 2 litri). Si decompone lavandolo con acqua sino a lasciare silice pura; però la decomposizione viene limitata dalla presenza di acqua di calce; e avendo ottenuto in un' analisi in equivalenti (pag. 402):

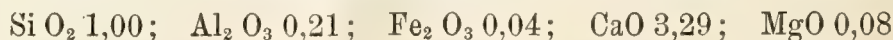
$$Si\,O_2\ 1{,}21; \quad CaO\ 1{,}28; \quad H_2O\ 3{,}00$$

togliendo $^1/_{15}$ di equivalente di $Ca(OH)_2$ calcola la formola che ho sopra riportato. Questo per via sintetica.

Nell' analisi microchimica dei cementi idratati, osserva assieme a larghi cristalli a doppia refrazione energica d' idrato di calcio degli aghi sottili, che vengono distrutti dai sali ammoniacali lasciando silice gelatinosa e senz' altro conchiude (pag. 424):

« . . . *ils* (gli aghi) sont constitués par un silicate de chaux auquel j'attribuerai la formule du seul silicate de chaux hydraté que j'aie pu reproduire synthétiquement: $Si\,O_2 . CaO, 2{,}5\,H_2O$ ».

Dimostra l' incertezza che vi è ancora sullo stato di combinazione dei varî componenti dei cementi, un certo disaccordo che vi è a proposito della forma di combinazione dell' allumina. Nel mentre l' autore mira a confermare l' opinione che i composti che tendono a formarsi sono:

$$Si\,O_2 . 3\,CaO \quad e \quad Al_2\,O_3 . 3\,CaO$$

e che perciò, contando l' allumina (e con essa l' ossido di ferro) tra gli acidi, il rapporto tra le basi e gli acidi non può superare il 3, abbiamo visto che nei cementi anidri egli dice di avere osservato quasi esclusivamente $Si\,O_2\ 3\,CaO$ e un silicato doppio di allumina, di ferro e di calce e che *ammette soltanto come probadile l' esistenza di piccole quantità di alluminato di calce.* L' allumina quindi, secondo questa interpretazione dei dati sperimentali, funziona principalmente da base. Calcoliamo il rapporto che esiste tra gli equivalenti di basi e di acidi nella seguente analisi di un cemento di *buona qualità* che trovo riportata in equivalenti dall' autore a pag. 459 della 1ª Mem.

$$Si\,O_2\ 1{,}00; \quad Al_2\,O_3\ 0{,}21; \quad Fe_2\,O_3\ 0{,}04; \quad CaO\ 3{,}29; \quad MgO\ 0{,}08$$

Si ha:

$$\frac{CaO + MgO + Al_2\,O_3 + F_2\,O_3}{Si\,O_2} = 3{,}62$$

e se anche non si tien conto degli ossidi di alluminio e di ferro, ammettendo che essi funzionino e da basi e da acidi, si ha sempre:

$$\frac{CaO\ 3{,}29 + MgO\ 0{,}08}{Si\,O_2\ 1} = 3{,}37.$$

Poichè il rapporto supera il 3, da questo dilemma non si esce: o si deve ammettere in quel Portland, che è pure di buona qualità, della calce libera; ovvero la presenza di silicati più basici ancora del preteso $Si\,O_2\,3\,CaO$. In tutti e due i casi non si è di accordo con le sue conclusioni ([1]).

Al dott. Rebufatt ho risposto implicitamente. Gli farò soltanto osservare che il nostro lavoro non è stato eseguito a scopo pratico e che quindi tutto il lusso di conoscenze di norme delle diverse nazioni, che si usano nella pratica per la ricezione dei cementi (norme ancora mal definite e molto discusse!) non è opportuno, tanto più perchè noi, ogni volta che ci siamo discostati dalla pratica, ne abbiamo dato avviso nelle nostre memorie; e lo abbiamo fatto senza scrupolo, perchè le nostre ricerche erano comparative, come dichiariamo fin dal primo periodo della 1ª Memoria.

Quelle norme non ci erano sfuggite e a pag. 21 del primo lavoro; le abbiamo tutte riportate, e siamo stati anzi i primi a lamentare che nulla di simile si sia fatto ancora in Italia per regolare l' industria cementizia, che ha raggiunto da noi così mirabili progressi.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

RICCI G. *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* Presentata dal Socio CREMONA.

LORI F. *Influenza degli sforzi di tensione e di compressione sulle proprietà magnetiche del ferro.* Presentata dal Socio BLASERNA.

([1]) Lo stesso Le Chatelier fu meno corrivo del prof. Cossa e del dott. Rebufatt nel giudicare i suoi lavori, poichè a pag. 387 1ª Mem. dice:

« Si j'insiste sur le peu de résultats obtenus par des savants éminents, c'est pour montrer la difficulté de cette étude et m'excuser de publier un travail qui ne permet pas de formuler sur ce sujet des conclusions aussi complètes qui je l'aurais voulu. Je n'ai pas la prétention d'avoir résolu complètement le probléme que j'ai abordé; j'espère seulement avoir fait connaître un assez grand nombre de faits nouveaux qui pourront servir de matériaux utiles pour établir un jour la théorie complète des mortiers hydrauliques.

P. B.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine dei fenomeni solari osservati al R. Osservatorio del Collegio Romano nel 1° trimestre del 1896.* Nota del Socio P. Tacchini.

Il numero dei giorni di osservazione fu di 63 per le protuberanze e di 73 per le macchie e per le facole. Dalle latitudini calcolate per ciascuna protuberanza e per i gruppi delle macchie e delle facole, ricavai i seguenti dati per la frequenza relativa ai diversi fenomeni in ciascuna zona nei due emisferi del sole.

1° trimestre 1896.

Latitudine	Protuberanze		Facole		Macchie	
90° + 80°	0,006					
80 + 70	0,003					
70 + 60	0,006					
60 + 50	0,006					
50 + 40	0,052	0,495	0,000			
40 + 30	0,114		0,016			
30 + 20	0,136		0,108	0,436	0,000	
20 + 10	0,114		0,172		0,250	0,391
10 . 0	0,058		0,140		0,141	
0 — 10	0,086		0,151		0,047	
10 — 20	0,130		0,236		0,421	0,609
20 — 30	0,116		0,145	0,564	0,141	
30 — 40	0,097		0,027			
40 — 50	0,050	0,505	0,005			
50 — 60	0,014					
60 — 70	0,006					
70 — 80	0,006					
80 — 90	0,000					

Nel complesso dunque in questo trimestre la frequenza delle protuberanze può considerarsi eguale nei due emisferi e le protuberanze si trovano sempre numerose dall' equatore a $\pm$ 50 gradi come nell' ultimo trimestre del 1895, mentre furono assai scarse o mancanti nelle altre zone.

Le facole furono un poco più frequenti nelle zone australi, specialmente nel mese di marzo; la zona di maggiore frequenza per le facole è, come nel trimestre precedente, estesa dall' equatore a $\pm$ 20 gradi, ed è pure egualmente manifesto il salto brusco nella frequenza dopo le latitudini di $\pm$ 30 gradi.

Le macchie, come le facole, furono più frequenti nelle zone australi, e continuarono a presentare i due massimi di frequenza nelle zone $\pm 10^\circ$ $\pm 20^\circ$ cioè nelle stesse zone dei massimi delle facole. Come nel precedente trimestre le macchie non oltrepassarono la latitudine di 30 gradi.

Una sola eruzione metallica fu osservata, e questa nel giorno 5 di febbraio al bordo W alla latitudine di $-14^\circ,3$ in corrispondenza del tramonto di un gruppo di macchie e facole. Sembra dunque che in questo trimestre si possa ritenere maggiore l' attività solare nell' emisfero S.

Fisica. — *Nuovi studî sulla dispersione elettrica prodotta dai raggi di Röntgen.* Nota del Corrispondente Augusto Righi.

§ 1. *Esame di una causa d'errore.*

Durante le mie ricerche intorno ai fenomeni elettrici prodotti dai raggi di Röntgen, delle quali ho reso conto sommariamente in varie successive Note [1], ho avuto occasione di constatare, che non sempre basta collocare una grossa lastra di piombo fra la sorgente dei raggi ed il conduttore elettrizzato, onde sottrarre quest' ultimo alla loro azione; e siccome l' ignorare questa circostanza può produrre, e forse ha prodotto già, dei gravi errori, così ho creduto necessario mettere in piena luce un fatto, che, almeno sotto questo rapporto, è di qualche importanza.

[1] *Sulla produzione di fenomeni elettrici per mezzo dei raggi di Röntgen.* Rendiconti della R. Accad. di Bologna, 9 febbraio, 1896. — *Phénomènes électriques produits par les rayons de Röntgen.* Compt. Rend. 17 février, 1896. — *Sulla dispersione dell'elettricità prodotta dai raggi di Röntgen.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1 marzo, 1896. — *Sulla produzione delle ombre di Röntgen per mezzo della dispersione elettrica provocata dai raggi* X. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1 Marzo, 1896. — *Sulla influenza della natura e pressione del gas ambiente nella dispersione elettrica prodotta dai raggi di Röntgen.* Mem. della R. Accad. di Bologna, 8 marzo, 1896. — *Effets électriques des rayons de Röntgen.* Compt. Rend. 9 mars. 1896. — *Observations sur une Communication de MM. Benoist et Hurmuzescu.* Compt. Rend. 20 avril, 1896.

Davanti alla finestra circolare chiusa con sottile lastra di alluminio, praticata nella parete di piombo della grande cassa metallica comunicante col suolo, che contiene il tubo di Crookes e gli apparecchi che servono ad eccitarlo, è posto un disco metallico isolato. Questo disco comunica direttamente coll' elettrometro di Mascart, e, coll' interposizione d' una lunga colonna d' alcool assoluto, col polo isolato di una batteria di piccoli accumulatori. Al di dietro del disco sta una grande e grossa lastra di piombo non isolata, munita di un piccolo foro per lasciare passare il filo che stabilisce la comunicazione fra il disco e gli altri strumenti, destinata a difendere dall' azione dei raggi X gli apparecchi comunicanti col disco. Infine, dall' altra parte di questo, e cioè verso la finestra, trovasi una lamina d' alluminio, che dista qualche millimetro dal disco, e che, essendo in comunicazione col suolo, è destinata a sottrarre il disco dalle azioni elettriche che potrebbero provenire dai corpi che si collocano sul cammino dei raggi X.

In queste condizioni i raggi che, attraversata la lastra di alluminio, cadono sul disco, provocano la dispersione della sua carica, e di questa dispersione si può avere una misura relativa calcolando l' espressione $\frac{v_0 - v_1}{v_1}$, in cui v_0 è il potenziale misurato dall' elettrometro quando i raggi X non esistono, e v_1 quello misurato sotto l' azione di essi (1).

Si ponga ora fra la finestra ed il disco isolato un disco di grossa lamina di piombo, in modo che il disco isolato e la lastra d' alluminio, che gli è vicina, sieno interamente compresi nella sua ombra geometrica. Si crederebbe che in tali condizioni la dispersione della carica del disco non si risentisse più dell' azione dei raggi X; ma così non è, giacchè un effetto si osserva ancora, la cui intensità cresce al crescere della distanza fra il diaframma e la finestra.

Ed in vero, se il diaframma combacia colla finestra, non si osserva la minima dispersione; ma basta allontanarlo qualche poco perchè l' azione si manifesti. Ciò prova, intanto, che la debole azione sul disco elettrizzato che si constata quando il diaframma non è a contatto della finestra, non è dovuta a raggi che lo abbiano attraversato.

La dispersione osservata diminuisce assai adoperando un diaframma assai largo, oppure circondando quello adoperato prima con un altro di forma anullare, che lo prolunga in ogni senso. Anzi, questo diaframma forato produce il suo affetto anche adoperato da solo. Ho constatato, infatti, che esso attenua l' azione sul disco elettrizzato, riducendo la dispersione anche a meno della metà di quello che era senza il diaframma, benchè l' apertura in esso praticata sia tale da non restare intercettato il cammino rettilineo dei raggi

(1) Per la descrizione del mio metodo di misura della dispersione, veggasi la terza delle Note citate in principio.

dalla finestra al disco. Si direbbe dunque che i raggi i quali agiscono sul disco elettrizzato, non giungono tutti in linea retta dalla sorgente.

Ho controllato queste esperienze con altre, nelle quali al disco elettrizzato è sostituita una lastra fotografica, avvolta in carta nera, e sulla quale si è poi collocata una reticella metallica. Così, nel caso in cui la lastra è interamente entro l'ombra geometrica d'una grossa lastra di piombo non troppo grande, dopo una sufficiente durata d'azione, si ottiene una distinta ombra della reticella.

Non saprei indicare in modo sicuro la causa di questo singolare fenomeno, benchè due spiegazioni si presentino subito alla mente.

Una è che l'aria si comporti come un mezzo leggermente torbido, e perciò dia luogo a diffusione delle radiazioni. L'altra è che questa diffusione avvenga per opera dei corpi solidi colpiti dai raggi X (p. es. il diaframma di piombo, la cassa ecc.). Speravo trovare una differenza di effetti variando la pressione dell'aria; ma avendo ripetuto in piccola scala l'esperienza fotografica descritta, in modo cioè che diaframma, lastra fotografica, ecc. si trovassero tutti entro una campana di vetro, non ho ottenuto sensibile differenza nell'imagine, secondo che l'aria era alla pressione ordinaria o a quella di 0 mm., 005.

Come si vede, la causa del fenomeno non è ancora bene stabilita: ma del fenomeno stesso devesi tener conto onde evitare inganni.

§ 2. *Influenza della distanza fra il disco elettrizzato e la lamina comunicante col suolo che gli sta di fronte.*

Uno dei modi di constatare la dispersione prodotta dai raggi ultravioletti, è il far uso d'una *coppia fotoelettrica*, e cioè del sistema costituito da un disco conduttore elettrizzato comunicante coll'elettrometro, e da una reticella metallica comunicante col suolo e parallela al disco, pei meati della quale passano le radiazioni. Se con tale apparecchio, che si può anche considerare come un condensatore ad aria, si misura la dispersione prodotta dai raggi ultravioletti che colpiscono una delle armature, si riconosce che questa dispersione diminuisce al crescere della distanza fra le armature stesse.

Ho istituito l'analoga esperienza coi raggi X, sia mantenendo l'identica disposizione, sia sostituendo alla reticella una lastra piana di alluminio, ed il risultato ottenuto, con disco o di zinco, o di ferro, o di rame, è stato che *la dispersione fra le due armature del condensatore ad aria, cresce al crescere della distanza fra le due armature, sino ad un certo limite.*

Ho fatto le esperienze con potenziali di 1 a 30 Volta; ma poi, sostituito all'elettrometro Mascart un elettroscopio a foglie d'oro, ho constatato lo stesso fenomeno con potenziali assai più elevati. In questo caso misuravo il tempo necessario affinchè le foglie d'oro cadessero alla posizione di riposo, dopo avere caricato l'elettroscopio ed il disco metallico con esso comunicante,

mediante una pila di Zamboni. Questo tempo diminuiva al crescere della distanza fra le armature.

Un tal risultato sembra a primo aspetto assolutamente in contraddizione con quanto si sa accadere nella ordinaria propagazione dell' elettricità nei gas, e nella dispersione elettrica provocata dai raggi ultravioletti. Ma certi fenomeni che altravolta ebbi occasione di constatare, inducono a modificare questo giudizio.

§ 3. *Fenomeni analoghi a quello descritto nel § precedente.*

Se, nel caso in cui la dispersione nel condensatore ad aria è prodotta dai raggi ultravioletti, si tende presso la rete metallica comunicante col suolo un filo isolato comunicante con un elettrometro, si trova che, mentre coll' aria alla pressione ordinaria il potenziale acquistato dal filo in un tempo costante d' azione dei raggi diminuisce al crescere della distanza fra le armature, quando invece l' aria è abbastanza rarefatta, quel potenziale comincia col crescere al crescere di quella distanza (1). In quest' ultimo caso il fenomeno ha qualche analogia con quello del § precedente.

Un fenomeno simile ottenni nell' aria rarefatta anche senza l' azione dei raggi ultravioletti, *purchè il potenziale impiegato fosse appena sufficiente a che la propagazione dell' elettricità nel gas potesse aver luogo* (2).

Però, in queste mie non recenti esperienze, la dispersione viene valutata indirettamente, e cioè deducendola dal potenziale assunto in un dato tempo da un terzo conduttore, che a guisa di una sonda si colloca fra i due conduttori principali; perciò ho giudicato necessario modificare quelle esperienze in modo da renderle simili a quella del § 2.

Per l' esperienza nella quale intervengono i raggi ultravioletti, ho racchiuso il condensatore ad aria, costituito dal disco metallico e dalla reticella, entro una campana di vetro, chiusa alla bocca con un disco di quarzo, e comunicante con una macchina pneumatica, ed ho misurato la dispersione prodotta dai raggi ultravioletti di una lampada ad arco nel solito modo, cioè calcolando $\frac{v_0 - v_1}{v_1}$. Ho così verificato che, con conveniente rarefazione e con potenziali non molto inferiori a quello necessario, perchè la propagazione dell' elettricità nell' aria avvenga anche senza l' azione dei raggi ultravioletti, l' andamento dei fenomeni è simile a quello constatato nel § 2, e cioè la dispersione comincia col crescere, al crescere della distanza fra le due armature.

Quanto al fenomeno analogo che si può ottenere senza far agire raggi di alcuna specie, ecco come l' ho realizzato. Ho costruito un tubo di vetro con due elettrodi in forma di dischi paralleli (diametro 3,5 c.), di cui uno

(1) *Sulla convezione fotoelettrica e su altri fenomeni elettrici nell' aria rarefatta.* § 14. Mem. della R. Acc. di Bologna serie IV, t. X. — N. Cimento, 3 serie, t. XXX, pag. 201.
(2) L. c. § 17.

è fisso e l' altro mobile, tanto da potersi facilmente variare la loro reciproca distanza dando piccoli urti al tubo opportunamente inclinato; e dopo aver ridotto a circa mezzo millimetro la pressione dell' aria interna, l' ho chiuso alla lampada. Messo il tubo, insieme ad un galvanometro, nel circuito di una pila di Volta, *della quale si deve adoperare il numero minimo di coppie necessarie affinchè l' elettricità possa propagarsi nel tubo* (da 400 a 600 coppie nel caso mio) si osserva che quando i due dischi sono a meno di 2 mm. di distanza, il galvanometro resta a zero. Ma allontanando lentamente i due elettrodi, d' un tratto il galvanometro devia, per tornare allo zero quando la distanza fra i due elettrodi supera un certo valore. La massima corrente col mio apparecchio si ha quando i due elettrodi distano di 5 o 6 mm.

Se l' esperienza si fa nell' oscurità, si può sopprimere il galvanometro, giacchè il presentarsi della luminosità del gas fra i due dischi allorchè la loro distanza reciproca, che si fa gradatamente aumentare, ha raggiunto un certo valore, indica che la propagazione dell' elettricità nel gas si compie più agevolmente a una certa distanza che a distanze più piccole.

Naturalmente, se si adopera un numero di coppie troppo piccolo, non si ottiene mai la corrente fra i due elettrodi; se invece se ne adopera un numero troppo grande, si ha corrente qualunque sia la distanza fra i due dischi.

In conclusione, il fenomeno del § 2, che si produce sotto l' azione dei raggi X alla pressione ordinaria e con qualunque differenza di potenziale fra le due armature del condensatore ad aria (o almeno con differenze di potenziale che vanno da circa 1 Volta sino a quella necessaria per ottenere una forte divergenza in un elettroscopio a foglie d' oro), è identico a quello che nell' aria rarefatta e con differenze di potenziale non troppo piccole si produce sotto l' azione dei raggi ultravioletti, come pure a quello che, senza far agire nessuna specie di radiazioni si produce nell' aria rarefatta, allorchè si fa uso di differenze di potenziale appena sufficienti affinchè abbia luogo la propagazione dell' elettricità.

§ 4. *Producono i raggi* X *la dispersione della carica, alla superficie di un conduttore immerso in un dielettrico liquido o solido?*

Il sig. J. J. Thomson ha annunciato che i raggi X fanno disperdere la carica di un conduttore, non solo quando è circondato da un gas, ma anche allorchè è immerso in un dielettrico liquido o solido, e ne ha concluso che *ogni dielettrico diviene conduttore allorchè è attraversato dai raggi di Röntgen.*

Siccome questo risultato stabilirebbe una differenza notevole fra gli effetti prodotti dai raggi X e quelli dovuti alle radiazioni ultraviolette, ho giudicato interessante di controllarlo.

Bisogna ben distinguere il caso in cui il dielettrico è in forma di strato posto in contatto del metallo elettrizzato, e di cui la faccia opposta è in contatto dell' aria ambiente, dal caso in cui il dielettrico liquido o solido

riempe tutto lo spazio che resta fra il metallo elettrizzato ed un involucro metallico chiuso che lo circonda e che è in comunicazione col suolo.

Se, nel primo caso, si vede diminuire sotto l'azione dei raggi X la deviazione nell'elettrometro comunicante col metallo elettrizzato, ciò non prova che una dispersione abbia luogo dalla sua superficie entro la massa del dielettrico, ed in ogni caso è un errore il supporre che questa sia l'unica causa del fenomeno. Ho infatti dimostrato (¹) che in tali condizioni l'effetto si produce alla superficie di separazione fra il dielettrico e l'aria ambiente, e precisamente che dell'elettricità dello stesso nome di quella del conduttore si disperde nell'aria, restando sulla superficie del dielettrico una carica di nome contrario. Del resto, questo fenomeno è identico a quello che dimostrai altra volta compiersi in simili condizioni per opera dei raggi ultravioletti.

Se dunque si vuol rispondere alla domanda che serve di titolo a questo §, bisogna operare come nel secondo caso, e cioè far in modo che il dielettrico liquido o solido non abbia superfici di contatto con un gas.

In base a queste considerazioni ho costruito una cassetta parallelepipeda di piombo di 18 × 14 × 4 centimetri, in una delle grandi faccie della quale ho praticato un'apertura rettangolare di 11 × 13 centimetri, che poi ho chiusa con una sottile lastra d'alluminio. Entro la cassetta ho collocata una lastra di rame di 12 × 14 centimetri isolata, da cui parte un filo di rame che, oltre a sostenerla, serve a farla comunicare coll'elettrometro e colla batteria d'accumulatori (secondo la solita disposizione), passando nel centro d'un foro praticato nel piombo. Ho successivamente misurata la dispersione prodotta sul rame dai raggi X, che entrano nella cassetta attraversando l'alluminio, mentre la cassetta era in comunicazione col suolo e riempita dall'aria, oppure con essenza di trementina, o con olio di vasellina, o infine con un dielettrico solido (paraffina, gomma lacca, colofonia) introdotto dietro fusione.

Quando la cassetta era piena d'aria, trovai per la dispersione $\frac{v_0 - v_1}{v_1}$ il valore 0,6. Quando invece la cassetta era piena d'un dielettrico liquido o solido, trovai valori assai minori, per esempio 0,02. Sembrava dunque che i raggi X producessero un effetto, quantunque assai debole, anche in questo caso. Ma ben tosto riconobbi che l'effetto scemava assai accostando la cassetta alla finestra della grande cassa metallica da cui escono le radiazioni, tanto che quando la cassetta toccava la finestra e la chiudeva completamente, la dispersione era ridotta quasi a nulla. Dunque l'effetto osservato era in massima parte dovuto alla causa di errore messa in chiaro nel § 1, vale a dire che, quantunque i conduttori ed apparecchi comunicanti colla lastra di rame fossero entro l'ombra che dovevano proiettare la cassetta ed una grande lastra di piombo posta al di dietro di essa, pur tuttavia le radiazioni X producevano su di essi un'azione.

(¹) Vedi la 3ª e 4ª delle Note citate in principio.

Che questa interpretazione sia giusta, risulta dalla seguente osservazione, e cioè che press' a poco la stessa dispersione si osservava troncando la comunicazione della lastra di rame col resto degli apparecchi.

Infine, siccome anche dopo interrotta quella comunicazione, la piccolissima dispersione rimasta dopo avere messo la cassetta contro la finestra non cambiò sensibilmente, ne conclusi che nessuna dispersione percettibile era prodotta nell' interno del dielettrico.

Dunque: *non può considerarsi come dimostrato che un dielettrico non gassoso sia reso conduttore allorchè è attraversato dai raggi di Röntgen.*

Morfologia. — *Sullo sviluppo dei Murenoidi.* Nota del Corrispondente B. Grassi e del dott. S. Calandruccio.

Prevedendo un nuovo ritardo di qualche mese nella pubblicazione della nostra Monografia sui Murenoidi, riteniamo opportuno comunicare in questa altra Nota preliminare alcune nuove conclusioni delle nostre ricerche.

Conclusioni anatomiche.

I. Come già abbiamo altra volta accennato, la membrana propria della corda (cordolemma) nelle larve dei Murenoidi subisce una vera vertebrazione. Nelle regioni vertebrali diventa ossea, ossia sclerizza. I sali calcarei si comportano come nell' osso. Mancano le cellule ossee anche qui come nelle poche ossa che si incontrano nel cranio delle stesse larve (mascellare, dentale, parasfenoide ecc.). Abbiamo perciò dei corpi vertebrali d' origine cordale che denomineremo *protocentrocicli* (1) (corpi vertebrali primitivi) per distinguerli dai *deutocentrocicli* (corpi vertebrali definitivi) d' origine pericordale (strato scheletogeno, o scleromatrice). I protocentrocicli risultano dalle fusione di vari pezzi; probabilmente due dorsali e due ventrali: quelli precedono questi nello sviluppo. I protocentrocicli esistono anche in altri Teleostei. Con essi non si debbono però confondere gli pseudocentrocicli che ha già notato il G. Müller nel pesce spada: la loro presenza fa sembrare doppio il corpo vertebrale. Essi sono d' origine pericordale e non risultano di sostanza ossea.

Questi fatti, da noi constatati, da una parte dimostrano la possibilità che una sorta di tessuto osseo origini dell' entoderma, e dall' altra parte reclamano una revisione delle colonne vertebrali dei pesci, degli anfibi e dei rettili fossili.

II. I cuori caudali dei Leptocefali e dei giovani Murenoidi sono alinfatici. Esiste nei Leptocefali un sistema circolatorio linfatico, assolutamente distinto da quello sanguigno; esso è rappresentato oltre che dal cuore caudale, da un tronco subassile in parte semplice e in parte doppio. Le ramificazioni che

(1) Il termine *centrociclo* è dell' Haeckel.

prendono origine da questo tronco sono piuttosto abbondanti. Il tronco finisce in un cuore caudale, mentre dall'altro cuore caudale dipartesi la vena caudale. I due cuori comunicano l'uno coll'altro per mezzo di un foro. Le ramificazioni suddette non hanno comunicazioni dirette coll'apparato circolatorio sanguigno, nel tronco del Leptocefalo. Al capo le osservazioni riescono malagevoli. Il lume dell'apparato linfatico è rivestito dovunque da endotelio.

Così resta definitivamente dimostrata l'esistenza di un apparato linfatico nei pesci, la quale dopo tante discussioni, ai nostri giorni veniva generalmente messa in dubbio.

III. La muscolatura dei Murenoidi inizialmente è lamellare nel foglietto mediale del somite. Ricorda così quella dello sturione.

Conclusioni biologiche.

I. I Leptocefali dello *Sphagebranchus* si distinguono da quelli dell'*Ophichthys hispanus* Bellotti (Sin. *H. remicaudus*) perchè la pinna dorsale non sorpassa l'estremità posteriore.

Tra di loro i Leptocefali dei due *Sphagebranchus* si distinguono per la diversa punteggiatura.

Precisamente la punteggiatura sottolaterale è quasi uniforme nello *S. imberbis*, mentre nello *S. coecus* forma delle macchie simili a quelle del *Leptocephalus* dell'*O. serpens* e dell'*O. hispanus.*

II. La *Chlopsis bicolor* è imparentata da una parte col *Muraenichthys*, dall'altra colla *Muraena.*

III. Il *Nettastoma brevirostre* Facciolà, per la disposizione delle narici posteriori, devesi scindere dai *Nettastoma*, e perciò vien da noi elevato a nuovo genere (*Todarus*).

Matematica. — *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze* (1). Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. In molte delle ricerche in cui il calcolo alle differenze trova applicazione, insieme ad una forma lineare:

$$(1)\quad A(f) = a_0(x)\, f(x) + a_1(x)\, \theta f(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\, \theta^{n-1} f(x) + \theta^n f(x),$$

occorre considerarne un'altra che dal Pincherle, il quale per primo ebbe ad occuparsene (2), fu chiamata la sua *inversa*. Tale è la forma:

$$A_{-1}(f) = a_0(x+n)\, f(x+n) + a_1(x+n-1)\, f(x+n-1) + \cdots + f(x)$$

(1) Questa Nota fa seguito ad un'altra pubblicata nel fascicolo 7, 1° sem. 1896, di questi Rendiconti col titolo: *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze.*

(2) Cfr. p. es. Memorie Acc. di Bologna, serie IV, tomo X, pag. 526.

o, più semplicemente:

$$A_{-1}(f) = a_0(x)\,f(x) + a_1(x-1)\,f(x-1) + \cdots + f(x-n)\,,$$

cioè:

(2) $$A_{-1}(f) = a_0(x)\,f(x) + \theta^{-1}(a_1(x)\,f(x)) + \cdots + \theta^{-(n-1)}(a_{n-1}(x)\,f(x)) + \theta^{-n}f(x)\,.$$

È manifesta l'analogia fra il modo con cui dalla data forma si ottiene questa sua inversa, ed il modo con cui da una data equazione differenziale lineare se ne ottiene l'aggiunta di Lagrange; qui c'è solo da considerare che, nel formare la inversa, bisogna invertire anche il senso della operazione θ. Tenuto conto di questo si vede che: *la inversa della inversa è la forma data.* Ed infatti questa può scriversi:

$$A(f) = a_0(x)\,f(x) + \theta(a_1(x-1)\,f(x)) + \cdots + \theta^{n-1}(a_{n-1}(x-n+1)\,f(x)) + \theta^n f(x).$$

Avendo verificato che tutte le proprietà che una data equazione differenziale ha rispetto alla sua aggiunta di Lagrange, trovano riscontro in proprietà al tutto simili di una forma alle differenze rispetto alla sua inversa, non mi è parsa necessaria questa nuova denominazione ed ho creduto di poter chiamare le due forme $A(f)$, $A_{-1}(f)$, *aggiunte l'una dell'altra.* Mi è poi grato il dichiarare che debbo allo stesso prof. Pincherle l'idea di ricercare per le forme inverse le proprietà analoghe alle aggiunte di Lagrange.

2. Dalla definizione discende:

a) *La aggiunta della aggiunta di una forma lineare alle differenze è la stessa forma data.*

b) *La aggiunta della somma o della differenza di due forme date è eguale alla somma od alla differenza delle aggiunte.*

Dimostriamo inoltre che:

c) *La aggiunta del prodotto* $AB(f)$ *di due forme date è eguale al prodotto, fatto in ordine inverso,* $B_{-1}A_{-1}(f)$, *delle aggiunte* [1].

Sia infatti $A(f) = \sum a_r(x)\,\theta^r f$, $B(f) = \sum b_r\,\theta^r f$. Avremo: $AB(f) = \sum (a_0\,b_r + a_1\,\theta b_{r-1} + \cdots + a_r\,\theta^r\,b_0)\,\theta^r f$; la inversa di questo prodotto è:

$$\begin{aligned}(AB)_{-1}(f) &= \sum \theta^{-r}\left[(a_0\,b_r + a_1\,\theta b_{r-1} + \cdots + a_r\,\theta^r b_0)\,f\right]\\ &= \sum (\theta^{-r}a_0\,.\,\theta^{-r}b_r + \theta^{-r}a_1\,.\,\theta^{-r+1}b_{r-1} + \cdots + \theta^{-r}a_r\,.\,b_0)\,.\,\theta^{-r}f\\ &= \sum (b_0\,\theta^{-r}a_r + \theta^{-1}b_1\,.\,\theta^{-r}a_{r-1} + \cdots + \theta^{-r}b_r\,.\,\theta^{-r}a_0)\,\theta^{-r}f,\end{aligned}$$

cioè appunto il prodotto delle due forme $\sum \theta^{-r}b_r\,.\,\theta^{-r}f$. $\sum \theta^{-r}a_r\,.\,\theta^{-r}f$ aggiunte delle date.

Ne segue che:

d) *La aggiunta del prodotto di più forme*

$$AB \ldots\ldots HK(f)$$

[1] Prodotto $AB(f)$ di due forme A, B, è quella nuova forma che si ottiene ponendo in A, in luogo della funzione arbitraria f, il risultato della operazione $B(f)$ (Pincherle, *L'algebra delle forme alle differenze.* Mem. Acc. Bologna, serie V, tomo V, pag. 91).

è il prodotto

$$K_{-1} H_{-1} \dots B_{-1} A_{-1}(f),$$

fatto in ordine inverso, delle aggiunte.

Come applicazione di questo teorema si consideri una forma $B(f) = A A_{-1}(f)$, che sia prodotto di due forme aggiunte l'una dell'altra; avremo:

$$B_{-1}(f) = (A_{-1})_{-1} A_{-1}(f) = A A_{-1}(f).$$

e) Cioè: *Se si hanno due forme lineari alle differenze aggiunte l'una dell'altra, il loro prodotto è una forma identica alla sua aggiunta.*

3. Giovandomi ora dei risultamenti a cui sono giunto in un lavoro pubblicato negli Annali di Matematica dello scorso anno, col titolo: *Contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze*, posso formare una funzione di due variabili indipendenti che, relativamente a ciascuna di queste, considerata come fondamentale, sia integrale della forma data e della sua aggiunta rispettivamente.

Tale è la funzione:

$$(3) \qquad F(z, x) = (-1)^{x-z} \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1}(z+1), & 1, & 0, \dots 0, & 0, & 0 \\ a_{n-2}(z+2), & a_{n-1}(z+2), & 1, \dots 0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, \dots a_{n-2}(x-n+1), & a_{n-1}(x-n+1), & 1 \\ 0, & 0, & 0, \dots a_{n-3}(x-n), & a_{n-2}(x-n) & a_{n-1}(x-n) \end{vmatrix}$$

come del resto può verificarsi sviluppando quel determinante secondo gli elementi della ultima linea, o secondo quelli della prima colonna.

Fu ancora provato che il sistema

$$(4) \qquad F(z, x), \ F(z+1, x), \dots F(z+n-1, x)$$

è fondamentale per la forma $A(f)$ e che il sistema:

$$(5) \qquad F(z, x), \ F(z, x+1), \dots F(z, x+n-1)$$

è fondamentale per la sua aggiunta. Siccome poi si può avere un accrescimento nell'ordine di quel determinante in due modi diversi, e cioè: per la aggiunta successiva di una ultima linea e colonna, o per la successiva aggiunta di una prima linea e colonna, ciò che corrisponde nel primo caso ad una variazione di x in θx, nel secondo di z in $\theta^{-1} z$, così potremo dire che quel determinante compendia le due forme aggiunte l'una dell'altra, e si vede anche bene ora perchè, nella formazione della aggiunta occorra invertire il senso della operazione θ.

4. Fra le ∞^n varietà di integrali della forma $A(f)$, sono specialmente notevoli quelli che si possono ricavare dal sistema (4) con la sostituzione:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} a_0(z), & 0, & 0, \dots & 0 & 0 \\ a_1(z), & a_0(z+1), & 0, \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}(z), & a_{n-2}(z+1), & a_{n-3}(z+2), \dots, & a_1(z+n-2), & a_0(z+n-1) \end{array} \right.$$

e che nella citata Memoria (¹) indicai coi simboli

$$A_0(z\,,x)\ ,\ A_1(z\,,x)\,,\dots A_{n-1}(z\,,x)\,.$$

Ricordando che nella forma $A(f)$ qui considerata è supposto eguale ad 1 il coefficiente di $\theta^n f$, avremo (²):

$$(7)\ \nabla(A_0,A_1\dots A_{n-1}) = \begin{vmatrix} A_0\,, & A_1 \dots & A_{n-1} \\ \theta A_0 & \theta A_1 \dots & \theta A_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{n-1}A_0 & \theta^{n-1}A_1\,,\dots\,, & \theta^{n-1}A_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n(x-z-1)} \prod_{s=z}^{x} a_0(s)\,,$$

e pei reciproci dell' ultima linea (indicando sempre con x la variabile principale) si avranno le espressioni (³):

$$(8)\qquad \nabla(A_0\,,\dots,A_{k-1}\,,A_{k+1}\,,\dots A_{n-1}) =$$

$$\beta_{n-1}(x\,,z+k) = (-1)^{x-z} \begin{vmatrix} a_1(x)\,, & a_0(x)\,, & 0\,,\dots & 0 & 0 \\ a_2(x-1)\,, & a_1(x-1)\,, & a_0(x-1)\,,\dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\,, & 0\,, & 0\,, & a_2(z+k) & a_1(z+k) \end{vmatrix}$$

Se ora si considerano le funzioni:

$$(9)\qquad B_{n-1}(x\,,z+k) = (-1)^{n+k} \frac{\nabla(A_0\,,\dots A_{k-1}\,,A_{k+1}\,,\dots A_{n-1})}{\nabla(A_0\,,\dots A_{n-1})}\,,$$

si vede, sviluppando secondo la prima colonna il determinante al numeratore, che *sono integrali della forma aggiunta.*

D' altra parte le formule (9) ci dicono *che il sistema* $B_{n-1}(x\,,z)$, $B_{n-1}(x\,,z+1)\,,\dots,B_{n-1}(x\,,z+n-1)$, *è aggiunto al sistema* $A_0\,,A_1\dots A_{n-1}$, nel senso che a questa denominazione fu dato nella ricordata Nota: *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze*; potremo dunque subito concludere:

a) *Il determinante*

$$(10)\qquad \nabla_{-1}(B_{n-1}(x\,,z)\,,\dots B_{n-1}(x\,,z+n-1)) =$$

$$\begin{vmatrix} B_{n-1}(x\,,z)\,, & B_{n-1}(x\,,z+1)\,,\dots & ,B_{n-1}(x\,,z+n-1) \\ \theta^{-1}B_{n-1}(x\,,z)\,, & \theta^{-1}B_{n-1}(x\,,z+1)\,,\dots & ,\theta^{-1}B_{n-1}(x\,,z+n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{-(n-1)}B_{n-1}(x\,,z) & \theta^{-(n-1)}B_{n-1}(x\,,z+1)\,,\dots, & \theta^{-(n-1)}B_{n-1}(x\,,z+n-1) \end{vmatrix}$$

ha il valore: $(-1)^{n(x-z)}\,.\,\prod_{s=z}^{x}\dfrac{1}{a_0(s)}\,.$

(¹) § III, n. 13, formula (10). Si noti che nella ultima linea del determinante (11) ivi considerato, fu, per errore di trascrizione, scritto: $0\,,0\,,0\,,\dots a_2(z+m-3)\,,a_1(z+m-2)\,,a_0(z+m-1)$, anzichè: $a_{m-1}(z)\,,a_{m-2}(z+1)\,,a_{m-3}(z+2)\,,\dots a_2(z+m-3)\,,a_1(z+m-2)$ $a_0(z+m-1)$.

(²) Loc. cit. formula (13).

(³) Loc. cit. n. 17.

b) *Il sistema* $B_{n-1}(x, z), \dots, B_{n-1}(x, z+n-1)$, *è fondamentale per la aggiunta.*

c) *Le funzioni* $A_0, \dots A_{n-1}$, *sono proporzionali ai reciproci dell'ultima linea nel determinante delle* $B_{n-1}(x, z), \dots B_{n-1}(x, z+n-1)$.

5. Sia ora $y_1, y_2 \dots y_n$ un sistema fondamentale qualunque di integrali della forma $A(f)$; siccome il determinante della sostituzione che trasforma il sistema $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ nel sistema $y_1, y_2 \dots y_n$ non può essere identicamente nullo, così è facile dedurne che *il sistema*

$$z_k = \frac{(-1)^{n+k} \nabla(y_1, \dots y_{k-1}, y_k, \dots y_n)}{\nabla(y_1, \dots, y_n)},$$

aggiunto al dato, è fondamentale per la forma aggiunta e che reciprocamente: Se $z_1, z_2 \dots z_n$ *è un sistema fondamentale di integrali della forma aggiunta, i reciproci dell'ultima linea nel determinante* $\nabla_{-1}(z_1, z_2, \dots z_n)$ *divisi pel determinante stesso formano sistema fondamentale di integrali della forma data.*

Potremo in generale (loc. cit. n. 3) dedurne che: *Considerati i sistemi di* n^2 *elementi*

$$\begin{array}{ll} y_1, y_2, \dots, y_n & \theta^{-(n-1)}z_1, \theta^{-(n-1)}z_2, \dots, \theta^{-(n-1)}z_n \\ \theta y_1, \theta y_2, \dots, \theta y_n & \theta^{-(n-2)}z_1, \theta^{-(n-2)}z_2, \dots, \theta^{-(n-2)}z_n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \theta^{n-1}y_1, \theta^{n-1}y_2, \dots, \theta^{n-1}y_n & z_1, \quad z_2, \dots \quad, z_n \end{array}$$

i minori formati colle prime p linee nel primo sistema sono proporzionali ai complementari dei minori corrispondenti nel secondo.

E concluderemo, nello stesso modo che nel caso delle differenze infinitesime [1], che: *Un sistema fondamentale di integrali della data forma, ed il suo sistema aggiunto sono contragredienti.*

6. Si chiami *moltiplicatore* di una forma alle differenze $A(y)$, qualunque funzione $z(x)$ che soddisfi identicamente la relazione: $z(x)\,A(y) = \Delta A(y, z(x))$.

Dalle relazioni: $z_k\,A(y) = \Delta\psi(y, z_k)$, trovate al n. 1 (formola (8)) della Nota ricordata, potremo concludere: *I moltiplicatori di una forma lineare alle differenze sono integrali della forma aggiunta.*

Se con x_0 indichiamo il punto del campo di variabilità della x che si assume come iniziale potremo scrivere quelle relazioni sotto la forma:

$$\sum_{x_0}^{x-1} z_k(x)\,A(y) = \psi(y, z_k) \tag{11}$$

[1] Cfr. p. es. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, t. 1°, pag. 66.

che permette di sommare un numero qualunque di termini della serie $\sum_x z_k \mathrm{A}(y)$.

7. Nella Nota citata, ho anche dimostrato la formula

$$(12) \qquad y\,\mathrm{A}_{-1}(z) - z\,\mathrm{A}(y) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta\,\psi(y_1\,\theta^{-1}z)$$

sotto la condizione che il determinante $F(y_1, y_2, \dots y_n)$ sia invariante per la operazione θ; cioè che nella forma che ammette il sistema $y_1, y_2, \dots y_n$ siano eguali i coefficienti del primo e dell' ultimo termine. Nella forma $\mathrm{A}(y) = \frac{F(y, y_1, \dots y_n)}{\theta F(y_1 \dots y_n)}$ il coefficiente del primo termine è eguale all' unità; dovremo dunque supporre che nella forma $\mathrm{A}(f)$ sieno ridotti ad essere eguali alla unità i coefficienti sia del primo che dell' ultimo termine (ciò che è sempre possibile), ed allora potremo concludere;

Se $\mathrm{A}(f)$ *ed* $\mathrm{A}_{-1}(f)$ *sono due forme alle differenze aggiunte l' una dell' altra, ed* y *e* z *rappresentano due arbitrarie funzioni della* x, *il binomio*

$$y\,\mathrm{A}_{-1}(z) - z\,\mathrm{A}(y)$$

è una differenza esatta di una funzione bilineare omogenea delle $y, \theta y \dots \theta^{n-1}y$ *e delle* $\theta^{-1}z, \theta^{-2}z \dots \theta^{-n}z$.

Questa proprietà è *caratteristica* delle forme alle differenze aggiunte l' una dell' altra.

Sia infatti

$$y\,\mathrm{B}(z) - z\,\mathrm{A}(y) = \Delta\,\Phi(y, z)$$

si avrà, sottraendo dalla (12):

$$y(\mathrm{A}_{-1}(z) - \mathrm{B}(z)) = \Delta(\psi - \Phi).$$

Cioè: la differenza prima di una funzione lineare delle $y, \theta y \dots \theta^{n-1}y$, sarebbe una funzione della sola y, ciò che non può essere. Sarà dunque $\mathrm{B}(z) = \mathrm{A}_{-1}(z)$.

8. Per la funzione $\psi(y, z)$ si è trovata la espressione:

$$\psi(y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(y, y_1, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n)\, F_{-1}(z, z_1, \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n)].$$

Alle relazioni identiche:

$$(13) \qquad \sum_{r=1}^{n} \theta^\alpha y_r\, \theta^\beta z_r \begin{cases} = 0 & \text{se } 0 \leq \alpha - \beta < n-1 \\ = 1 & \text{se } \alpha - \beta = n-1 \end{cases},$$

che derivano dalle proprietà fondamentali trovate al n. 5 di questa Nota, potremo dunque aggiungere le seguenti:

$$(14) \qquad \begin{cases} \psi(y_r z_r) = 1 \\ \psi(y_r z_s) = 0 \end{cases}$$

9. È noto che, quando si conosca un sistema fondamentale di integrali di una data forma alle differenze, questa può scomporsi in un prodotto di forme del primo ordine [1]. La formula (6) trovata nella Nota: *Sui determinanti di funzioni* ..., offre un mezzo semplice per fare quella decomposizione. Facendo in essa $k=n$ si trova:

$$\frac{\nabla(y, y_1, \dots y_n)}{\theta\varDelta(y_1, \dots y_n)} = -\frac{\nabla(y_1 \dots y_n)}{\nabla(y_1 \dots y_{n-1})} \varDelta \frac{\nabla(y, y_1 \dots y_{n-1})}{\nabla(y_1 \dots y_n)} \tag{15}$$

Ricordiamo ora che $\nabla(y, y_1 \dots y_n)$ è la forma che ammette il sistema $y_1, y_2 \dots y_n$, e che indicheremo con $\mathrm{A}(y)$, poniamo poi $\nabla(y_1, y_2 \dots y_k) = \nabla_k$; $\nabla_{n+1} = \nabla_0 = 1$; avrèmo per successiva applicazione della (15):

$$\mathrm{A}(y) = \frac{\nabla_n \theta \nabla_n}{\nabla_{n+1} \nabla_{n-1}} \varDelta \frac{\nabla_{n-1}\, \theta \nabla_{n-1}}{\nabla_n \nabla_{n-2}} \varDelta \dots \frac{\nabla_1 \theta \nabla_1}{\nabla_2 \nabla_0} \varDelta \frac{1}{\nabla_1} \cdot y. \tag{16}$$

Si può dunque scrivere:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}(y) = \mathrm{E}^{(1)}\, \mathrm{E}^{(2)} \dots \mathrm{E}^{m}(y). \\ \quad \text{con} \\ \qquad \mathrm{E}^{(k)}(f) = \dfrac{\nabla_{n-k+1} \theta \nabla_{n-k+1}}{\nabla_{n-k+2} \nabla_{n-k}} \varDelta f, \quad (k = 1, 2 \dots n-1) \\ \qquad \mathrm{E}^{(n)}(f) = \dfrac{\nabla_1 \theta \nabla_1}{\nabla_2 \nabla_0} \varDelta \dfrac{f}{\nabla_1} \end{array}\right. \tag{17}$$

Che è appunto la formula di scomposizione cercata. In questa formula non è fatta nessuna ipotesi pei coefficienti della $\mathrm{A}(y)$.

Formandone la aggiunta con la regola trovata al n. 2 di questa Nota, avremo

$$\mathrm{A}_{-1}(y) = \overset{(n)}{\mathrm{E}}_{-1}\, \overset{(n-1)}{\mathrm{E}}_{-1} \dots \overset{(2)}{\mathrm{E}}_{-1}\, \overset{(1)}{\mathrm{E}}_{-1}.$$

cioè:

$$\mathrm{A}_{-1}(y) = \frac{1}{\nabla_1} \varDelta^{-1} \frac{\nabla_1 \theta \nabla_1}{\nabla_2 \nabla_0} \varDelta^{-1} \dots \frac{\nabla_{n-1} \theta \nabla_{n-1}}{\nabla_n \nabla_{n-2}} \varDelta^{-1} \frac{\nabla_n \theta \nabla_n}{\nabla_{n+1} \nabla_{n-1}}\, y. \tag{18}$$

Si può dunque concludere: *Nella decomposizione in fattori di due forme aggiunte l'una dell'altra, i coefficienti sono gli stessi, è solo invertito l'ordine dei fattori ed il senso della operazione θ.*

Questa condizione poi, per il ricordato teorema sulla aggiunta del prodotto, è anche sufficiente perchè due forme scomposte in fattori del primo ordine sieno aggiunte l'una dell'altra.

10. Suppongasi ora data una forma lineare alle differenze

$$\mathrm{A}(y) = \varDelta \frac{1}{\alpha_n} \varDelta \frac{1}{\alpha_{n-1}} \varDelta \dots \frac{1}{\alpha_2} \varDelta \frac{1}{\alpha_2}\, y \tag{19}$$

[1] Pincherle, *L'algebra delle forme alle differenze*, n. 11 e 12.

scomposta nei suoi fattori del primo ordine. Potremo, in modo interamente analogo a quello usato per le equazioni differenziali lineari [1] formare un sistema fondamentale di integrali di quella forma ed il sistema corrispondente della aggiunta. Basterà perciò applicare la regola data dal Pincherle nella sua *Algebra delle forme alle differenze* (n. 11) e si giungerà al sistema:

$$
(20)\qquad \begin{cases}
u_1 = \alpha_1 \\
u_2 = \alpha_1 \sum\limits_{x_0}^{x-1} \alpha_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_n = \alpha_1 \sum\limits_{x_0}^{x-1} \alpha_2 \sum\limits_{x_0}^{x-2} \alpha_3 \sum\limits_{x_0}^{x-3} \dots \sum\limits_{x_0}^{x-n+1} \alpha_n .
\end{cases}
$$

Dove u_i è integrale delle ultime $n-i+1$ fra le forme:

$$
(21)\qquad F_1 = \Delta \frac{1}{\alpha_1} y, \quad F_2 = \Delta \frac{1}{\alpha_2} F_1, \dots, \quad F_n = A = \Delta \frac{1}{\alpha_n} F_{n-1},
$$

senza esserlo delle rimanenti.

Similmente per la forma aggiunta:

$$
(22)\qquad A_{-1}(y) = \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_1} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_2} \Delta^{-1} \dots \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_n} . y,
$$

formeremo il sistema fondamentale:

$$
(23)\qquad \begin{cases}
v_n = \alpha_n \\
v_{n-1} = - \alpha_n \sum\limits_{x_0}^{x} \alpha_{n-1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_1 = (-1)^{n-1} \alpha_n \sum\limits_{x_0}^{x} \alpha_{n-1} \sum\limits_{x_0}^{x} - \sum\limits_{x_0}^{x} \alpha_1
\end{cases}
$$

e v_i sarà integrale delle prime i fra le forme alle differenze

$$
(24)\ G_1 = \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_1} y; \quad G_2 = G_1 \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_2} y, \dots, \quad G_n = A_{-1} = G_{n-1} . \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_n} y.
$$

senza esserlo delle rimanenti.

Osserverò in ultimo, ciò che risulta immediatamente dal teorema sul prodotto delle forme aggiunte, che le forme G_i e F_i sono aggiunte l'una dell' altra.

[1] Cfr. p. es. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* T. II, pag. 106 seg.

Matematica. — *Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens.* Nota del dott. ORAZIO TEDONE, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

1. In questa Nota vogliamo applicare un procedimento di integrazione di cui, in parecchi casi [1], si è servito il prof. Volterra, a ritrovare la notissima formola di Kirchhoff relativa alla equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

e che rappresenta analiticamente ed in modo preciso il principio di Huygens.

La dimostrazione a cui accenniamo, molto notevole per la sua semplicità e perchè conduce in pari tempo a stabilire una formola più generale di quella di Kirchhoff, si ottiene facilmente trasportando le considerazioni del prof. Volterra in uno spazio a quattro dimensioni.

2. Consideriamo perciò l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mathrm{X}, \tag{2}$$

dove X rappresenta una funzione nota di x, y, z, t, e che comprende l'equazione (1) come caso particolare. Interpretiamo x, y, z, t, come le coordinate di un punto variabile in uno spazio lineare a quattro dimensioni e chiamiamo S_4' quella parte di esso che è limitata dalla varietà conica C a tre dimensioni

$$a(t_2 - t) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = r, \tag{3}$$

dalla varietà cilindrica c

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = \varepsilon^2, \tag{4}$$

ε essendo un numero piccolo ad arbitrio, e da una varietà Σ, pure a tre dimensioni, la quale soddisfi alla condizione di essere incontrata in un solo punto da ogni parallela all'asse t, e del resto completamente arbitraria. Supporremo inoltre che in S'_4 si abbia sempre $t_1 > t$ ed indicheremo con Σ_1, Σ_2, Σ' le parti di C, c e Σ che, rispettivamente, lo limitano.

[1] Vedi *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.* — *Sulle vibrazioni dei corpi elastici.* R. Acc. dei Lincei, v. I, ser. 5ª; e specialmente: *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes,* Acta math. T. XVIII.

Se con n indichiamo la direzione della normale al contorno di S'_4, diretta verso il suo interno e con u, u_1 due funzioni che in S'_4 sono regolari e soddisfano alle equazioni (2) e (1) si avrà:

$$(5)\qquad 0=\int_{S'_4}\left\{u_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-X\right]-\right.$$

$$\left.-u\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)\right]\right\}dS'_4=$$

$$=-\int_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma'}\left\{u_1\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-u\left[\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]\right\}d\Sigma-\int_{S'_4}u_1 X\, dS'_4$$

3. Se si cercano le soluzioni φ della equazione (1) che dipendono soltanto dal rapporto $\dfrac{t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, si trova

$$\varphi=\alpha\frac{t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\beta$$

α e β essendo due costanti arbitrarie. Si potrà dunque porre:

$$(6)\qquad u_1=a\frac{t_1-t}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}}-1=a\frac{t_1-t}{r}-1.$$

Su Σ_1 si ha allora:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\frac{\partial u_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=$$

$$=-\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}\left(-1+a_1\frac{t_1-t}{r}\right)$$

giacchè

$$\frac{\partial t}{\partial n}=\cos(nt)=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\quad \frac{\partial r}{\partial n}=\cos(r\,n)=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ne viene quindi che l'integrale esteso a Σ_1, che comparisce in (5), è identicamente nullo.

Su Σ_2 abbiamo invece:

$$\frac{\partial t}{\partial n}=0;\quad \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_1}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial u_1}{\partial r}=-a\frac{t_1-t}{r^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r},$$

per cui l' integrale esteso a Σ_2, che comparisce in (5), si potrà scrivere

$$-a^2\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\omega}\left[a\frac{t_1-t}{\varepsilon^2}u+\left(a\frac{t_1-t}{\varepsilon}-1\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right]\varepsilon^2 d\omega,$$

dove t_0 indica il valore di t che corrisponde alla intersezione di Σ con l'asse t ed ω è la superficie di una sfera a tre dimensioni di raggio uno, od una parte di essa.

Facendo ora impiccolire ε indefinitamente e chiamando S_4 e Σ ciò che allora diventano S'_4 e Σ', la (5) ci darà:

$$-\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1,y_1,z_1,t)\,dt+\int_{S_4}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)X dS_4+$$
$$+\int_{\Sigma}\left\{\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-u\left[\frac{-a}{r}\frac{\partial t}{\partial n}+a^3\frac{t_1-t}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\right]\right\}d\Sigma=0\,.$$

In questa formola ω sarà eguale a 4π se l'asse t incontra Σ in un punto senza esserle tangente, sarà eguale a zero se non l'incontra, e rappresenterà in generale una parte della superficie sferica di raggio uno, se l'asse t è tangente a Σ.

Se ora si osserva che su Σ_1 e sull'intersezione di Σ_1 con Σ è

$$a\frac{t_1-t}{r}-1=0,$$

derivando la formola precedente successivamente due volte rispetto a t_1, e dividendo per a, si trova:

$$\omega\, a^2 u(x_1\,,y_1,z_1\,,t_1)=\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_4}\frac{X}{r}\,dS_4+ \tag{7}$$
$$+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]d\Sigma-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_{\Sigma}u\left[\frac{-1}{r}\frac{\partial t}{\partial n}+a^2\frac{t_1-t}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\right]d\Sigma,$$

e questa formola è più generale di quella di Kirchhoff.

4. Per ritrovare la formola di Kirchhoff ordinaria, supporremo che Σ si componga di una parte S_3 di uno spazio lineare a tre dimensioni determinato dalla equazione $t=t_0$, limitato da una superficie σ, e dalla varietà cilindrica γ a tre dimensioni, che si ottiene conducendo da ogni punto di σ una parallela all'asse t. Su S_3 è

$$t=t_0=\text{cost.}\quad \frac{\partial t}{\partial n}=1,\quad \frac{\partial x}{\partial n}=\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial r}{\partial n}=0,$$

mentre su γ è

$$\frac{\partial t}{\partial n}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial n}\,,$$

per cui

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\Sigma \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\right]d\Sigma=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\int_{S_3}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,dS_3-a^2\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}}dt\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\right\}=-\,a^2\int_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}u\left(x,y,z,t_1-\frac{r}{a}\right)d\sigma.$$

Similmente

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\int_\Sigma u\left[\frac{-1}{r}\frac{\partial t}{\partial n}+a^2\frac{t_1-t}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\right]d\Sigma=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left\{-\int_{S_3}\frac{u}{r}\,dS_3+a^2\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}}(t_1-t)\,dt\int_\sigma\frac{u}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma\right\}=$$

$$=a^2\int_\sigma\frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma+a\,\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma\frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma=$$

$$=-\,a^2\int_\sigma\frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,d\sigma$$

ponendo $\dfrac{\delta}{\delta n}=\dfrac{\partial}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial n}\cdot$

Così pure si ha

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_4}\frac{X}{r}\,dS_4=\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_3}\frac{dS_3}{r}\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}}X\,dt=\int_{S_3}\frac{X\left(x\,,y\,,z\,,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,dS_3\,.$$

Tenendo conto di questi risultati la (7) si potrà scrivere:

$$(8)\ \omega u\,(x_1\,,y_1\,,z_1\,,t_1)=\int_\sigma\left\{\frac{\delta}{\delta n}\frac{u\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}u\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)\right\}d\sigma+$$

$$+\frac{1}{a^2}\int_{S_3}\frac{X\left(x\,,y\,,z\,,t_1-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,dS_3\,.$$

In questa formola ω sarà eguale a 4π se l'asse t incontra S_3 in un punto interno, sarà zero se non l' incontra, rappresenterà una parte della superficie sferica di raggio uno se l'incontra in un punto del contorno σ.

Chimica. — *Alcuni nuovi derivati del Veratrol.* Nota del prof. AUSONIO DE GASPARIS, presentata dal Socio PATERNÒ.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Fusioni al forno elettrico* [1]. Nota di G. ODDO, presentata dal Socio CANNIZZARO.

A convalidare le obbiezioni che ho mosso alle memorie di Le Chatelier nella Nota precedente [2], tolgo da un lavoro che ho in corso alcune esperienze.

1. Calce dal carbonato fusa in parte al forno elettrico.

Ho sottoposto all'azione della temperatura dell'arco voltaico, fornito da una corrente alternante di 40 Volta e 120 Ampère, dei pezzi di calce granulosa dal carbonato che si estinguevano nell'acqua rapidamente.

Dopo cinque minuti soltanto una porzione era fusa [3]. Al rosso oscuro tolsi i pezzi dal forno e li conservai in un disseccatore. Si osservavano due parti: una fusa, di aspetto vitreo e l'altra granulosa. Distaccata l'una dall'altra, quella vitrea mostrò nella faccia interna delle bellissime squamette brillanti. Immersa nell'acqua dopo un giorno era quasi inalterata; dopo 2-3 giorni incominciò a rompersi in pezzi che diventarono più numerosi nei giorni successivi. Dopo otto giorni in gran parte era estinta; restavano tuttavia dei piccoli pezzettini non disgregati dall'acqua.

Viceversa immergendo nell'acqua la porzione rimasta granulosa e che era aderente alla precedente, subito si spense con molto sviluppo di calore.

Questa esperienza vale a dimostrare che non basta la temperatura elevata affinchè la calce diventi inerte rispetto all'acqua, ma occorre un mutamento nello stato di aggregazione molecolare, che viene appunto determinato dalla fusione.

2. Metasilicato di calcio $SiO_2 . CaO$.

Esiste in natura e viene chiamato Wollastonite, ed è stato anche ottenuto per sintesi.

Io l'ho preparato al forno elettrico fondendo un miscuglio equimolecolare di SiO_2 e CaO.

Per ottenere il miscuglio intimo ed evitare anche l'uso dei crogiuoli

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Chimica generale dell'Università di Roma.
[2] V. pag. 331.
[3] Facendo uso di lenti colorate si può seguire facilmente l'andamento dell'azione.

di carbone che arrecano la formazione di carburo di calcio, io ho adottato in questo, come in tutti gli altri casi, il seguente processo.

Ho usato anidride silicica passata allo staccio di 3000 maglie per cmq., l'ho rimescolato con CaO polverizzata e impastato. L'impasto veniva versato dentro stampi di latta a forma prismatica di circa 3 cm. di lato, che si potevano aprire da due parti, e le cui pareti erano state lubrificate con vasellina per impedire l'adesione; veniva compresso e disseccato prima a circa 50-60°, poi sino a 110-120°.

I prismi compatti così preparati venivano cotti poggiandoli sopra uno stampo più grande dello stesso miscuglio che serviva da crogiuolo.

Dopo 5 minuti di azione della temperatura dell'arco di 40 Volta e 120 Ampère, il miscuglio di 1 mol. di $Si\,O_2$ e 1 mol. di CaO era fuso completamente, e col raffreddamento si rapprese in una massa cristallina molto compatta.

Ridotto in polvere e passato allo staccio di 3000 maglie per cmq. e impastato sia a solo che con 1 o 2 mol. di CaO non fece presa. Trattato con HCl diede silice gelatinosa.

3. Ortosilicato di calcio $Si\,O_2 . 2\,CaO$.

Fu ottennto per sintesi da Le Chatelier (1).

Il miscuglio di 1 mol. di $Si\,O_2$ e 2 di CaO, preparato come nel caso precedente, l'ho sottoposto nelle medesime condizioni all'azione della temperatura dello stesso arco voltaico. È più refrattario del precedente, e soltanto dopo 9′ si ha la fusione, pure restando la forma prismatica del miscuglio. Togliendo il prodotto dal forno al rosso oscuro e conservandolo in un disseccatore da principio è compatto e cristallino; col raffreddamento incomincia a ridursi spontaneamente in polvere bianca sporca amorfa e restano soltanto piccoli pezzettini compatti, di aspetto porcellanico, corrispondenti a quella parte del prisma che era esposto più direttamente all'azione dell'arco.

Questo fenomeno importante della disgregazione spontanea dell'ortosilicato di calcio, fu osservato per la prima volta da Le Chatelier e descritto come caratteristico per questo sale.

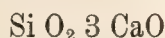
Ridotto in polvere fina e passato al solito staccio e impastato con acqua sia a solo che assieme a 1 mol. di CaO non fa presa. Trattato con HCl dà silice gelatinosa.

Poichè, come è noto, la temperatura elevata può rendere inerti i materiali idraulici, ho cercato di preparare questi due silicati facendo uso dei fornelli ordinarî a gas o a carbone per ricercare, ciò che non ha fatto Le Chatelier, se mischiati rispettivamente con 2 e 1 mol. di CaO fanno presa; ma con i fornelli che ho finora impiegato anche dopo 8 ore di riscaldamento, non ho ottenuto la fusione.

(1) Ann. d. Mines S. 8, T. XI, pag. 392.

4. Tentativi per ottenere il silicato basico $Si O_2 . 3 CaO$.

Dimostrato che al forno elettrico si possono preparare il meta e l' orto-silicato di calcio, tentai di preparare il preteso silicato basico di Le Chatelier

$$Si O_2 \, 3 CaO$$

fondendo nelle medesime condizioni il miscuglio di 1 mol. di $Si O_2$ e 3 mol. CaO preparato al solito.

Questo miscuglio è alla sua volta più refrattario dei precedenti. Dopo 10′ è fuso completamente soltanto nella parte superiore più esposta all' azione dell' arco; la porzione inferiore viceversa, pure mostrandosi modificata, conserva la forma prismatica. Tolto dal forno al rosso oscuro e conservato in un disseccatore, col raffreddamento si riduce spontaneamente in polvere amorfa bianca sporca e restano soltanto pochi pezzi inalterati di aspetto porcellanico.

L' analisi mi ha mostrato che la porzione che si è ridotta in polvere è un miscuglio di 1 mol. di CaO e 1 mol. di ortosilicato di calcio:
gr. 0,7316 di miscuglio diedero gr. 1,3206 di solfato di calcio.

Calcolato per $Si O_2 . 2 CaO + CaO$		trovato %
CaO	73,68	74,31
$Si O_2$	26,32	25,69

La porzione porcellanica diede i seguenti risultati:
gr. 0,7734 di sostanza fornirono gr. 1,4788 di solfato di calcio.

	trovato %
CaO	78,72
$Si O_2$	21,28

Contiene quindi un eccesso di calce anche sul preteso silicato tricalcico.

L' una e l' altra porzione passati al solito staccio e impastati sia a solo che assieme a calce, non fanno presa. Trattati con HCl danno silice gelatinosa.

Se l' azione della temperatura dell' arco si fa prolungare sino a 15′, aumenta la quantità della parte porcellanica.

5. Fusione di un miscuglio di 1 mol. di $Si O_2$ e 6 mol. di CaO.

Molto istruttivo mi sembra il seguente caso. Ho preparato al solito i prismi con 1 mol. di $Si O_2$ e 6 mol. di CaO. Il miscuglio è molto refrattario alla temperatura del solito arco di 40 Volta e 120 Ampère. Dopo mezz' ora di azione, togliendo al rosso oscuro il prodotto dal forno si ha una gran parte porcellanica, un' altra parte non fusa completamente che conserva la forma primitiva. Messa in disseccatore, parte si riduce in polvere, parte resta a struttura porcellanica.

Quest' ultima venne analizzata.

gr. 0,7450 di sostanza fornirono gr. 1,5538 di solfato di calcio.

	trovato %
CaO	85,87
$Si\,O_2$	11,13

Rompendola, mostra una struttura molto compatta e soltanto qualche rara squametta splendente. In polvere fina non fa presa nè impastata a solo con acqua, nè assieme a calce. Trattata con HCl dà silice gelatinosa. Immersa nell'acqua dopo parecchi giorni si riduce in pezzi, estinguendosi lentamente come la calce fusa.

La porzione che si è disgregata spontaneamente è un miscuglio di ortosilicato di calcio (che ha determinato quel fenomeno e con HCl dà silice gelatinosa) e di ossido di calcio libero. Difatti impastata con acqua dà sviluppo di notevole quantità di calore e si rigonfia.

Questo fatto credo che abbia molto interesse per discutere la costituzione dei cementi, perchè esso mostra che l' anidride silicica in presenza di un eccesso di calce tende a combinarsi soltanto con quella quantità che può fornire l' ortosilicato di calcio, e inoltre la calce eccedente continua a conservare la proprietà di estinguersi facilmente con l' acqua.

Quando poi la calce raggiunge la temperatura di fusione, discioglie i silicati che si erano formati con precedenza e dà col raffreddamento quelle masse inerti a struttura porcellanica che abbiamo riscontrato dalla 2ª alla 5ª esperienza [1].

Istologia vegetale. — *Sui cristalloidi della Phytolacca abyssinica* Hoff. Nota del dott. O. Kruch, presentata dal Corrispondente R. Pirotta [2].

Le lamine fogliari della *Phytolacca abyssinica* terminano al loro apice in una specie di mucrone avente la forma di un piccolo cono. Esso differisce dal rimanente della lamina, oltre che per la forma e la consistenza carnosetta, anche per il colore verde pallido gialliccio. Comunemente non giace sul piano dorso-ventrale della lamina fogliare ma fa con questo, dirigendosi verso il basso, un angolo più o meno accentuato. Questo mucrone è costituito dalla ripiegatura dei margini della regione apicale della foglia verso la pagina superiore e differisce in riguardo alla costituzione anatomica da quella offerta

[1] Ringrazio il dott. Helbig per l'aiuto che mi ha apprestato in queste ricerche.

[2] Il lavoro corredato di disegni sarà quanto prima pubblicato nell' Annuario del R. Istituto Botanico di Roma.

dalla lamina e dalla nervatura mediana per una forte riduzione del sistema assimilatore ed areatore, per aumentato sviluppo del sistema conduttore vascolare e per la presenza di uno speciale tessuto subepidermico.

Questo tessuto, proprio dei mucroni, è limitato nella loro regione basale ad una zona, forte di tre o più strati di elementi, estendentisi immediatamente al disotto dell' epidermide della pagina superiore; ma procedendo verso l' apice del mucrone stesso la zona ora accennata, si estende anche ai margini della pagina superiore fino a formare una zona subepidermica continua. Gli elementi che la costituiscono sono di forma poliedrica, di differente grandezza ed a pareti sottili; si differenziano dagli elementi del tessuto parenchimatico assimilatore, costituente la massa interna del mucrone, perchè offrono i loro protoplasti privi di corpi clorofilliani e perchè sono fra loro a perfetto contatto, non lasciano, cioè, spazî intercellulari. La zona di tessuto speciale è più sviluppata e meglio differenziata dagli elementi del tessuto assimilatore verso la pagina superiore che verso l' inferiore. Nel tessuto assimilatore, i cui elementi sono però forniti di un numero relativamente piccolo di corpi clorofilliani, stanno immersi numerosi fasci vascolari bene sviluppati e riccamente ramificati. Gli stomi che nella lamina si trovano anche sulla pagina superiore, vi scompaiono nel mucrone e persistono in numero assai limitato soltanto sulla pagina inferiore.

Ora è nei protoplasti delle cellule di questo tessuto speciale, al quale ho sopra accennato, ed in quelli delle cellule epidermiche della pagina superiore e dei tratti dell' epidermide inferiore, che si trovano in corrispondenza alle zone del tessuto speciale, che s' incontrano dei corpiccioli, incolori, di forma poliedrica regolare, corpiccioli che in seguito ad un attento esame morfologico e microchimico si possono caratterizzare come *cristalloidi di proteina.*

I cristalloidi meglio sviluppati in grandezza s' incontrano negli elementi del tessuto speciale. In ciascun protoplasto si osservano immersi nel citoplasma uno, due o parecchi cristalloidi di varia grandezza. Le loro dimensioni variano nelle differenti cellule e nelle stesse cellule confrontati fra di loro; ma esse sono però sempre considerevoli in rapporto alle dimensioni della cellula e del nucleo; in generale si puo dire che le maggiori dimensioni sono raggiunte dai cristalloidi solitarî.

La forma tipica da loro offerta è quella di un prisma più o meno allungato, esagonale, terminato da due piramidi. Riguardo alla posizione da essi occupata nel protoplasto, è da notarsi che per lo più si trovano avvicinati al nucleo e talora perfettamente addossati a questo. Quando si trovano parecchi cristalloidi in ciascuna cellula essi, possono essere sparsi senza ordine oppure disposti l' uno accanto all' altro cogli assi maggiori disposti parallelamente; in altri casi poi, essi non sono semplicemente avvicinati, ma concresciuti gli uni cogli altri in modo da formare un *aggregato di cristalloidi.*

I cristalloidi della *Ph. abyssinica* sono insolubili nell' acqua; sarà quindi

facile osservarli, in tagli fatti sopra materiale fresco, nell' acqua od in una soluzione di zucchero al 5%; coll' aggiunta di una soluzione di iodio in ioduro di potassio, od immergendo i tagli per qualche tempo in acqua iodata, il protoplasto si fissa ed il cristalloide si colora intensamente in giallo bruno. In soluzioni al 10 ed al 20% di cloruro di sodio, di nitrato di potassio si disciolgono, e così pure nell' idrato di potassio diluito, negli acidi acetico e cloridrico diluiti, e nella glicerina. Col reattivo del Millon si ha un' intensa colorazione rossa, con solfato di rame ed idrato di potassio una colorazione violetta ed una colorazione gialla coll' acido nitrico a caldo. Assorbono con avidità, anche da soluzioni assai diluite, l' eosina e la fucsina acida.

L' alcool assoluto non solo li conserva inalterati, ma perdurando a lungo la sua azione, li rende resistenti all' azione dei solventi salini e della glicerina.

Eleganti preparati duraturi, assai dimostrativi per quantità di cristalli e purezza di tinta, si ottengono trattando tagli fatti sopra materiale fissato in alcool assoluto od in soluzione satura di sublimato in alcool assoluto, colla fucsina acida secondo il metodo dell'Altmann. In preparati ben riusciti solo il cristalloide ed il nucleolo appariranno intensamente colorati in rosso sopra il fondo giallo.

L' analisi morfologica e microchimica, e fino ad un certo grado anche le colorazioni accennate, provano a sufficenza che i corpiccioli che si trovano nei protoplasti delle cellule del tessuto speciale e dell' epidermide dei mucroni nelle lamine fogliari della *Ph. abyssinica* sono cristalloidi di proteina. Si è andato in tal modo aumentando di un nuovo esempio il numero delle dicotiledoni in cui si è constatato la presenza di cristalloidi citoplasmatici in cellule appartenenti ad organi vegetativi; ed il caso ora descritto nella *Phytolacca* credo si possa annoverare fra i pochi fino ad ora noti, nei quali i cristalloidi si presentano nettamente differenziati, di grandi dimensioni ed anche in numero considerevole, quando si tenga calcolo del piccolo spazio occupato dal tessuto nelle cui cellule essi s' incontrano.

Fisiologia. — *La combustione nell' aria rarefatta.* Nota del dott. A. Benedicenti, presentata dal Socio A. Mosso.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sull'azione fisiologica di alcuni derivati della santonina.* Nota del dott. D. Lo Monaco, presentata dal Socio L. Luciani.

A. *Desmotroposantonina.* — La desmotroposantonina $C^{15} H^{18} O^3$, come abbiamo detto nella Nota precedente (1), preparata dal prof. Andreocci, si pre-

(1) V. pag. 279.

senta in aghi lucenti, insolubili nell'acqua fredda e nell' acido cloridrico, pochissimo solubile nell' acqua bollente, poco nell'etere e nel benzolo; discretamente solubile a caldo nell'alcool e nell'acido acetico.

Essa fonde a 260°, devia a sinistra il piano della luce polarizzata, mentre la santonina lo devia a destra.

Nelle seguenti esperienze noi abbiamo adoperato il sale sodico che si è ottenuto sciogliendo la desmotroposantonina in una quantità di soda normale esattamente calcolata, e riducendo la soluzione al titolo del 10 $^{0}/_{0}$.

Questo liquido, di color giallo-rossiccio, dopo parecchi giorni, si cambia in rosso-porpora.

Tanto la desmotroposantonina che tutti gli altri derivati della santonina sono stati somministrati agli animali per la via ipodermica.

Esperienze sulle rane.

Esperienza I. — Rana di gr. 20.

H. 8,15. — Iniezione di 0,3. c. c.
» 8,55. — La rana sta cheta, ma non presenta nulla di anormale. Si fa una iniezione uguale alla precedente.
» 9,35. — 3ª iniezione.
» 9,45. — 4ª iniezione.
» 10, 5. — 5ª iniezione.
» 12,55. — La rana sta sul ventre, ma pizzicata reagisce fortemente.
» 13 — Iniezione di 0,4 c. c.
» 13,10. — Messa sul dorso vi rimane; riflessi persistenti.
» 14 — Riflessi indeboliti; scoperto il cuore, esso pulsa debolmente.

Esperienza II. — Rana di gr. 32.

H. 9,15. — S' inietta 1 c. c. di soluzione.
» 9,25. — La rana sta tranquilla; presenta i movimenti ioidei diminuiti; sopporta la posizione dorsale, ma non la conserva.
» 10 — La rana si trascina, non riuscendo più, anche se pizzicata fortemente, a saltare.
» 12,45. — La rana si è rimessa, sta tranquilla, ma pizzicata salta bene.
» 13, 5. — 2ª iniezione uguale alla precedente.
» 15,25. — Riflessi generali scomparsi; si conservano quelli corneali.

La mattina dopo, sezionata, si trovano gli organi iperemici, il cuore fermo in diastole e pieno di grumi sanguigni, stimolato, esso compie piccole contrazioni. Si nota una discreta quantità di liquido nella cavità addominale.

Da queste e da altre esperienze, che non trascriviamo per brevità, risulta che per dosi fino a 10 centigr. la desmotroposantonina nelle rane produce un indebolimento dei movimenti volontari, il quale però si dilegua dopo 2-3 ore. Per dosi maggiori (20 centigr.) si ha la morte con sintomi di paralisi motoria. Il cuore è l'ultimo organo che viene attaccato da questa sostanza.

Esperienze sui mammiferi.

Esperienza I. — Cavia di gr. 480.

H. 9,5. — S' iniettano 2 c. c. di soluzione.
» 11,5. — Iniezione uguale alla precedente. La cavia non presenta nulla d' anormale, anche nei giorni che seguono.

Esperienza II. — Cavia di gr. 270.

H. 9,25. — Iniezione di 2 c. c. di soluzione.
» 10 — Iniezione di 1 c. c.
» 11,10. — Non presenta nulla di anormale. Si ripete l' iniezione di 2 c. c.
» 20 — La cavia sta ferma, ma pizzicata corre per la stanza. Il respiro è diventato raro, ma è sempre regolare. L' indomani fu trovata morta.

Esperienza III. — Cavia di gr. 420.

H. 9,10. — S' iniettano 10 c. c. di soluzione.
» 14 — Nen presenta nulla di anormale.

Il giorno seguente la cavia sta abbandonata sul ventre, e si rifiuta di mangiare, Il respiro è più raro e più profondo. Facendo molto rumore, o pizzicandola, si riesce a farle compiere piccoli passi. Nelle ore pomeridiane i movimenti respiratori diventano sempre più rari, come pure più evidenti sono i fenomeni di paralisi. Muore nella sera per arresto di respiro. Il cuore si sentiva battere con forza fino a pochi minuti prima della morte. Alla sezione si trova fermo in diastole, e nell'addome vi è un poco di liquido, il quale raccolto e filtrato, non si colora alcalinizzandolo fortemente con soluzione di potassa.

Esperienza IV. — Coniglio di gr. 850.

S' iniettano 2 gr. di sostanza in soluzione sodica, senza che il coniglio mostri alcun sintomo di avvelenamento.

Dopo tre giorni s'infondono gr. 3 di sostanza in soluzione sodica al medesimo coniglio. Trascorse alcune ore e anche l' indomani, l' animale è meno vivace di prima, sta fermo e solamente, quando è pizzicato, s'allontana dal suo posto facendo pochi passi. Il respiro è meno frequente, l' impulso cardiaco invece molto forte. La mattina seguente si trova morto.

Esperienza V. — Cane di gr. 3030.

H. 10 — S'infondono gr. 5 di sostanza sodica in due volte con l' intervallo di qualche ora.
» 14 — Il cane sta sdraiato, e dorme; però ogni piccolo rumore lo sveglia.

Applicata una mano sul torace si sente l' impulso cardiaco molto forte. L' indomani il cane mangia poco, e preferisce di stare accovacciato.

Il respiro è raro, ma sempre regolare.

Nelle ore pomeridiane il cane cammina barcollando; l' impulso cardiaco si mantiene però sempre forte.

Nella sera i movimenti respiratori si fanno sempre più rari, finchè avviene l'arresto preceduto da leggera cianosi. Fatta la sezione, si trova il cuore in diastole, nulla di anormale nei vari organi; tratta un poco di urina dalla vescica, essa non si colora in rosso colla potassa.

La desmotroposantonina esercita sui mammiferi un' azione simile a quella già descritta antecedentemente nelle esperienze sulle rane. La differenza più essenziale sta in ciò; che nelle rane lo stato paralitico si manifesta in maniera molto evidente, e dura anche per un periodo abbastanza lungo, mentre nei mammiferi dalla leggera ipnosi si passa senz'altro alla morte, che avviene per arresto di respiro.

Benchè l' impulso cardiaco, come abbiamo osservato, sino all'ultimo periodo dell' avvelenamento non s' indebolisce, ci è sembrato opportuno di fare alcune esperienze per studiare direttamente l' influenza della dosmotroposantonina sulla funzione cardiaca.

Nelle rane tanto col cuore allo scoperto, che col cuore staccato e applicato all' apparecchio di William, ci siamo convinti che la funzione cardiaca risente della sostanza, quando questa viene data in grandi quantità o quando l'animale è vicino a morire. Allora si ha rallentamento nella frequenza dei battiti, e diminuzione nella pressione. Per dosi piccole il cuore continua a funzionare normalmente. Gli stessi fenomeni si osservano, studiando le variazioni della pressione sanguigna nei mammiferi avvelenati con la desmotroposantonina.

Considerando i risultati di queste esperienze, il fatto che prima ci colpisce è quello che l' azione della desmotroposantonina differisce completamente da quella della santonina suo isomero. Questa sostanza infatti produce convulsioni che rammentano quelle stricniche, e la dose mortale di essa sia per le rane che per i mammiferi è molto minore di quella che occorre adoperando la desmotroposantonina.

Inoltre questa diversità nell' azione fisiologica è tanto più strana, in quanto che la desmotroposantonina contiene l'ossidrile alcoolico.

È noto infatti che questo radicale sia quando si trova negli alcooli della serie grassa, che nei fenoli agisce come convulsivante, e poichè la desmotroposantonina per la sua costituzione differisce dalla santonina perchè il gruppo

$$\begin{array}{l} H_2C \diagup \\ \;\;\;\;\;\;\;| \\ OC \diagdown \end{array}$$

di quest'ultima si è trasformato nel gruppo fenico.

$$\begin{array}{l} HC \diagup \\ \;\;\;\;\;\;\;| \\ HOC \diagdown \end{array} ;$$

a priori dovevamo aspettarci che la desmotroposantonina esercitasse un' azione eccitante superiore a quella della santonina. Viceversa dai risultati delle esperienze si deduce che essa è paralizzante.

Dallo studio degli altri prodotti della santonina ricaveremo fatti analoghi che ci permetteranno di spiegare il fenomeno.

B. *Isodesmotroposantonina.* — Questa sostanza scoperta da Andreocci si presenta in aghi solubili nell' alcool e nell' etere più a caldo che a freddo; poco solubili invece nell' etere e nell'acqua bollente; essi fondono a 187°-188° con leggiera scomposizione.

Al pari della desmotroposantonina dalla quale deriva, conserva l' ossidrile fenico; infatti dà un acetil-derivato, e non si combina con la fenilidrazina. Agli animali è stata somministrata come sale sodico.

Esperienze sulle rane.

Esperienza I. — Rana di gr. 30.

H. 11,10. — S' inietta 0,5 soluzione 10 %.
» 13,30. — 2ª iniezione uguale alla precedente. La rana non presenta nulla di anormale.

H. 14,30. — 3ª iniezione.

» 14,40. — Sopporta la posizione dorsale, ma non la conserva.

La rana sta cheta, i riflessi generali sono persistenti.

» 16,50. — Continua nel medesimo stato. L' indomani si trova morta. Sezionata, si trova il cuore fermo in diastole e pieno di sangue. Gli altri organi non presentano nulla di anormale.

Esperienza II. — Rana di gr. 35.

H. 8,15. — Iniezione di 1 c. c. di soluzione.

» 9 — Nulla d' anormale; si ripete l' iniezione eguale alla prima.

» 9,10. — La rana sta cheta; non sopporta la posizione dorsale.

» 9,15. — Pizzicata riesce a fare dei piccoli salti; messa sul dorso vi rimane.

» 9,30. — La rana non può più muoversi; i riflessi generali sono conservati.

» 10,30. — Riflessi diminuiti.

» 14,30. — Si trova morta.

Da queste esperienze risulta che le rane avvelenate con l' isodesmotroposantonina, presentano gli stessi sintomi che produce la sostanza isomera antecedentemente studiata.

Al pari di questa, essa non ha alcuna azione sulla funzione cardiaca.

Esperienze sui mammiferi.

Per deficienza di sostanza, noi ci siamo contentati di provare l'azione dell' isodesmotroposantonina in una cavia e in un coniglio.

Esperienza I. — Cavia di gr. 310.

H. 8, 5. — S' inietta sotto la pelle 4 c. c. di soluzione.

» 16,15. — La cavia sta cheta e non presenta alcun sintomo di avvelenamento; si ripete allora l' iniezione uguale alla precedente..

L' indomani la cavia sta sul ventre e si muove con difficoltà. Il respiro è diventato raro, ma si mantiene sempre regolare. Il cuore batte fortemente sino a pochi minuti prima della morte della cavia, che avviene nelle ore antimeridiane per arresto del respiro e con sintomi di paralisi.

Esperienza II. — Coniglio di gr. 650.

H. 8,15. — S' iniettano gr. 3 di sostanza in soluzione sodica al 10 %. L' animale sta bene tutto il giorno, mangia l' erba e corre per la stanza dove è stato messo.

L' indomani l'animale non è più vivace; costrettovi, cammina barcollando, non riuscendo a fare che pochissimi passi. Il respiro è meno frequente e più profondo, l' impulso cardiaco invece rimane sempre forte. I riflessi si conservano pure sempre normali.

La morte avviene, preceduta da una leggiera cianosi, nelle ore pomeridiane. Sezionato si trova un poco di liquido nell'addome, che raccolto, non presenta la reazione caratteristica della santonina.

I risultati ottenuti ci autorizzano ad affermare che i due stereo-isomeri desmo- e isodesmotroposantonina spiegano sugli animali eguale azione fisiologica che differisce completamente da quella del loro terzo isomero: la santonina.

C. *Iposantonina.* — L'iposantonina $C_{15} H_{18} O_2$ fonde a 132°-153°, e devia a destra la luce polarizzata; è insolubile nell' acqua, poco solubile nell' etere solubilissima nel cloroformio, nel benzolo e nell'acido acetico glaciale. Nel-

l'alcool, mentre a freddo è pochissimo solubile, a caldo vi si scioglie facilmente; l'alcool è quindi il solvente più adatto per la sua depurazione.

L'iposantonina è attaccata a caldo dagli alcoli, però con molta difficoltà. Si riesce ad ottenere la soluzione sodica di questa sostanza, sciogliendola prima a caldo in poco alcool, e versando questo in un grande recipiente pieno d'acqua distillata. Dopo si filtra e il precipitato raccolto si fa cadere in un bicchiere che contiene una quantità di soda un poco superiore a quella necessaria per salificare teoreticamente la sostanza. In questo modo si ottiene agendo a caldo, la soluzione esatta che noi riducevamo al 10 °/₀.

Esperienze sulle rane.

Esperienza I. — Rana di gr. 20.

H. 8,30. — S'inietta 1 c. c. di soluzione.
» 14 — La rana sta ferma, ma pizzicata reagisce vivamente, e non sopporta la posizione dorsale.
» 15 — Si nota un'eccessiva sovraeccitazione.

L'indomani la rana si trova in tetano, e basta battere le mani o poggiarle anche lievemente sul tavolo, per provocare un accesso convulsivo.

In queste condizioni la rana rimase per tre giorni; dopo essa cadde in paralisi e morì.

Il cuore si trovò fermo in diastole.

Esperienza II. — Rana di gr. 24.

H. 9,30. — S'inietta 1 c. c. di soluzione.
» 10,30. — La rana non presenta nulla di anormale; s'inietta allora un altro c. c. di soluzione.
» 11 — La rana sta ferma, pizzicata reagisce fortemente.
» 11,30. — Sopporta la posizione dorsale; i riflessi persistono.
» 14 — I riflessi sono molto indeboliti. Scoperto il cuore, si osserva che esso compie ancora piccole pulsazioni regolari, gli altri organi non presentano niente di anormale.

Nelle rane quindi l'iposantonina produce un'azione convulsivante, ed è molto più velenosa della desmotroposantonina.

Il cuore è influenzato da questa sostanza in un periodo molto inoltrato dell'avvelenamento.

L'azione convulsivante dura poco quando la dose del veleno è molto elevata; perchè allora sopravviene subito la paralisi.

Per difetti di sostanza abbiano fatto una sola esperienza sui mammiferi.

A un coniglio di gr. 850 iniettammo un grammo di sostanza. Dopo tre ore l'animale è in preda ad eccessi convulsivi caratterizzati da opistotono, trisma e movimenti delle estremità.

Le convulsioni, mentre in un primo periodo erano rare, poi si fecero più frequenti, e lasciavano negli intervalli l'animale privo di forze; dimodochè esso, non potendosi reggere sugli arti, si abbandonava sul fianco.

I riflessi, col progredire dell'avvelenamento, diventavano sempre più de-

boli, e i moti convulsivi si limitavano a piccole contrazioni dei muscoli della faccia. L'impulso cardiaco si mantiene sempre forte, anche poco prima della morte dell' animale.

D. *Isoiposantonina.* — Anche l' isoiposantonina è stata per la prima volta preparata dal prof. Grassi-Cristaldi. Essa è una sostanza che fonde a 167°,5-168°,5, è insolubile nell' acqua; negli altri solventi: alcool, etere, cloroformio, essa presenta presso a poco la medesima solubilità dell' iposantonina, ad eccezione del benzolo in cui è molto meno solubile.

Per ottenere la soluzione sodica si dovette ripetere il metodo adoperato per l' iposantonina.

Esperienze sulle rane.

Esperienza I. — Rana di gr. 25.

H. 8,30. — S'inietta 0,5 c. c. di soluzione.
» 13 — La rana non presenta nulla di anormale; pizzicata, reagisce abbastanza vivacemente.

L'indomani si trovò in tetano; gli accessi convulsivi si potevano provocare con leggerissime eccitazioni. Esse sono del tutto simili a quelle prodotte dalla stricnina.

La rana rimase per 48 ore in questo stato; dopo ritornò normale.

Esperienza II. — Rana di gr. 22.

H. 13, 5. — S'inietta 1 c. c. di soluzione.
» 13,20. — La rana è in preda a vivacissimi movimenti; s'iniettano 0,5 c. c. di soluzione.
« 13,35. — Pizzicata, la rana reagisce fortemente.
» 14 — La rana non si mostra più eccitabile come prima; stimolata fortemente riesce ancora a fare piccoli salti.
» 14,30. — Messa sul dorso, vi rimane.
» 15 — I riflessi sono quasi scomparsi. Scoperto il cuore batte, debolmente e lentamente.

Anche sull' unico coniglio al quale abbiamo iniettato 10 c.c. di soluzione, l' isoiposantonina produsse i medesimi fenomeni che si notarono esperimentando col suo isomero. La funzione cardiaca è poco influenzata da questa sostanza.

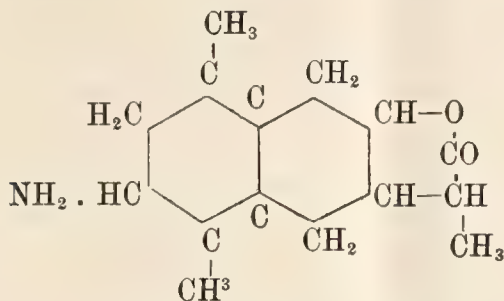
Dal complesso di queste esperienze risulta evidente che questi due stereoisomeri presentano un' uguale sindrome fenomenica dell' avvelenamento la quale è di natura simile, ma d' intensità maggiore di quella della santonina.

Ci occuperemo in seguito del rapporto che esiste tra l'azione fisiologica e la costituzione chimica di questi due stereoisomeri.

Segue qui lo studio della santoninammina la quale, come dimostreremo nelle conclusioni finali, può ritenersi come uno degli esempi più dimostrativi della teoria su accennata che tutti i formacologi ammettono.

E. *santoninammina.* — Con i medesimi processi di riduzione che il prof. Grassi-Cristaldi adoperò per la preparazione delle iposantonine, riuscì eziandio ad isolare un' altra sostanza con molta difficoltà a causa della straordinaria solubilità di essa nell' acqua.

Essa è la santoninammina, la quale corrisponde alla formula $C_{15}H_{21}NO_2$

```
              CH3
               |
               C      CH2
        H2C  /   \  C  /   \  CH—O
            |       |       |    |
            |       |       |    CO
  NH2 . HC   \     / C \    / CH—CH
               C      CH2        |
               |                CH3
              CH3
```

Però siccome questa base si trasforma subito in una sostanza gialla alterandosi profondamente, così il prof. Grassi-Cristaldi ha creduto più conveniente di preparare direttamente il solfato di santoninammina. Questo sale acido, si ottiene riducendo la santoninossina ($C_{15}H_{19}NO_3$) per mezzo dell' acido solforico e dello zinco in soluzione alcoolica e a temperatura di 30°-40°. Si ottiene una sostanza ben cristallizzata, solubile nell'acqua e poco solubile nell' alcool.

La soluzione da noi adoperata, di sapore molto amaro, aveva il titolo dell' 1 °/₀.

Esperienze sulle rane.

Esperienza I. — Rana di gr. 28.

H. 14 — S' iniettano 0,5 c.c. di soluzione.
» 14,55. — La rana sta cheta, pizzicata, reagisce energicamente emettendo delle grida.
» 15,30. — Messa sul dorso vi rimane, ma riesce a riprendere la posizione normale. I riflessi sono diventati deboli.
» 17 — La rana sembra che sia normale, si mostra però molto eccitabile.

L'indomani si trova in tetano.

Le convulsioni sono simili a quelle prodotte dalla santonina, e la rana ne soffrì per 48 ore; dopo ritornò normale.

Esperienza II. — Rana di gr. 24.

H. 10,55. — S' inietta 1 c.c. di soluzione.
» 11,15. — La rana sta ferma, i movimenti ioidei sembrano diminuiti, essa risponde energicamente agli stimoli, estendendo gli arti.
» 13 — Sopporta la posizione dorsale, i riflessi sono conservati.
» 14,30. — I movimenti ioidei e i riflessi sono quasi annullati. Scoperto il cuore esso pulsa regolarmente, ma i battiti però sono rari. I muscoli eccitati direttamente o per mezzo dei loro nervi da una corrente indotta leggerissima si contraggono.

La funzione cardiaca è molto influenzata dalla santoninammina. Anche con dosi minime si osserva un rallentanento nella pulsazione accompagnato da aumento nella pressione arteriosa. Questo periodo dura poco se le dosi sono letali; perchè col progredire della paralisi, la pressione si abbassa, e la diminuzione dei battiti si fa sempre più insi stente, finchè avviene l'arresto in diastole.

Risulta da queste esperienze e dalle altre che per brevità non abbiamo riportate, che il solfato di santoninammina è, fra tutti quelli che abbiamo studiato, il derivato più velenoso della santonina.

Nelle rane con dosi mortali dopo un breve primo periodo di sovraeccitazione si produce l'indebolimento dei movimenti volontari e dei riflessi generali i quali finiscono coll'annullarsi. Se invece la dose non è letale, la rana ritorna normale dopo parecchi giorni nei quali si manifesta un'intensa azione convulsivante.

Esperienze sui mammiferi.

Esperienza I. — Cavia di gr. 520.

H. 9,30. — Iniezione di 5 c.c. di soluzione,
» 10 — Nulla d'anormale, si ripete l'iniezione.
» 10,30. — Terza iniezione.
» 10,50. — Primo accesso convulsivo con opistotono e digrignamento dei denti. Gli accessi si ripetono frequentemente, e negli intervalli la cavia sta ferma come se dormisse però di un sonno agitato, perchè cambia sovente di posizione.
» 11,15. — Sta sul ventre, la mobilità comincia a diminuire. Le convulsioni sono più rare.
» 13,45. — Si trova morta.

Esperienza II. — Coniglio di gr. 900.

H 9,50. — Iniezione di 10 c.c. di soluzione.
» 10,10. — Primo accesso convulsivo che lo fa rotolare per la stanza, con opistotono e con perdita dei riflessi corneali. Il cuore però batte fortemente durante l'accesso. Il coniglio dopo si rimette in piedi, sta però con gli occhi socchiusi, e presenta la respirazione accelerata.
» 10,30. — Altro accesso convulsivo durante il quale si osserva una breve apnea. Il coniglio poco dopo ritorna nello stato di sonnolenza accompagnata da tremore in tutto il corpo.

Le convulsioni si ripetono sempre più frequentemente, e durarono sino alle ore 11,30; dopo diminuirono e alle ore 14 il coniglio era tornato normale.

Nei mammiferi, quindi, il solfato di santoninammina produce un'azione convulsivante con dosi tanto leggiere, da rammentare quelle che si adoperano negli animali avvelenati coi più forti alcaloidi.

Esso è il solo derivato della santonina che tanto nelle rane che nei mammiferi influenza la funzione cardiaca, aumentando la pressione e diminuendo la frequenza dei battiti. È degno di nota inoltre il fenomeno che l'azione convulsivante, quando si adoperano dosi molto forti, diventa paralizzante: proprietà comune a molte sostanze tossiche.

Farmacologia. — *Sull'azione vermicida della santonina e di alcuni suoi derivati.* Nota del dott. D. Lo Monaco, presentata dal Socio Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Socî Caruel, Pincherle, Villari, dal prof. Berlese, dal cap. Gavotti, dal barone von Müller e dal colonnello Staggemeier. Presenta inoltre un volume inviato dal Ministero d'Agricoltura, Industria e Commercio avente per titolo: *Notizie e studî intorno ai vini e alle uve d' Italia*, ad una raccolta delle *Osservazioni della temperatura atmosferica,* eseguite all' Osservatorio di Greenwich dal 1841 al 1890.

CORRISPONDENZA

Il Presidente presenta una medaglia commemorativa del 70° anniversario del Socio straniero prof. G. Thomsen, inviata dal sig. S. M. Jorgensen, presidente del Comitato.

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Società delle scienze di Lipsia; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Manchester; l' Istituto Smithsoniano di Washington; il R. Osservatorio di Arcetri; la R. Scuola degl' Ingegneri di Torino; l' Università di Aberdeen.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

Il Ministero della Marina; la R. Società di scienze naturali di Budapest; la Società di scienze naturali di Francoforte s. M.; l' Osservatorio di Pietroburgo.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 3 maggio 1896.

Berlese A. — Le cocciniglie italiane viventi sugli agrumi. P. III. Firenze, 1896. 8°.

Blasio A. de — Il cranio microcefalo dell' ossuario dell' Annunziata di Napoli. Napoli, 1896. 8°.

Folgheraiter G. — Sopra il nuovo lago di Leprignano. Roma, 1896. 8°.

Gavotti F. — Manuale del Timoniere. Vol. I, II. Genova, 1895. 16°.

Lozano y Ponce de León E. — Las radiaciones de Röntgen II. Barcelona, 1896. 8.°

Manzini G. — Il forno rurale economico, ecc. Udine, 1896. 8°.

Müller F. v. — Observations on new vegetable Fossils of the auriferous drifts. I, II. Melbourne, 1874. 1883. 8°.

Notizie e studi intorno ai vini ed alle uve d' Italia (Min. Agr. Ind. e Comm.). Roma, 1896. 4°.

Parlatore F. — Flora italiana. Indice generale. Firenze, 1896. 8°.

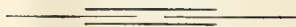
Pincherle S. — Le operazioni distributive e le omografie. Milano, 1896. 8°.

Reduction of Greenwich meteorological Observations. Part. III. Temperature 1841-1890. London, 1895. 4°.

Villari E. — Azione del magnetismo trasversale. Sul magnetismo ordinario del ferro e dell' acciajo. Bologna, 1893. 4.°

Id. — Intorno ad alcune modificazioni dell' Elettrometro a quadrante del Thomson. Napoli, 1896. 4°.

Id. — Sui raggi Röntgen. Note I, II. Napoli, 1896. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 maggio 1896.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sulle cariche e figure elettriche alla superficie dei tubi del Crookes e del Geissler.* Nota del Socio Emilio Villari.

Dopo d' avere studiato l' influenza dei tubi di Crookes e dei raggi X su di un elettroscopio [1], ho investigato lo stato elettrico della superficie dei Crookes e dei Geissler, e qui indicherò i principali fenomeni osservati.

In sulle prime ho saggiato la superficie dei tubi attivati da un rocchetto di 12 a 15 cm. di scintilla, toccandola in varî punti con un piano di prova a pallina isolata, e determinando le cariche raccolte con un elettroscopio a pile secche. In seguito, ho legato un capo di un filo sottile di rame allo stesso elettroscopio e con l' altro, legato ad un' asta di vetro, toccavo in varî punti la superficie del tubo in attività, e così determinavo la natura delle cariche raccolte. Ma con questi metodi non era facile fare un' analisi completa del fenomeno, che in principio mi apparve abbastanza complesso. Ricorsi perciò all' uso delle polveri elettroscopiche ed ottenni delle figure, di solito assai nette e precise, che manifestavano, a colpo d' occhio, lo stato elettrico della superficie dei tubi.

Dopo moltissime prove ed esperienze mi parve, che le cariche elettriche superficiali dei Crookes, e le figure che le manifestano, fossero come regolate dai seguenti principî:

[1] R. Acc. di Napoli, 15 febb. 1896, e R. Acc. d. S. di Bologna, seduta del 12 aprile 1896.

a) Nei Crookes in attività agiscono non soltanto i raggi catodici negativi, ma bensì quelli anodici positivi,

b) I raggi catodici, come è noto, si propagano in linea retta, e mostrano la loro carica — là dove battono contro la parete del tubo.

c) I raggi anodici invece, si diffondono tutto intorno, apportando e manifestando la loro carica + su tutta la superficie del tubo da essi colpita.

Ciò premesso esaminiamo i fenomeni, che si manifestano in alcuni dei tubi più comuni.

In un Crookes sferico con tre elettrodi filiformi ed uno a calotta sferica concava, se si fa negativo quest'ultimo, la sua luce catodica battendo contro la parete opposta del tubo vi produce una macchia luminosa, ramificata ed oscillante pel battere dell'interruttore del rocchetto eccitatore. Soffiando il miscuglio sul pallone in attività si produce una macchia rossa di minio, per carica — del vetro, là dove batte la luce catodica. Ma più sottilmente osservando si scorge, che il minio è attratto sulle parti poco splendenti e quasi oscure della macchia, meglio che su quelle luminose. Così che si sarebbe quasi indotti a credere, che la radiazione catodica dove rende luce non si mostra elettrizzata.

Con pochi colpi di soffietto si produce una macchia rossa leggiera e di forma variabile da una esperienza all'altra. Siccome le pareti del tubo conservano per poco la carica ricevuta dalle radiazioni, così le figure possono ottenersi, ed anche più nette, facendo passare soltanto alcune scariche pel pallone, e poscia soffiandovi sopra il miscuglio.

Le fig. 1 e 2 furono ottenute in questo modo, in due diverse esperienze con lo stesso tubo. La parte ombreggiata verso il centro risponde alla macchia di minio. Intorno, ed anche un po' nel centro di essa, ove meglio pare splender la luce, vi è una zona neutra, indicata in chiaro, priva di minio o qualche traccia di solfo. Su quasi tutto il palloncino si depone un leggiero strato di solfo, attrattovi da carica +, e raffigurato dalla punteggiatura o chiaroscuro. Continuando a soffiare il miscuglio, mentre il tubo è in attività, nuovo minio si raccoglie sulla macchia, che prende aspetto alquanto diverso e meno delicato del precedente, pel continuo oscillare delle parti oscure della macchia, che attraggono il minio.

Sul bocciuolo del catodo si depone un poco di minio, che si estende, qualche volta in bellissime e lunghe ramificazioni. Una zona tersa e neutra, in prossimità del catodo, separa il minio dal solfo.

Queste figure nette e distinte, è bene avvertirlo, che ho ottenute con un vecchio palloncino, non s'ottengono sempre. In tre palloncini nuovi ricevuti dal Desaga, con elettrodo a disco piano, le figure si producono assai imperfette e poco o punto distinte.

Facendo anodo l'elettrodo concavo od uno di quelli in fili, ed un altro di questi catodo, la luce catodica si diffonde sul suo bocciuolo, che con le

polveri si riveste di poco minio, mentre il resto del pallone, dopo una zona neutra, si ricopre di solfo per le radiazioni anodiche $+$.

In queste esperienze è utile adoperare un miscuglio non troppo ricco di minio, per ovviare che questo, se in eccesso, si sovrapponga al solfo.

V' hanno dei palloncini del Crookes, ed io ne posseggo uno grande ed uno piccolo, con una lastrina centrale di platino iridato, unita ad un elettrodo, e con un elettrodo a disco in alto ed uno a coppa in basso. Questi palloni comunque attivati si ricoprono quasi per intiero di solfo, quando vi si soffia la

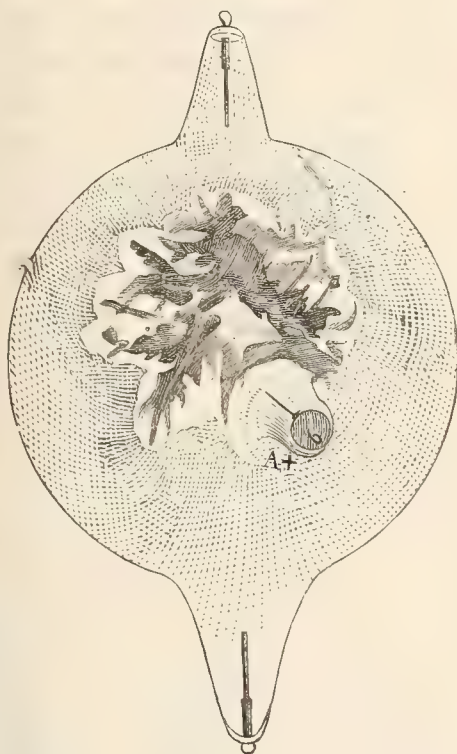



Fig. 1. Fig. 2.

nota miscela. Difatti, facendo catodo l'elettrodo superiore od inferiore ed anodo il centrale, i raggi catodici vengono come fermati dalla lastrina centrale, che s' arroventa; ed i raggi anodici, provenienti da questa, si diffondono sul pallone e lo caricano in $+$. Se invece si fa catodo la lastrina centrale, i raggi emessi dalle sue superficie sono fermati dagli elettrodi verticali, dei quali il positivo diffonde sul pallone i proprî raggi anodici. Solo sul bocciuolo negativo può raccogliersi un po' di minio.

In un tubo diritto con appendice a potassa, per la variazione del vuoto, e diaframma di mica ad una o due fenditure, per osservare la propagazione dei fasci catodici, scorgesi con le polveri, che tutta la superficie del tubo è

positiva o gialla, mentre poco minio si depone intorno al catodo, e là dove percuote la luce catodica.

Nei palloncini con un minerale fosforescente e due elettrodi superiori a disco s' osserva con le polveri, che il gambo inferiore di vetro, che fa da sostegno ed anche un po' il piede di legno corrispondente, influenzati dai raggi catodici di uno dei dischettini, si rivestono di minio. La superficie del pallone, ove si diffondono i raggi anodici, si ricopre di solfo. Sul bocciuolo catodico v' è del minio, che spesso riveste anche la base dell' anodico, influenzato dal primo, che vi è vicinissimo.

Interessanti sono i fenomeni che ho osservato in un tubo a V. In esso vi sono tre elettrodi a disco, uno a ciascun estremo e l' altro nell' angolo.

Fatto catodo uno degli elettrodi (1) e l' altro anodo, la luce catodica batte sul disco in angolo, e la radiazione anodica si diffonde per tutto il tubo. Soffiando le polveri, il tubo si copre per intiero di uno strato di solfo, e solo alla curvatura ed intorno al catodo, d' onde sfuggono pochi raggi catodici, si raccoglie pochissimo minio. Su questo tubo se, subito dopo interrotte le scariche del rocchetto, si striscia, secondo la sua lunghezza, un filo unito al suolo, la carica anodica + del vetro attira dal filo carica — su quei punti pei quali passa. Soffiandovi poscia le polveri, la traccia del filo sarà indicata da una linea rossa. Se il filo striscia sul tubo mentre è in attività, il fenomeno e le figure sono più complesse. Oltre la traccia rossa precedente accadrà, che ad ogni scintilla interna al tubo si provocheranno delle scariche dal filo, successive e diverse le quali si manifesteranno con le polveri. Nella fig. 3 è disegnato uno di cotesti tubi ad $^1/_4$ del vero; il quale, per la sua carica +, si ricoprì tutto di poco solfo; la linea mediana longitudinale risponde alla traccia rossa —, rimasta dal filo, che riunisce le varie macchie, non del tutto simile sulle due branche. Su quella a sinistra o catodica, le macchie hanno una parte rossa centrale *b*, circondata da una zona gialla radiata e da una rossa continua, separate da zone neutre e terse. La zona +, radiata di solfo

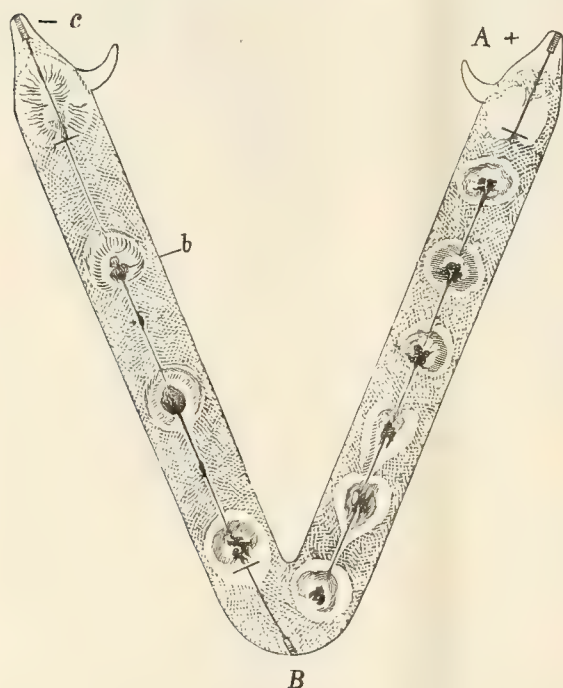



Fig. 3.

(1) È bene far catodo l'elettrodo *c*, di fronte al dischetto nell'angolo.

è predominante, anzi sola, in vicinanza del catodo, e scema man mano allontanandocene; così che il solfo più non si scorge intorno alla macchia presso l'angolo del tubo, nè in quelle della branca anodica a destra.

L'origine di queste figure è difficile indicarla con precisione, tuttavia le possiamo supporre generate nel modo seguente. Al momento di una scintilla nel tubo, la scarica anodica + si diffonde, come si è detto, su tutta la superficie di questo, mentre la catodica è assiale e batte contro l'elettrodo posto nell'angolo. Per tali radiazioni il tubo si carica, ad un dipresso, come nella figura 4. Avvicinando al tubo il filo superiore *a* unito al suolo, la carica superficiale + superiore attirerà dal filo elettricità —, che con le polveri produce la macchia rossa centrale. La carica catodica —, nel centro del tubo, richiama dal filo carica +, che si raccoglie intorno alla macchia centrale, e si ricopre di solfo; e finalmente la parete *b c*, più lontana ancora dal filo, richiama da questo nuova carica —, che forma l'ultima zona esterna, che ricopresi anche di minio. Dette zone sono naturalmente separate da zone neutre.

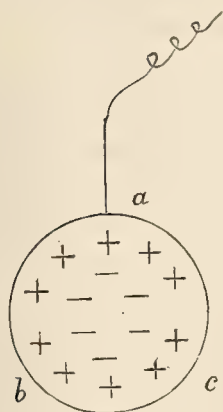



Fig. 4.

Tale interpretazione pare confermata dal fatto, che la zona + del solfo diminuisce con l'allontanarci dal catodo, e più non si osserva, nè all'angolo del tubo, nè dopo di questo, sulla branca destra od anodica, perchè, come è noto, le radiazioni catodiche non passano oltre le curvature dei tubi. Invece le radiazioni anodiche si diffondono su tutta la superficie, che perciò si riveste di solfo.

Ciascuna macchia, come si disse, risponde ad una scarica pel tubo, per cui spostando su di esso uniformemente il filo, si possono ottenere, con le polveri, macchie vicine o lontane a seconda della rapidità con cui oscilla l'interruttore del rocchetto. Sulla branca a destra le macchie sono vicine, perchè l'interruttore oscillò rapidamente, e su quella a sinistra sono lontane perchè oscillò lentamente. Per mezzo del filo possono, come è naturale, tracciarsi delle lettere sui tubi, che con le polveri appariscono rosse in campo giallo.

Più complesse e variate sono le figure che si producono sui tubi a pera, nei quali, e negli altri ancora, debbono distinguersi due periodi, a seconda che essi sieno nuovi od a lungo stati adoperati. Nel primo periodo, specialmente facendo anodo il dischetto, il tubo si riempie di luce violacea, che va man mano diminuendo. In questo primo periodo la resistenza interna del tubo è piccolissima e cresce di molto con l'uso; onde è che accostandovi le dita, in sulle prime non se ne ottengono quelle molte e piccole scintilline che s'ottengono dopo. E per questa piccola resistenza, in sulle prime, passa pel tubo anche la scintilla inversa di chiusura, indicata da uno sprazzo di luce. Per misurare la detta resistenza misi in derivazione di

un nuovo Crookes a pera, uno spinterometro a punte di platino; e, smuovendo a mano l'interruttore del rocchetto, allontanai le punte dello spinterometro fino a che la scarica passasse, pressochè egualmente, fra esse e pel tubo. La lunghezza della scintilla misurava, con una certa approssimazione, la resistenza del pallone. Ecco alcuni dei risultati, relativi alla scintilla d'interruzione, ottenuti con un tubo a pera, nel quale s'era staccato la croce.

Tubo nuovo a pera.	Scintilla spinterometro.
La scarica va dall' apice del tubo al mezzo	3 mm.
» dal mezzo all' apice del tubo	23 »
Dopo aver adoperato il tubo per circa 20 minuti	
La scarica va dall' apice al mezzo del tubo	4 »
» dal mezzo all' apice »	30 »
Dopo circa 2 ore d' attività del tubo la luce violacea era quasi sparita e si ottenne	
La scarica va dall' apice al mezzo del tubo	15 »
» dal mezzo all' apice »	117 »

Questi risultati, sebbene non rigorosi, pure mostrano chiaro che la resistenza del tubo s'è accresciuta grandemente con l'uso, così che nelle ultime misure essa è circa quintupla che nelle prime. Quando, adunque, la resistenza interna è piccola, il potenziale alla superficie del tubo è piccolo, ed accostandovi le dita non se ne cavano scintille, che invece s'ottengono quando il tubo, per lungo uso, ha acquistato grande resistenza.

In questo primo periodo, quando la scarica va dal centro all'apice del tubo, esso, con le polveri, si ricopre di solfo, salvo l'apice, catodo, che si riveste di minio per 2 o 3 cm. Se invece si fa catodo l'elettrodo centrale, il tubo, con le polveri, si ricopre pressochè completamente di minio. Quasi si direbbe, che la carica elettrica si diffondesse alla superficie del tubo, dall'elettrodo centrale che vi è più vicino; ed a seconda che questo sia + o —, il pallone si ricopre di solfo o di minio. Questo pallone, essendosene staccata la croce, non potei adoperarlo a croce elevata od abbassata; pure con altro tubo, con la croce, mi pare aver notato, che i fenomeni su indicati sono indipendenti dalla posizione di essa.

Veniamo a dire del secondo periodo, che si manifesta dopo lungo uso del tubo, e che è più interessante del primo. Facendo anodo la croce elevata od abbassata, il tubo, con le polveri, si ricopre tutto di solfo, salvo il vertice che si ricopre di minio, come nel caso analogo del primo periodo. Se invece facciamo catodo la croce, che si tiene abbassata, il tubo s'illumina quasi tutto di luce catodica, la quale emanata dalla croce viene a battere più specialmente contro la parete superiore del tubo. Ivi forma una specie di macchia

luminosa irregolare con ramificazioni interne ed esterne, quasi oscure, oscillanti e con moti quasi vermiformi, dovuti al battere dell' interruttore. Essa macchia, con l' uso del tubo, diventa sempre più ampia, distinta ed interessante, e solo dopo più giorni che si è adoperato, acquista tutto il suo sviluppo e la sua bellezza. Soffiando il miscuglio sulla macchia si produce una figura di minio, raccolto principalmente sulle sue parti oscure ed oscillanti.

Le stesse figure possono ottenersi, abbenchè meno perfette, soffiando il miscuglio dopo una sola scarica pel tubo. Ma per averle più belle e vistose è bene lasciare andare l' interruttore per parecchi secondi, fermarlo quando l' immagine luminosa, con le sue ramificazioni, ha raggiunto tutto il suo splendore, e subito dopo soffiarvi le polveri. Così s' ottenne la fig. 5, qui accanto

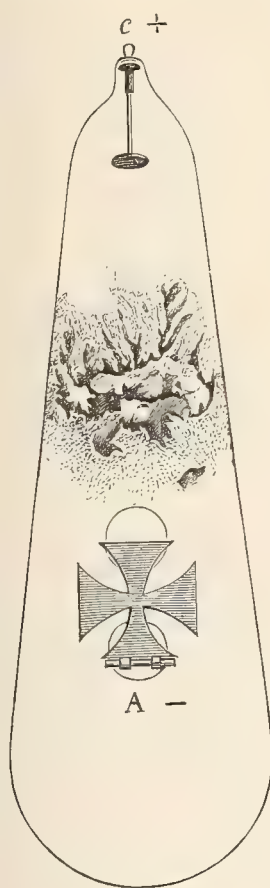



Fig. 5.   Fig. 6.

disegnata alla meglio. Non deve nascondersi che occorre, il più delle volte, di adoperare i tubi per qualche ora, prima che si prestino a queste esperienze.

Nel tubo adoperato s' è presentato un fatto degno di nota. La luce catodica, spinta in alto dalla croce abbassata, pare che si rifletta sul vetro, e venga a battere contro la parete inferiore del tubo, formandovi una seconda immagine luminosa, a ramificazioni oscure oscillanti. Con le polveri si produce un' altra figura, indicata dalla fig. 6, vista dal disopra del tubo, alquanto

diversa dalla precedente, e che ricorda quasi le ramificazioni delle corna di cervo.

Questa seconda figura sospettai, in principio, fosse generata dalla proiezione diretta delle radiazioni del bordo della croce abbassata, ma dopo varie osservazioni la credo piuttosto dovuta alla riflessione, come ho detto di sopra. Osservai, di fatti, fra le altre cose, che disposto l' asse del tubo e la croce verticalmente, si producevano quattro figure luminose sulle pareti del tubo; due più ampie per la luce diffusa dalle due facce della croce, e due più piccine, e più verso l' anodo, che mi parvero prodotte dalla riflessione sul vetro della luce catodica, che emanata dalla croce produceva le due macchie precedenti, e non già dalla proiezione diretta.

Il fondo e la parte vicina del tubo si ricoprono lievemente di minio, per diffusione catodica dal gambo della croce. Il resto del tubo, dalla croce all' apice, per diffusione anodica dell' anodo che era all' apice, si ricopre di grosso strato di solfo, separato dal minio da zona tersa e neutra. In mezzo allo strato di solfo e di minio si producono spesso delle macchie di minio o di solfo per radiazioni singole. I bocciuoli portanti gli elettrodi si ricoprono delle polveri rispondenti alle proprie cariche.

Nel tubo da me adoperato in queste esperienze, che ha una croce d' alluminio molto sottile e leggierissima, s' è mostrato un fenomeno, che non credo sia stato osservato da altri. Quando il tubo è orizzontale, se si fa catodo la croce, essa subito s' abbatte, come se fosse stata respinta dal fondo del tubo. L' azione è tanto energica, che si osserva anche quando il tubo è inclinato a 45°; e si è talmente accresciuta con l' uso del tubo, che quando è verticale la croce viene respinta e saltella con l' oscillare dell' interruttore.

Questo fatto non credo possa riferirsi ad una reazione dei raggi catodici emessi, egualmente forse, dalle due facce della croce. Suppongo invece, che i raggi catodici, provenienti dalla croce, riflessi sul fondo del tubo, vengano a ripercuotersi sulla croce stessa e l'abbattono. Facendo catodo il dischetto all' apice del tubo, può osservarsi una spinta della croce, come nel caso precedente, ma assai più debole. In questo caso i raggi catodici provenienti dal disco batterebbero, in parte sulla croce ed in parte sul fondo del tubo, d' onde riflessi ripercuoterebbero sulla faccia opposta della stessa croce per abbatterla.

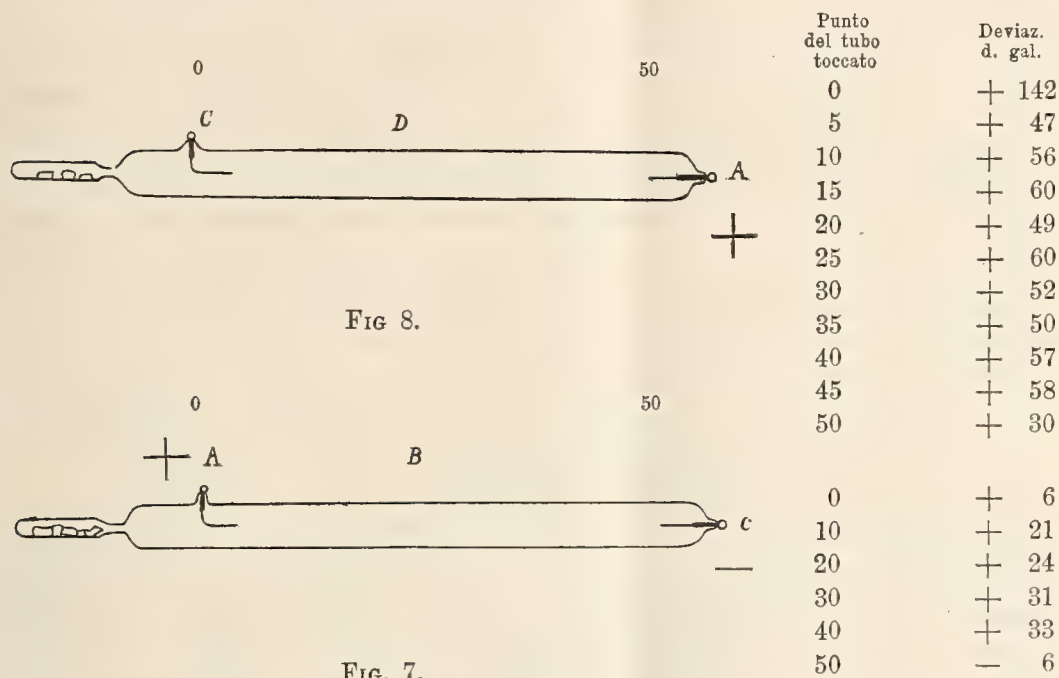
Facendo catodo l' apice del tubo, le cariche svelate dalle polveri sono meno costanti nei varî tubi. In un vecchio tubo che trovavasi in gabinetto e che dava, con la croce elevata, una splendida ombra, si disegnava questa nitidamente in giallo, con l' uso delle polveri. Negli angoli apparivano dei filetti rossi ed il resto del tubo si rivestiva di solfo. Un tubo più recente, inviatomi dal Desaga, a croce elevata od abbassata, si ricopriva tutto di solfo, salvo una zona, fra il fondo ed il corpo del tubo, che si rivestiva come d' una corona di macchie circolari rosse.

Studî galvanometrici. Le cariche superficiali del Crookes possono osser-

varsi spesso accostandovi le dita, che vengono colpite da sottili e lunghe scintilline. La loro natura può determinarsi con l'elettroscopio a pile secche, o meglio con un galvanometro. Adoperai il galvanometro del Wiedemann ad un solo rocchetto di circa 4000 giri, con uno dei capi unito ai tubi del gas e l'altro ad un sottile filo di rame, che avvicinavo, come scandaglio, ai diversi punti della superficie del tubo. Le prime indagini furono eseguite su di un tubo, a potassa, diritto, che divisi con segni ad inchiostro di 5 in 5 cm. da sinistra a destra. Le esperienze mi dettero le seguenti deviazioni del galvanometro, unito ai varî punti del tubo.

Fig 8.

Fig. 7.

Punto del tubo toccato	Deviaz. d. gal.
0	+ 142
5	+ 47
10	+ 56
15	+ 60
20	+ 49
25	+ 60
30	+ 52
35	+ 50
40	+ 57
45	+ 58
50	+ 30
0	+ 6
10	+ 21
20	+ 24
30	+ 31
40	+ 33
50	— 6

Il segno + indica una corrente, che parte dalla superficie del tubo. Le deviazioni riportate non sono regolari, e variano grandemente, specialmente quando lo scandaglio s'approssima troppo agli elettrodi. Da essi saltano spesso scintille, che fanno deviare il galvanometro anche di tutta la scala, in + o —, secondo i poli dai quali scattano le scintille.

Ma facendo astrazione da queste ultime ed energiche correnti, e considerando che le deviazioni osservate, scandagliando i varî punti della superficie del tubo, sono saltuarie per effetto dell'oscillare dell'interruttore, possiamo dire, che la carica positiva del tubo è presso a poco costante in tutta la sua lunghezza, come si vede anche adoperando le polveri. Però nella esperienza, con la disposizione della fig. 8, la carica è oltre il doppio che con la disposizione della fig. 7, per la diversa resistenza elettrica, che il tubo oppone alla scintilla, come diremo in seguito.

Tubi sferici. Nei Crookes sferici, fatto catodo l'elettrodo leggiermente concavo ed anodo quello filiforme opposto, si trova col galvanometro, che la macchia fluorescente prodotta dal catodo è sempre, ma variamente, negativa,

mentre il resto del pallone apparisce positivo, salvo nelle vicinanze del catodo che di nuovo si mostra negativo. Risultato questo d' accordo con quello ricavato con le polveri. Le indicazioni galvanometriche ottenute dalla superficie di un vecchio pallone ad elettrodo concavo e molto resistente, per lunghissimo uso, erano più energiche quando la scarica andava verso il disco dalla punta di faccia, cioè quando la scarica incontrava nel pallone maggior resistenza (come vedremo or ora), che in verso contrario. Riunendo poi il galvanometro con l' elettrodo superiore od inferiore di cotesto pallone s' ottenevano sempre delle correnti positive di 8 a 12 mm. qualunque fosse la direzione della scarica del pallone.

Queste diverse correnti, raccolte alla superficie dei Crookes, pare (sebbene forse non sempre) che siano in relazione con la diversa resistenza incontrata dalle scariche, nel pallone, secondo la loro direzione. Per misurare coteste resistenze misi uno spinterometro a punte di platino in derivazione nel circuito del Crookes, la cui resistenza veniva, con approssimazione, indicata dalla lunghezza della scintilla fra le punte, quando essa scattava, ad un dipresso, egualmente pel tubo e per lo spinterometro. Ecco i risultati medî ottenuti col Crookes sferico precedente:

Scarica nel Crookes	Scintilla spinterometro
Scintilla dal disco al filo mediano	58 mm.
" dal filo mediano al disco	214 mm.

Coteste misure, benchè non rigorose, mostrano che la resistenza del pallone è molto maggiore quando la scarica vi passa dall' elettrodo a disco a quello a filo, che in senso contrario; ed è appunto nel primo caso che, le cariche superficiali del pallone sono più vistose, che nel secondo [1]. Avvertasi che nell'aria libera la scintilla è più lunga, e v' incontra minore resistenza, quando va dalla punta al disco.

Risultati simili, ma meno distinti, ottenni dall' esame dei tubi diritti adoperati di sopra. Così, nel caso della disposizione della fig. 8 del tubo diritto, a carica superficiale maggiore, la sua resistenza fu trovata di 35 a 39 mm. di scintilla dello spinterometro; e nel caso della disposizione della fig. 7, a carica superficiale minore, la resistenza fu del pari minore, cioè di 25 a 33 mm.

Simili ricerche eseguii con un Geissler sferico eguale e simile al Crookes più sopra adoperato, e trovai che la resistenza del Geissler era tanto piccola, da non potersi avere scintille nello spinterometro in derivazione. Sulla

[1] Devo notare, che nel mio giornale trovo registrate delle esperienze fatte col medesimo pallone nuovo e di piccola resistenza, dalle quali risulta, che le indicazioni galvanometriche maggiori si ebbero quando la scintilla lo percorreva nel senso della minore resistenza. Risultato, cioè, contrario a quello riportato sopra. Mi propongo ristudiare il fenomeno quando avrò nuovi tubi.

superficie di cotesto tubo non si osserva alcuna carica sensibile, nè all' elettroscopio nè al galvanometro, nè alle polveri. Però delle lievi cariche si poterono constatare agli elettrodi verticali, quando la scintilla del rocchetto si faceva balenare fra quelli orizzontali. Per semplificare queste ricerche sperimentai gli effetti di una sola delle scariche, di chiusura o di apertura, giacchè passavano entrambi. Dalle varie osservazioni risultò, che gli elettrodi verticali dànno sempre segni di carica +, debole quando la scintilla interna (diretta od inversa) vada dall' elettrodo a filo a quello a disco, e carica più energica quando la scintilla vada dal disco al filo.

Riassunto. I tubi del Crookes s' elettrizzano sulla loro superficie pei raggi catodici, che vi si propagano internamente secondo una data direzione e per gli anodici, che vi si diffondono su tutta la superficie.

Le cariche superficiali possono determinarsi con l' elettroscopio, col galvanometro e con le polveri elettroscopiche. Queste vi producono delle figure, spesso assai nette e caratteristiche, che possono, per sommi capi, indicarsi come segue.

In un Crookes sferico, facendovi catodo il disco concavo, le polveri vi producono una bella figura di minio (fig. 1 e 2) là dove batte la luce catodica, ed il resto del pallone si ricopre di leggiero strato di solfo. Spesso ramificazioni rosse produconsi vicino al catodo, il cui bocciulo, del pari, presentasi rosso. Il minio e lo zolfo sono sempre separati da una zona neutra e tersa.

I palloncini destinati a mostrare l' arroventamento di una lastrina centrale di platino ed iridio, con le polveri si ricoprono per intiero di solfo per la radiazione anodica +, che si diffonde sulla superficie; mentre la catodica, se proviene dalla lastrina centrale, è fermata dalle lastrine degli elettrodi verticali; e se emana da una di queste, viene fermata da quella centrale.

Per analoghe azioni i tubi diritti e quelli a V, che hanno un elettrodo a ciascun estremo ed uno nell' angolo, si ricoprono di zolfo, salvo il catodo e l' angolo, ove batte la luce catodica, che attraggono un poco di minio.

Appoggiando o strisciando lungo cotesto tubo a V un filo di rame unito al suolo, le cariche del vetro e quelle che vi si manifestano ad ogni scintilla interna, richiamano dal filo sul tubo cariche diverse, che le polveri svelano, fig. 3, con una linea rossa, e con delle macchie a zone rosse e gialle intramezzate da zone neutre. Coteste macchie sono vicine, se l' interruttore batte rapidamente, e lontane se batte lentamente.

Nei tubi a pera la loro resistenza interna s' accresce grandemente con l' adoperarli; cosa che accade con gli altri tubi ancora; onde vi si possono distinguere ben due periodi. Nel primo (tubi a piccola resistenza), facendo l' elettrodo centrale [1], positivo o negativo, la carica si diffonde su tutto il pal-

[1] Nel pallone adoperato in queste esperienze s' era distaccata la croce d' alluminio.

lone, che con le polveri si ricopre di solfo o di minio, salvo l'apice che si riveste di minio o solfo. Nel secondo periodo (tubo a grande resistenza) facendo anodo l'elettrodo a croce, elevata od abbassata [1], la carica + di essa si diffonde sul pallone, che si ricopre di zolfo, come nel caso analogo del primo periodo. A croce abbassata e negativa, la sua luce catodica si vede diffusa pel tubo, e più specialmente battere contro la parete superiore di esso, e riflettersi sulla inferiore, producendo così due immagini luminose ramificate, oscillanti e bellissime, le quali con le polveri producono in rosso le fig. 2 e 3. Anche il fondo ed il grosso del tubo, per diffusione catodica, si coprono di pochissimo minio, mentre la parte verso l'apice si ricopre di molto solfo.

Se si fa catodo la croce elevata (che nel mio tubo è sottilissima), essa viene come respinta dal fondo del tubo e subito abbassata, anche quando questo sia quasi verticale. Il fatto sembra dovuto ai raggi catodici, che riflessi contro il fondo del tubo vengono ripercossi contro la croce e l'abbattono. Un fenomeno simile, ma meno distinto, s'osserva facendo catodo il disco, all'apice del tubo.

Nel caso che il disco si faccia catodo, e la croce anodo, la carica + di questa si diffonde sul tubo, che si ricopre di solfo.

Le cariche dei tubi furono studiate anche col galvanometro, ed i risultati furono d'accordo con quelli ottenuti con le polveri. I Crookes mostrano cariche +, pressochè costanti sulle loro superficie, e più energiche quando la scintilla interna ad essi incontra, per la sua direzione, una maggiore resistenza. Là dove batte la luce catodica ed in vicinanza del catodo lo scandaglio galvanometrico raccoglie carica negativa. Se poi si raccolgono le cariche degli elettrodi verticali, che penetrano nell'interno d'un palloncino Crookes, s'ottengono sempre delle deboli correnti positive col pallone da me adoperato, a grandissima resistenza.

Le resistenze nei tubi furono determinate approssimativamente dalla lunghezza della scintilla fra le punte d'uno spinterometro messo in derivazione coi tubi.

Nei Geissler, che hanno grandissima conducibilità, non s'osserva alcuna carica superficiale con le polveri, con l'elettroscopio, col galvanometro. Scandagliando, invece, l'interno d'un palloncino con gli elettrodi verticali, che vi penetrano, s'ottengono sempre cariche positive più o meno distinte, a seconda che la scintilla vi vada dal disco al filo di contro, o viceversa.

[1] In queste esperienze adoperai un pallone con la croce.

Fisica. — *Sull'azione dei raggi Röntgen sulla natura della scarica esplosiva nell'aria* [1]. Nota dei dott. A. SELLA e Q. MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

1. Sulla fine della Nota da noi presentata a questa Accademia nella seduta del 12 aprile 1896, noi accennammo al fatto, che l'azione dei raggi Röntgen sulla scintilla esplosiva nell'aria, si fa sentire non solo in quanto essa può provocare od impedire la produzione di essa scintilla, ma anche nell'alterare la natura della scarica stessa. Ed è appunto su questo proposito che ci proponiamo ora di riferire brevemente alcune esperienze, che ci pajono più dimostrative, lasciando la descrizione dettagliata di tutte le nostre ricerche sui raggi Röntgen dal punto di vista della loro azione sulla scintilla ad un lavoro di maggior mole.

Noi avevamo indicato coi nomi di fenomeni primo (Hertz) e secondo l'accendersi o lo spegnersi della scintilla sotto l'azione di radiazioni Röntgen ovvero ultraviolette. Ma visto che in prossimità del limite del passaggio della scintilla — quando cioè questa scocca, sia lasciando agire le radiazioni, sia eliminandole — la natura della scarica resta alterata dalla presenza dei raggi, denomineremo genericamente con le parole fenomeno primo e secondo non solo l'accensione e rispettivamente lo spegnimento della scintilla, ma anche il complesso delle alterazioni che avvengono nella scarica, quando la distanza esplosiva limite minima (nel primo fenomeno senza azione delle radiazioni, nel secondo sotto questa azione) viene appena accorciata così da permettere sempre il passaggio della scintilla.

2. Veniamo dapprima alla descrizione delle due disposizioni sperimentali diverse, con cui abbiamo operato per sperimentare sui due fenomeni.

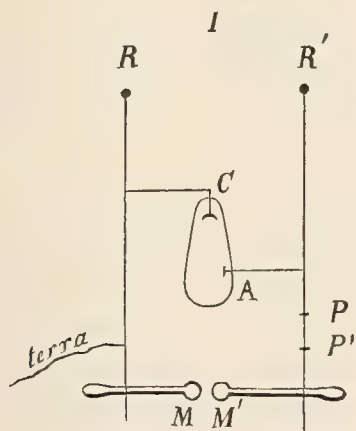
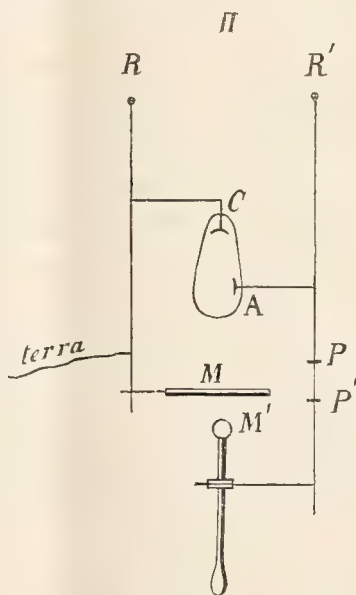



FIG. 1. FIG. 2.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

La disposizione I è quella già da noi riportata nelle nostre Note precedenti. Con essa è possibile ottenere sia il primo sia il secondo fenomeno, e ciò regolando convenientemente le dimensioni delle palline MM', la loro distanza e l'intensità della scarica. Questa disposizione però è stata da noi adoperata nelle presenti ricerche solo per studiare il primo fenomeno, e all'uopo le palline MM' hanno 52 mm. di diametro, e sono costituite da ottone amalgamato di fresco alla distanza di circa 1 cm. Crescendo questa distanza si avrebbe il fenomeno secondo, ma poichè trovammo che la disposizione II, che ora descriveremo, ce lo forniva in misura molto maggiore, così destinammo la I puramente allo studio del primo fenomeno.

Nella disposizione II lo spinterometro posto in derivazione sul tubo è costituito da una lastra di alluminio M e da una pallina M' di ferro che può avvicinarsi ed allontanarsi da quella. I raggi Röntgen traversando la lastra di alluminio corrono paralleli e coincidenti alla linea esplosiva della scintilla.

Al fine di avere un buon funzionamento della disposizione, occorre che la lastra M e la pallina M' sieno molto ben pulite; e fu trovato conveniente e semplice asportare gli ossidi o pulviscoli metallici della lastra con un pannolino imbevuto di olio, e strofinare la pallina anodica con carta smerigliata finissima. Osserviamo che in buone condizioni, se la distanza esplosiva sotto l'azione dei raggi Röntgen è di 25 mm. quando questi vengano schermati, introducendo una lastra opaca fra il tubo ed M, quella diventa circa lunga 10 cm., crescendo così nel rapporto di 1 a 4. Con questa disposizione è possibile ottenere anche il fenomeno primo; però fu trovato che esso non compariva, che quando la distanza MM' era di pochi millimetri e quindi con un'intensità di scarica molto debole. In conseguenza di ciò, questa disposizione fu sempre destinata allo studio del fenomeno secondo. La lastra M era quadrata con 20 cm. di lato e 0,5 mm. di spessore; la pallina M' di 10 mm. di diametro e la distanza esplosiva MM' tenuta intorno ai 3 cm.

Nella disposizione I, al fine di difendere il tratto esplosivo dalle azioni secondarie del Crookes, che, come è noto, si elettrizza fortemente, veniva interposta nel cammino dei raggi Röntgen una lastrina sottile di alluminio in comunicazione col suolo. Nella II invece la lastra P' catodica, essendo al suolo, riempiva lo stesso ufficio senz'altro.

3. Supponiamo ora di interrompere il circuito in due punti P, P', di sopprimere il tratto PP' e di porre quelli in comunicazione con gli estremi della spirale primaria di un trasformatore. Questo era costituito da pochi giri di una spirale di filo di rame di filo di 3,5 mm. di diametro entro un tubo di ebanite, sul cui mantello esterno erano avvolte 200 spire di un filo di 0,5 mm.; il tutto immerso nell'olio. Gli estremi del secondario terminavano ad uno spinterometro SS' a punte con vite micrometrica difeso con cura da ogni radiazione.

In tali condizioni si può avere colla disposizione I una distanza esplo-

siva nello spinterometro secondario $S S'$ tale che passa una piccola scintilla quando i raggi X non possono agire sul tratto esplosivo MM'; mentre quella cessa subitamente, quando si toglie lo schermo che li intercettava. Tutto il rovescio avviene colla disposizione II; se si regola la distanza esplosiva $S S'$ in modo che la scintilla passi ancora quando i raggi X agiscono su $M M'$, essa cessa subito quando si interpone lo schermo.

Se sui punti $P P'$ si pongono in derivazione una spirale di filo conduttore e lo spinterometro a punte predetto, si avranno gli stessi fenomeni di prima, se pure in scala alquanto minore. Vale a dire per l'autoinduzione propria della spirale, che nella specie era la spirale secondaria del nostro trasformatore od anche la primaria, scoccavano nello spinterometro delle scintille, quando nel fenomeno primo venivano schermati i raggi X, e nel secondo quando questi agivano su MM'.

4. Uniamo ora $R R'$ colle armature di un piccolo condensatore e regoliamo come prima la distanza del tratto esplosivo $M M'$ in modo che la scintilla passi anche quando i raggi Röntgen sono schermati, nella disposizione I, e nella II quando i raggi vi battono sopra.

Unendo ora $P P'$ con i capi del primario del trasformatore sopra descritto (siamo qui nel caso di un condensatore che si scarica per un tratto esplosivo nell'aria in un trasformatore, cioè realizziamo — a parte il ramo derivato in cui sta il Crookes — una disposizione adottata nelle esperienze Thomson-Tesla) mentre il secondario termina allo spinterometro $S S'$; allora colla disposizione II, cioè nel secondo fenomeno, i fiocchi in $S S'$ sono molto più vivi e la distanza della scintilla è maggiore, quando i raggi battono su $M M'$, che non quando questi vengono schermati. Avviene il rovescio colla disposizione I, cioè nel primo fenomeno.

5. Se conservando il condensatore, come nella esperienza precedente, si pone su P, P' un corto circuito formato da un filo di rame di 5 mm. di diam. e lungo circa un metro e mezzo, si ha quella disposizione che serve a dimostrare l'impedenza delle scariche rapidamente oscillatorie; potendosi avvicinare due palline metalliche collegate metallicamente con $P P'$ ed ottenere fra di esse una vivace scintilla. Questa scintilla nella disposizione II è molto più lunga quando i raggi Röntgen agiscono su MM' e nella I è invece più lunga quando i raggi vengono schermati. Inutile aggiungere che questa scintilla secondaria veniva accuratamente sottratta all'azione di radiazioni. Anche con una lampadina elettrica appoggiata cogli estremi metallici sull'arco del corto circuito si può constatare l'impedenza cresciuta nel fenomeno secondo, quando i raggi battono su MM', nel fenomeno primo quando i raggi sono schermati.

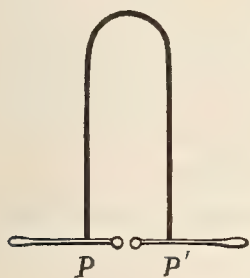



Fig. 3.

6. Finalmente supponendo soppresso l'intervallo $P P'$ e ponendo in quel

punto il circuito in contatto con l'armatura di una boccia di Leida, dall' altra armatura si possono trarre con un conduttore al suolo lunghe scintille ed ancora qui avviene che la lunghezza di queste scintille, quando i raggi X agiscono su MM', è nel primo fenomeno maggiore, nel secondo minore che non quando i raggi sono schermati.

7. Osserviamo in ultimo che tutte queste azioni le abbiamo potute ottenere anche illuminando il tratto MM' con luce ultravioletta fornita da un arco voltaico. E questo fatto è da porsi in relazione coll' osservazione di Hertz, che se il tratto di scintilla nell' oscillatore è colpito da luce ultravioletta rimane depressa la sua attività oscillatoria [1]; ma la discussione delle conseguenze delle nostre esperienze ci porterebbe lontano dai limiti che ci siamo prefissi in questa Nota. Citiamo ancora, come riferentesi a questo argomento, le recenti esperienze di Elster e Geitel [2].

Storia della fisica. — *Sopra un' eolipila del principio del secolo.* Nota del dott. G. Folgheraiter presentata dal Socio Blaserna.

Il Socio di questa R. Accademia W. Helbig donava all' Istituto fisico di Roma una eolipila trovata in uno scavo dei dintorni di Roma, esprimendo il desiderio di conoscere l' epoca a cui appartiene. Le poche osservazioni che seguono tendono a chiarire tale problema.

L' eolipila, istrumento portatile usato oggi assai comunemente per fare saldature, è un' applicazione dell' eolipila di Herone d' Alessandria [3]. Questa è l' unica macchina a vapore conosciuta dagli antichi, che rimase, salvo piccole modificazioni, inalterata fino alla fine del secolo scorso e senza vere pratiche applicazioni.

Un tentativo di applicarla come forza motrice fu fatto da Branca, architetto della chiesa di Loreto, il quale nella sua opera intitolata *Macchine* [4] offre il disegno di una macchina, che agisce per mezzo di un motore meraviglioso, che non è altro che il vapore. Questo esce dalla caldaia per un foro, ed agisce direttamente sulle pale di una ruota, che viene mossa.

Molto più tardi il barone Cristiano Wolf [5] espose una serie di espe-

(1) Wied., Ann. 24, p. 169; 1888.

(2) Wied., Ann. 57, p. 302; 1896.

(3) *Gli artificiosi e curiosi moti spiritali di Herone* tradotti da G. B. Aleotti. Bologna, Tip. Carlo Zenero, 1647, pag. 56.

(4) Quest' opera fu pubblicata in Roma nel 1629; il disegno della macchina trovasi nella parte 1ª, fig. 25. Vedi Enciclopedia italiana, 6ª edizione, vol. VIII, pag. 628.

(5) Wolf. Nützliche Versuche u. s. w. Halle 1737. Confr. pure il Gehler's, *Physikalisches Wörterbuch,* vol. II, pag. 416.

rienze e di usi, ai quali si prestava l'eolipila: tra le altre cose egli accenna di avere acceso una corrente di vapore di spirito di vino, che usciva da un'eolipila, e che dirigeva sopra una fiamma; ma non parla di applicazioni alle quali avrebbe potuto servire il caldo che ne risultava. Chi ha utilizzato e reso pratico questo sistema per avere fiamme di alta temperatura è stato l'abate Gian Antonio Nollet [1]. Egli descrive un'applicazione dell'eolipila, riempita in parte di alcool, per sostituire alla corrente d'aria prodotta da un mantice e destinata a soffiare sopra una fiamma (lucerna dello smaltista) una corrente di vapore infiammabile. Ecco come si esprime: « Se non aveste « d'adoperare la lucerna dello smaltista, che per minuti pezzi come quelli, « dei quali ho fatto menzione e per un lavoro di quarti d'ora, vi proporrei « un piccolo equipaggio molto comodo e di poca spesa di cui io stesso mi servo « quando, quel che ho da fare, non richiede nè un gran fuoco, nè un fuoco di « lunga durata. Questo apparecchio rappresentato dalla figura..... consiste in una « lucerna capace di una o due oncie d'olio...... Invece di un soffietto, un eolipila « di vetro o di metallo anima la fiamma, quando è acceso lo stoppino ed è posata « al di sopra di una lampada a spirito di vino, sorpassata da tre mensole, che « portano un cerchio piatto, o da due braccia a molla, che terminate sono « da due rosette concave per abbracciare la palla di questo piccolo vaso, « come quello che serve a spandere un vapore odoroso.

« Avrete cura, che il becco di questa eolipila non abbia che un piccolissimo « buco, come quello che formarsi potrebbe da un finissimo spillo, vi farete « entrare dell'acquavita o pur dello spirito di vino mescolato con acqua per « metà, e non l'empirete se non se fino al terzo della sua capacità.

« In fine bisognerà, che la lampa a spirito di vino posta sotto l'eolipila « non abbia che un piccolissimo stoppino composto di 5 o 6 fili di bombace « sottilissimi, e che la sua fiamma non sia distante che tre o quattro linee « dal fondo dell'eolipila.

« Con una fiamma animata dal soffio si ammolisce il vetro, ma quando se ne « prenda una piccola quantità per volta, si fa colare e si riduce in piccole « goccie ritondissime...... ecc ».

Come si vede, l'abate Nollet è stato il primo, che ha utilizzato l'eolipila per produrre delle fiamme ad alta temperatura. Il suo apparecchio ha due fiamme, una per riscaldare l'alcool contenuto nell'eolipila e produrre la corrente di vapore, che soffiando sulla seconda fiamma dà il dardo ad altissima temperatura.

Nel 1801 il prof. Pictet di Ginevra ha portato un apparecchio simile al sopra descritto a Londra e l'ha esposto nella sala di lettura dell'Istituto

[1] *L'arte dell'esperienze*, vol I, pag. 144, traduzione italiana dal francese. Venezia 1783, Tipogr. Fratelli Bassaglia. Non c'è la data dell'originale francese; secondo il Poggendorff (Biographisch-literarisches Handwörterbuch 2ter Bd. S. 296) esso fu pubblicato in Amsterdam nel 1770, anno della morte dell'Autore.

reale (1). Due anni dopo Beniamino Hooke (2) costruì un' eolipila ad alcool, che presentava sull' antecedente alcuni vantaggi: 1° Era munita di valvola di sicurezza; 2° veniva utilizzata la stessa fiamma che riscaldava l' eolipila per produrre il dardo caldo. La forma data a quest' apparecchio da Hooke è assai elegante, come si può vedere dalla figura riprodotta nel Gehler's *Phys. Wörterbuch* vol. IV, n. 189.

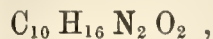
Anche in altri paesi, pare, la lampada per fondere sostanze in piccole quantità, come fu ideata da Hooke non è stata in uso prima del 1803: il prof. Lampadius (3) in un lavoro sull' analisi dei minerali per via secca descrive una sua lampada, che richiama alla mente quella di Nollet. Egli riempie una storta d' argilla con del biossido di manganese, ed adattando per mezzo di un tubo intermediario di rame il cannello ferruminatorio alla storta, dirige il gas ossigeno nel momento stesso del suo sviluppo sopra i diversi minerali. Due libbre di biossido di manganese gli davano una corrente continua di gas ossigeno per tre quarti d' ora.

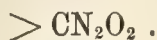
L' eolipila trovata dal prof. Helbig rassomiglia perfettamente a quella di Hooke per forma, eleganza e dettagli di costruzione, e perciò non risulta, che possa essere anteriore al 1803, data in cui Hooke ha costruito la sua.

La lampada di Hooke si è estesa in un tempo probabilmente breve in tutti i paesi, e l' Istituto fisico della R. Università Romana ne possiede un modello fabbricato in Roma da Luigi Lusvergh nel 1818.

Chimica. — *Azione dell' acido nitroso sopra alcune ossime della serie della canfora.* Nota di Angelo Angeli ed Enrico Rimini, presentata dal Socio G. Ciamician.

In un lavoro precedente noi abbiamo dimostrato come, per azione dell' acido nitroso sopra la canforossima, si ottenga un prodotto da noi chiamato pernitrosocanfora

$$C_{10}H_{16}N_2O_2 ,$$

nel quale molto probabilmente è contenuto l' aggruppamento

$$> CN_2O_2 .$$

Per azione del bromo, nelle opportune condizioni, la pernitrosocanfora dà un bromoderivato

$$C_{10}H_{15}BrN_2O_2 ,$$

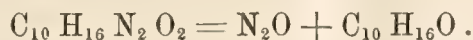
(1) *A description of a blow-pipe.* Nicholson's Journal vol. III, 1802, pag. 1.

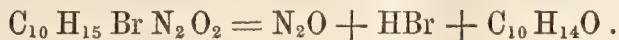
(2) *Description of a blow-pipe by Alcohol, having a safety Valve, with other advantages.* Nicholson's Journal vol. IV, 1803, pag. 106. Vedi pure Gehler's *Physikalisches Wörterbuch,* IV Bd., Erste Abth. pag. 1155.

(3) W. A. Lampadius, *Handbuch zur chemischen Analyse der mineral Körper.* Annales de Chimie vol. XXXIX, 1801, pag. 304.

il quale, per trattamento con alcali, facilmente si trasforma in un isomero, l'isobromopernitrosocanfora.

Tutti questi composti, per trattamento con acido solforico concentrato, perdono una molecola di protossido d'azoto per dare origine a prodotti non saturi, che possiedono caratteri del tutto diversi da quelli di cui si è partiti. La pernitrosocanfora infatti, per azione di questo reattivo, dà origine ad una sostanza di natura chetonica che noi chiamammo *isocanfora*:

$$C_{10} H_{16} N_2 O_2 = N_2O + C_{10} H_{16}O .$$

La bromopernitrosocanfora, e con maggior facilità ancora l'isobromopernitrosocanfora, oltre al protossido di azoto perdono anche una molecola di acido bromidrico. In tal modo si forma l'*isocanfenone*, un composto cristallino che all'aria facilmente si altera:

$$C_{10} H_{15} Br N_2 O_2 = N_2O + HBr + C_{10} H_{14}O .$$

Noi abbiamo naturalmente cercato di estendere questa reazione anche ad altre ossime, ma come era da aspettarsi, l'andamento può essere molto diverso, e nella maggior parte dei casi si ottengono prodotti di tutt'altra natura.

In modo analogo alla canforossima, si comporta l'ossima del canfenone, che per azione dell'acido nitroso facilmente si trasforma nel pernitrosocanfenone.

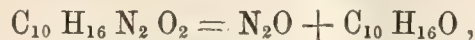
Anche dall'ossima del mentone si ottiene un derivato che per azione dell'acido solforico concentrato si decompone con sviluppo gassoso.

Siccome però il prodotto è liquido e facilmente alterabile, i risultati forniti dall'analisi non ci permettono per ora di pronunciarci con sicurezza intorno alla sua natura.

Migliori risultati abbiamo invece potuto avere dallo studio dell'ossima del fencone, isomera, come è noto, con la canforossima.

Anche questa sostanza, per azione dell'acido nitroso, dà un magnifico pernitrosoderivato, il quale per trattamento con acido solforico concentrato si decompone con sviluppo di protossido d'azoto.

È notevole che il prodotto chetonico, il quale in tal modo si forma:

$$C_{10} H_{16} N_2 O_2 = N_2O + C_{10} H_{16}O ,$$

è *identico all'isocanfora.*

Come noi abbiamo già dimostrato, l'isocanfora, molto probabilmente, è da considerarsi come un derivato del metacimolo.

Che il fencone possa dare origine a derivati del metacimolo è già noto da lungo tempo; non si comprende invece egualmente bene come anche dalla canfora, per mezzo della stessa reazione, si arrivi ad una identica sostanza.

Chimica. — *Alcuni nuovi derivati del Veratrol* [1]. Nota di Ausonio De Gaspari, presentata dal Socio Paternò.

Azione del bromo sul veratrol. — Il veratrol è assai facilmente attaccato dal bromo [2]. Non è guari, il Brüggemann facendo agire sul veratrol disciolto in quattro volte il suo peso di tetracloruro di carbonio una corrente di vapori di bromo, ha ottenuto il bibromo derivato, identico a quello già avuto da Merck. Ripetendo queste esperienze, io ho potuto constatare che se i vapori di bromo passano diluiti da una corrente di aria, si ottiene facilmente il monobromo composto.

Gr. 10 di veratrol, disciolti in gr. 50 di acido acetico, si pongono in un palloncino, raffreddato da corrente di acqua fredda e comunicante con altro palloncino contenente la quantità calcolata di bromo (circa gr. 4) e con un aspiratore. In questo modo si ottiene una corrente di vapori di bromo assai diluita; e si nota che il liquido rimane affatto incoloro: soltanto verso la fine della reazione appare una leggera colorazione giallognola. L'esperienza dura circa 24 ore. Neutralizzato l'acido acetico con soluzione di carbonato sodico, precipita un olio pesante, biancastro: questo prodotto contiene in soluzione piccola quantità di bibromo, come potei accorgermi dal residuo della distillazione. Trattato infatti questo residuo con alcool bollente, si ottengono cristalli aghiformi, fondenti a 92, che l'analisi ha confermato essere di bibromoveratrol. Due distillazioni in corrente di vapor d'acqua bastano per ottenere il monobromoveratrol in stato di sufficiente purezza: è allora incoloro, fortemente rifrangente e di odore gradito. Distilla a 254°.5-256°. Il rendimento è di circa l'85 %.

La determinazione di bromo, fatta col metodo di Carius, ha dato i seguenti risultati:

I. gr. 0,4836 di sostanza diedero gr. 0,4162 di AgBr
II. » 0,5475 » » » 0,4732 »

calcolato per $C^6H^3(OCH^3)^2.Br.$	trovato I	trovato II
Br. % = 36,86	36,62	36,76

Azione dell'acido nitrico sul monobromoveratrol. — Questo composto si nitra assai facilmente. Con acido nitrico della densità di 1,36 la reazione è piuttosto blanda. Per diluizione con molta acqua precipita un prodotto giallo, amorfo, che cristallizza dall'alcool diluito, dove è solubilissimo, in sottili aghi giallo-citrino chiari, fondenti a 124°5-125°. Sublima, decomponendosi in parte con deflagrazione. In corrente di vapor d'acqua distilla inalterato.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
[2] Merck, Annalen CVIII, 60. — Brüggemann, Journal für pr. chem. N. 4-5, 1896.

Una determinazione di azoto ha dato i seguenti risultati:

per gr. 0,4435 si ebbero cc. 21 di azoto a 751 mm. di pressione e a 14°.5

calcolato per $C^6H^2(OCH^3)^2.NO^2.Br$	trovato
Azoto $^0/_0 = 5,34$	5,47

È dunque un mononitrobromoveratrol.

Con acido nitrico fumante a 1,48 di densità si ottiene del pari il derivato mononitro. Con miscela di acido solforico e di acido nitrico fumante a parti uguali la reazione è assai energica e conviene raffreddare. Diluendo con molta acqua, precipita un prodotto giallo cupo, amorfo, che raccolto su filtro e cristallizzato dall'alcool si presenta in minute laminette formate da unione di aghi, e fondenti a 113-114°. È pur esso volatile in corrente di vapor d'acqua.

La determinazione dell' azoto ha dato questo risultato:

per gr. 0,2882 di sostanza, cc. 23 di N. a 755 mm. e a 14°.

calcolato per $C^6H(OCH^3)_2(NO^2)_2$ Br	trovato
N $^0/_0 = 9.12$	9,23

trattasi cioè di binitrobromoveratrol.

Ho tentato di preparare un trinitrobromoderivato, ma il risultalo è stato negativo.

Azione dell'acido solforico sul veratrol. — Gr. 10 di veratrol sono stati messi a contatto di gr. 20 di acido solforico del commercio (66° Beaumé = 1,84 di densità). Il veratol si è disciolto tosto sviluppando calore. Dopo qualche ora, aggiungendo entro tubo d' assaggio un po' acqua ad alcune goccie della miscela, precipitava ancora inalterato il veratrol: dopo una giornata la reazione non era ancora completa. Si scaldò allora per circa mezz' ora a bagno maria e, diluendo quindi con acqua, il liquido restò omogeneo, leggermente roseo. Neutralizzando un carbonato di bario, se ne ebbe il sale baridico che per evaporazione della soluzione si depose in belle laminette a contorno rombico, con angolo del rombo di circa 45°, appartenenti al sistema trimetrico (1). Solubile nell' acqua, pochissimo nell' alcool e nell' etere.

Ricristallizzato quattro volte, l' analisi ha dato questi risultati:

acqua di cristallizzazione — a 100° perde $2H^2O$
 » » a 140° rimane anidro
 » » a 145° comincia a decomporsi colorandosi in violetto scuro.

I. gr. 1,3781 di sostanza perdono gr. 0,1176 = a 8,53 $^0/_0$
II. » 1,3689 » » » 0,1158 = a 8,45 $^0/_0$

Calcolato per $[C^6H^3.(OCH^3)_2SO^3]^2Ba.3H^2O$ = a 8,64 $^0/_0$.

(1) Da osservazioni al microscopio polarizzatore che debbo alla cortesia del sig. F. Millosevich.

La determinazione di bario ha dato:

I. per gr. 1,1494 di sostanza — gr. 0,4240 di $BaSO^4$
II. » » 1,1918 » — » 0,4416 »

calcolato	trovato I	trovato II
21,92 %	21,68	21,78

Sale di piombo. — È stato preparato dal sale di bario per doppia decomposizione con carbonato di piombo. È solubilissimo nell' acqua, assai più del precedente; quasi del tutto insolubile in alcool assoluto, etere assoluto. Cristallizza anch' esso in lamine a contorno rombico, a riflesso madreperlaceo, trimetrico.

Ricristallizzato tre volte, l'analisi ha dato i seguènti risultati:

per l' acqua di cristallizzazione — a 100° perde 2 $^1/_2$ H^2O
» » a 135° si ha anidro
» » a 145° si decompone colorandosi in bruno.
Gr. 0,7385 perdono . . . . gr. 0,0575 = 7,78 % di H^2O
Calcolato per $(C^6H^3(OCH^3)_2SO^3)_2Pb.3H^2O$ = 7,78 % »

La determinazione di piombo:

I. gr. 0,6022 di sostanza danno gr. 0,2591 di $PbSO^4$
II. » 1,4771 » » » 0,6845 di $PbCrO^4$

calcolato	trovato I	trovato II
Pb % = 29,68	29,34	29,72

Lo studio di altri sali mi ha confermato trattarsi veramente di acido monosolfonico.

L' acido libero ho potuto ottenerlo dal sale di piombo per decomposizione con idrogeno solforato. È difficile ottenerlo in buona quantità, perchè assai volatile in vapor d' acqua, per cui nel concentrarne a bagno maria la soluzione, la massima parte di esso va perduta. Cristallizza assai difficilmente, dall' acqua in lamine sottilissime, di aspetto madreperlaceo; dall' alcool diluito in sottili aghi. È insolubile nell' alcool assoluto, nell' etere, ligroina, benzina. Non fonde, si decompone col calore appena oltre i 100°, imbrunendo. Lasciato per alcun tempo nel vuoto, perde tutta l' acqua, che riacquista poi in breve al contatto dell' aria.

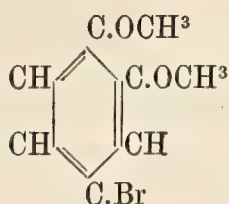
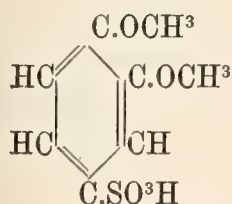
La determinazione del S ha dato questi risultati:

I. gr. 0,9227 danno gr. 0,8445 di $BaSO^4$ = 12,46 %
II. » 0,6181 » » 0,5646 » = 12,53 %

Calcolato per $C^6H^3(OCH^3)_2.SO^3H.2H^2O$ = 12,59 %

Tanto di questo acido veratrilmonosolfonico, quanto del monobromoveratrol, ho tentato di stabilire la costituzione. Ho fuso perciò e l' uno e l' altro con potassa, arrestando l' operazione non appena avvenuta la fusione ignea.

Trattando quindi con un acido la massa ed estraendo con etere, ho ottenuto da questo in entrambi i casi pochi centigrammi di prodotto cristallino, fondente a circa 135°. Con soluzione diluita di cloruro ferrico ebbi una colorazione verde bluastra: con soluzione di idrato sodico la ebbi rosso-viva.

Per mancanza di prodotto non ho potuto fare altre e più sicure ricerche; ma il fatto, che il punto di fusione del prodotto ottenuto si avvicina assai a quello dell' ossiidrochinone (140°,5), anzichè a quello del pirogallol (115°), e che le due reazioni colorate corrispondono a due caratteristiche dell' ossiidrochinone, mi fanno propenso a credere che la costituzione dei due composti da me avuti sia la seguente:

monobromoveratrol	acido veratrilmonosolfonico
$C.OCH^3$	$C.OCH^3$
CH / \ $C.OCH^3$	HC / \ $C.OCH^3$
CH \ / CH	HC \ / CH
$C.Br$	$C.SO^3H$

Ma su questo argomento spero di poter dare fra breve più sicuri risultati.

Azione del $PhCl^5$ e dell' NH^3 sull'acido veratrilsolfonico. — Gr. 3,5 di sale baritico anidro sono stati posti a reagire con gr. 2,3 di pentacloruro di fosforo. A freddo non si manifesta reazione alcuna. Scaldando leggermente, la miscela si rapprende ed a temperatura di circa 50° si compie la reazione con notevole sviluppo di acido cloridrico: la miscela si trasforma in un liquido denso sciropposo, leggermente giallognolo. Si lascia raffreddare, quindi si aggiunge poco per volta soluzione di ammoniaca concentrata a 0°: avviene una reazione tumultuosa, energica con grande sviluppo di calore. Si raffredda, e si ottiene una massa cristallina colorata in roseo, che sciolta in acqua lascia depositare per raffreddamento un prodotto cristallizzato in sottili e lunghi aghi, flessibili, che purificati per ripetute cristallizzazioni dell' alcool diluito rimangono scolorati e fondono a 136°,5-137°,5. La reazione avviene meglio usando il sale sodico.

È solubilissima nell' acqua, poco solubile nella benzina, nell' etere, eteri del petrolio, alcool assoluto: fonde sotto l' acqua. Cristallizza con $2H^2O$.

L' analisi la caratterizza per solfoveratrilamide.

Una determinazione di azoto ha dato i seguenti risultati:

I. per gr. 0,2897 cc. 14,2 di Azoto a 750 mm. e 14°,5
II. » » 0,3375 » 16,7 » a 759 mm. e 14°,5

calcolato per $C^6H^3(OCH^3)_2SO^2.NH.2H^2O$		trovato
N % = 5,53	I.	N % = 5,63
	II.	» = 5,68

Azione dell'anilina sul cloruro di solfoveratrile. — Il cloruro di solfo-veratrile, preparato come più sopra ho detto, è stato messo a reagire con fenilammina purissima. La reazione è meno energica che nel caso dell' ammoniaca. Si ottiene una massa densa, brunastra, che lasciata a sè diventa vischiosa e si mantiene tale per lungo tempo. Trattata con acqua non si discioglie che in piccolissima parte. È solubile abbastanza nell' alcool diluito e da questo si ottiene per raffreddamento un prodotto cristallizzato in lunghi aghi bianchi, flessibili, che fonde costantemente a 130°,5-131°,5 rammollendo a 124°.

Nell' etere è assai solubile ed in quasi tutti i solventi ordinari, appena nell' acqua. Cristallizza con $2H^2O$.

La determinazione dell' azoto ha dato questi risultati:

per gr. 0,2465 cc. 8,95 di N a 753 mm. e 14°.

calcolato per $C^6H^3(OCH^3)_2.SO^2,NHC^6H^5.2H^2O$	trovato
N % = 4,25	N % 4,21

È quindi la solfoveratrilanilide.

Azione del CH^3 . CO Cl sulla solfoveratrilammina. — Della solforoveratrilammina ho preparato il derivato acetilico.

Gr. 5 di solfoveratrilammina sono stati posti a reagire con il doppio della quantità calcolata di cloruro di acetile, in palloncino munito di refrigerante a ricadere. La solfoveratrilammina era stata precedentemente tenuta per un' ora in stufa a 130°. A freddo non si manifesta reazione alcuna: riscaldando, cominciano tosto a svilupparsi abbondanti vapori di acido cloridrico e solo dopo circa sei ore la reazione è completa. Distillando l'eccesso di cloruro di acetile, rimane una massa biancastra, che cristallizzata diverse volte dall' acqua e dall' alcool diluito fonde a 140-141°: si presenta in sottili aghi. L' analisi ha dato questi risultati:

gr. 0,3290 di sostanza hanno dato gr. 0,1569 di H^2O e gr. 0,5333 di CO^2
» 0,2767 » » cc. 13,85 di N a 760° e 14°.

Calcolando per $C^6H^3(OCH^3)^2SO^2.NH.COCH^3$	trovato
C % = 44,33	C % = 44,20
H % = 5,01	H % = 5,30
N % = 5,4	N % = 5,80

L' acido solforico fumante colora in verde il veratrol e dà una massa densa, vischiosa, verde, che dopo un giorno si rapprende cristallina. Formatone il sale di bario, l' analisi ha dimostrato ch' esso è acido monosolfonico.

La reazione qui avvieno tosto, a freddo, e con sviluppo di calore. Se si riscalda, il veratrolo si resinifica; per cui credo sia difficile poterne avere il bisolfo acido.

Continuerò lo studio di questi derivati, e spero di poterlo fra breve presentare assai più completo.

Chimica — *Sopra un caso di pietrificazione artificiale dei tessuti vegetali.* Nota dell' ing. ENRICO CLERICI, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Da quasi un decennio il dott. Carlo Auer von Welsbach enunciò una singolare proprietà delle terre rare, che cioè le miscele fatte con esse o colla magnesia, o colla zirconia, o coll' allumina, hanno un potere emissivo per la luce, mentre sono arroventate, maggiore di quello posseduto dalle singole terre [1] e propose anche un modo per utilizzare praticamente questa proprietà nell' illuminazione a gas [2].

Questo metodo consiste nell' imbevere un tessuto di fibre vegetali della soluzione di sali delle anzidette terre che, come per esempio i nitrati, siano decomponibili col calore; nello spremere fortemente l' eccesso di liquido; nell' asciugare e nel sospendere il tessuto così impregnato sulla fiamma di un becco Bunsen. In questa operazione il tessuto brucia completamente, i nitrati si decompongono e si ottiene un residuo leggero e poroso di ossidi intimamente mescolati, ulteriormente inalterabile al calore, il quale conserva tanto la forma a rete del tessuto quanto la forma cilindro-conica che ad esso fu data affinchè meglio abbracciasse la fiamma.

Quali altri fenomeni avvengono in quel procedimento e perchè il tenue residuo o scheletro terroso, malgrado la sua sottigliezza, ha una solidità tale da permetterne l' uso per lungo tempo?

Se si impregna un pezzo di tessuto di cotone — ed è indifferente la grossezza dei fili e delle maglie — colla soluzione di una delle accennate

(1) Invece l' aggiunta di taluni ossidi, per es. dell' ossido di ferro, diminuisce grandemente il potere illuminante delle miscele e le rende praticamente inapplicabili. Per dimostrarlo si può servirsi di una ordinaria reticella Auer: con un pennello si applica, nel senso longitudinale, una soluzione diluita di solfato ferroso in modo che per capillarità essa si estenda soltanto sopra una metà della reticella: accendendo la lampada, una metà emetterà la luce come prima, l' altra metà resterà oscura.

(2) Bollettino delle privative industriali del Regno d' Italia, anno 1886, pag. 255 e 1838.

miscele, o per semplicità con una soluzione per es. al 30 per cento, di nitrato di torio e si calcina, si otterrà un residuo bianchissimo di ossido di torio che conserva, come ho già detto, la reticolatura del tessuto. Esaminandolo al microscopio a debole ingrandimento ed in campo oscuro si vedrà che, a parte le diminuite dimensioni, conserva anche la forma propria dei fili risultanti dall' attorcigliamento di un fascetto di fibre. Si sarebbe condotti a concludere che l'ossido di torio si sia modellato sulle fibre di cotone.

Ho immerso nella soluzione di nitrato di torio dei pezzi di sottili sezioni trasversali ottenute col microtomo dal legno di *Quercus suber* e di *Rhamnus cathartica*, che, fra le specie di cui ero in possesso, hanno una caratteristica distribuzione di vasi in ciascuna zona d' accrescimento. Asciugate le sezioni, le ho calcinate sulla lamina di platino: ho ottenuto uno scheletro terroso, che, con un po' di abilità, può essere montato in balsamo per osservarlo al microscopio. È una riproduzione, in minori dimensioni, di tutte le particolarità che offriva la sezione non ancora imbevuta.

Dalle foglie di alcune piante si può distaccare facilmente una pellicola epidermica che imbevuta di nitrato di torio e calcinata lascia un residuo nel quale è possibile vedere ancora le cellule dell' epidermide e la distribuzione degli stomi. Bisogna però aver cura di fare il confronto colla stessa pellicola non impregnata, perchè in molte piante le cellule dell' epidermide sono incrostate di sali calcarei o di silice, e la loro cenere riproduce gli scheletri delle cellule ([1]).

Ho incluso in paraffina dei pezzi di tela e di garza impregnati e calcinati allo scopo di farne sezioni col microtomo. In questi preparati le sezioni trasversali dei fili risultano costituite dalle sezioni delle singole fibre che li componevano, che appariscono ben distinte l' una dall' altra.

Quando la soluzione impregnante è stata preparata con nitrato di torio e nitrato di magnesio, per es. a parti uguali, e lo scheletro terroso ottenuto per calcinazione si mette a digerire in acqua — e meglio se si aggiunge acido nitrico e si scalda — il detto scheletro in pochi minuti va in disfacimento nel senso che la forma del tessuto viene distrutta ed i fili si scindono nelle fibre che li componevano, le quali possono essere montate in balsamo ed osservate al microscopio.

Le esperienze finora riferite valgono a dimostrare che il residuo di ossido di torio assume la forma generale delle fibre e delle cellule; ma con esperienze altrettanto semplici si può dimostrare che tutte le particolarità, come ispessimenti spirali, striature, punteggiature areolate ecc., che si riscontrano nelle pareti delle cellule, delle fibre e dei vasi, vengono esattamente riprodotte.

([1]) Un risultato più o meno soddisfacente, a seconda dei casi, si ottiene impiegando intere foglioline, per es. di muschi, e perfino taluni petali di fiori.

A questo scopo ho pestato dei pezzi di legno di *Taxus baccata*, *Pinus pinea*, *Clematis vitalba* ed altri. La polvere più sottile, trattata con acido cloridrico e lavata, la immersi nel bagno di nitrato di torio; raccolta su filtro, spremuta ed asciugata, procedetti alla calcinazione sulla lamina di platino. Le ceneri montate in balsamo ed osservate al microscopio mostrano tutte le sculture proprie alle dette specie. Lo stesso risultato si ottiene con i vasi scalariformi di *Pteris aquilina*.

Questi fatti probabilmente sono in rapporto colla costituzione molecolare delle membrane vegetali, secondo la teoria del Naegeli, per la quale le membrane cellulari sarebbero costituite da aggruppamenti di molecole di materia organica, detti micelle, interamente circondati da molecole d' acqua, allo stato di imbibizione. Una pianta disseccata può riassorbire una certa quantità d'acqua, la quale è trattenuta in modo diverso da quanto farebbe una spugna e che può dirsi acqua intermicellare. Perciò quando le cellule e le fibre legnose dei precedenti esperimenti vengono imbevute dalla soluzione di nitrato di torio o di altri nitrati terrosi, le molecole di sostanza organica saranno circondate da molecole d'acqua, e da molecole di nitrati uniformemente distribuite. Coll' asciugamento una gran parte dell' acqua, la quale ha reso possibile l' accesso del nitrato nelle pareti della fibra, sarà cacciata via; ma con tal mezzo il nitrato di torio non potrà essere eliminato, non essendo volatile, e le sue molecole resteranno interposte e circonderanno quelle di sostanza organica.

Nella operazione successiva il calore decompone il nitrato, altera la sostanza organica e la fa bruciare: dopo l' eliminazione delle parti volatili, di tutto l'edificio non resteranno che le molecole di ossido di torio, le quali ora, benchè non sostituiscano effettivamente le molecole organiche, riprodurranno, col loro insieme, la forma e tutti i minuti particolari dell' edificio che era costituito dalle molecole di sostanza organica. La connessione delle particelle di ossido di torio essendo d'ordine molecolare, ne risulta nell' insieme una coesione e solidità certamente maggiore di quella che potrebbe avere un aggregato di particelle finissime materialmente, ma assai grossolane rispetto alle molecole. Ciò può comprovarsi spalmando un pezzo di garza con la poltiglia fatta macinando finamente l'ossido di torio con acqua. Dopo l' incenerimento resta uno scheletro terroso fragilissimo e che spesso va in disfacimento durante la bruciatura. Convincente è poi l' esame microscopico delle sezioni trasversali di questo scheletro terroso incluso in paraffina.

Ho già di sopra accennato alla naturale interposizione di sali calcarei e di silice nelle pareti cellulari in alcune piante, talchè dopo la calcinazione le ceneri rappresentano come uno scheletro delle cellule stesse. Ma la natura offre anche un più completo esempio; infatti nelle roccie sedimentarie si rinvengono di frequente tronchi e rami d'alberi pietrificati, costituiti attualmente di calcite o di silice, nei quali oltre l'aspetto legnoso sono spesso con-

servati tutti i dettagli anatomici ed istologici (1). Nel processo di fossilizzazione la soluzione calcarea o la silicea si è interposta molecolarmente alla materia organica, e prima che questa venisse alterata o distrutta, la calcite o la silice presero la forma solida (2).

Si può dunque concludere che nella pratica del sistema descritto si ha un fenomeno d' interposizione molecolare col quale è possibile far penetrare nelle pareti delle cellule e delle fibre vegetali un corpo solido, insolubile e refrattario come l' ossido di torio od altra miscela di ossidi terrosi, per compierne in pochi minuti una vera e propria pietrificazione.

Chimica fisiologica. — *La combustione nell' aria rarefatta.* Nota del dott. A. Benedicenti, presentata dal Socio A. Mosso.

Dopo le esperienze fatte dal Cigna (3) nel secolo scorso intorno alla combustione e alla respirazione nell' aria rarefatta molti studiarono questo interessante problema.

Davy, nelle sue classiche ricerche sulla fiamma (4), dopo aver accennato alle difficoltà di questo genere di studi, scrisse che la rarefazione dell' aria non diminuisce considerevolmente il calore della fiamma, ma che il potere illuminante della medesima è diminuito dalla rarefazione ed aumentato invece dalla condensazione dell' aria atmosferica.

Triger (5) vide che nell' aria compressa le candele si consumavano più rapidamente, ma che la combustione era incompleta, perchè facevano più fumo.

Le Conte (6) in una sua Memoria intorno all' influenza della luce solare sulla combustione, ritenne come dimostrato che il processo di combustione sia ritardato dalla diminuzione della pressione e accelerato dall' aumento della medesima.

Altre ricerche su tale questione furono fatte, più tardi, da Frankland e Tyndall facendo bruciare alcune candele a Chamounix ed altre affatto simili sulla sommità del Monte Bianco, e calcolando il consumo di stearina per ogni ora. Essi trovarono come risultato le medie seguenti:

A Chamounix . . . . . 9,4 gr. di stearina per ora
Sul Monte Bianco . . . 9,2 gr. id.

(1) Posseggo due campioni di legno di conifere pietrificato, uno in calcite trovato nei dintorni di Roma, l'altro in silice trovato nei dintorni di Oschiri, che toccati si riducono in polvere e questa si compone di tracheidi isolate e ben conservate. Questo esempio illustrerebbe il fenomeno di scissione nelle singole fibre precedentemente descritto.

(2) Nella maggior parte dei casi, prima o dopo l'alterazione della materia organica, la sostanza mineralizzante riempie tutte le cavità esistenti nel legno.

(3) Mélanges de philos. et de math. de la Société Royale de Turin 1760, 1761, pag. 200.

(4) Philosophical Transactions, 1817, p. 65.

(5) Annales de Chimie et de Phys. 3e sér., tom. III, p. 234.

(6) American Journal of Science and Arts [2] XXIV. 317.

Conclusero che tale piccola discordanza era probabilmente dovuta alla differenza di temperatura (21° cg.) tra le due stazioni e che la combustione delle candele era perciò intieramente indipendente dalla intensità dell' aria.

Alcuni anni dopo Frankland [1] riprese questo argomento: ma egli, più che del diverso consumo di combustibile, si occupò delle variazioni del potere illuminante della fiamma nelle varie pressioni. Concluse che al di là di un certo limite minimo la combustione è tanto più perfetta quanto più è rarefatta l'atmosfera. In un lavoro successivo [2] Frankland dimostrò che la fiamma diviene assai luminosa nell' aria compressa e che la depressione atmosferica ne diminuisce molto lo splendore. Trovò che la fiamma dell' idrogeno e dell' ossido di carbonio rischiarano come una candela alla pressione di 20 atmosfere.

Berthelot [3] nelle esperienze sulla decomposizione dell' acetilene per mezzo della scintilla elettrica vide una maggiore luminosità della medesima per effetto delle aumentate pressioni; Saint-Claire Deville [4] richiamò l'attenzione sulle variazioni di temperatura della fiamma nella pressione aumentata e diminuita, e Cailletet [5] in base a varie esperienze fatte bruciando delle candele, dello solfo, del potassio, del solfuro di carbonio e dell' idrogeno nell' aria compressa, asserì che la combustione nell' aria compressa è incompleta, ma che però i raggi luminosi e i raggi chimici aumentano di intensità.

Parecchie altre esperienze furono fatte sulla fiamma dosando l'acido carbonico da questa prodotto in una determinata unità di tempo, e più specialmente allo scopo di dimostrare l' influenza della ventilazione sulla quantità di acido carbonico contenuto nell' aria di ambienti chiusi. Ricorderò solo i lavori di Zoch [6], Cramer [7], Grehant ecc. e quelli più recenti fatti in Erlangen da Hübner [8] e in seguito da Gengler [9].

Hübner fece delle esperienze con lumini da notte, ma siccome questi facilmente si spegnevano, se la ventilazione era un po' troppo forte, adoperò più tardi delle candele steariche, delle piccole fiamme a gas ed inoltre la lampada di Hefner-Altenech. Determinò l'acido carbonico prodotto dalla fiamma

[1] Frankland, Philosoph. Transact., vol. CLI, p. 629, 1862. — J. Tyndall, *Hours of exercise in the Alps*, pag. 56.

[2] Philosophical Magazine, t. XXXVI, p. 309-311; e Archives de Genève, t. XXXIII, p. 77.

[3] Berthelot, Compt. rend. Académie des sciences, t. LXVIII, p. 536.

[4] Saint-Claire Deville, ibid., t. LXVIII, p. 1089.

[5] Cailletet, ibid., t. LXXX, p. 487 e in Annales de Phys. et de Chimie, 1875, p. 429.

[6] Zoch, Zeitschr. f. Biologie, Bd. III, S. 122.

[7] Cramer, Arch. f. Hygiene, Bd. X, S. 315.

[8] Hübner, Sitzungsber. med.-physikal. Soc. zu Erlangen, 1895.

[9] Gengler, Inaug. Dissert. Erlangen, 1896.

col metodo di Pettenkofer analizzando solo una parte dell' aria che circolava entro la campana dove la fiamma ardeva. Non riscontrò che vi fosse uno stretto rapporto fra l'altezza della fiamma e il contenuto in acido carbonico dell' aria ambiente. Egli dimostrò che se la circolazione dell' aria è inferiore a 117 litri per ora, la combustione è imperfetta. Facendo passare l'aria (che ha circolato nella campana ove la fiamma brucia) attraverso a del sangue, egli potè notare in questo per mezzo dello spettroscopio le strie di assorbimento proprie dell'ossido di carbonio, allorquando la ventilazione era insufficiente; e disse che l' ossido di carbonio era uno dei principali prodotti secondari di questa incompleta combustione. Avvertì che occorrevano almeno 240 litri di aria all' ora, perchè la fiamma bruciasse perfettamente come all' aria libera. Egli notò il fatto sul quale più tardi ritornò anche Gengler, che cioè la fiamma si modifica assai quando brucia in un ambiente molto ricco di acido carbonico. Essa diviene periodicamente piccolissima, come se stesse per spegnersi e brucia senza spandere alcuna luce, indi va lentamente prendendo la grandezza e lo splendore di prima. Questo giuoco si ripete sempre di nuovo con determinate pause, tanto più lunghe quanto maggiore è la quantità di acido carbonico contenuto nell' aria. Quando l' acido carbonico ha raggiunto il 18 °/₀, la fiamma si spegne.

Sino dal 1894, quando il prof. A. Mosso stava preparandosi alla sua spedizione sul Monte Rosa per studiare la fisiologia dell' uomo a grandi altezze, venni da lui incaricato di studiare la combustione nell' aria rarefatta; e fu in quell' anno che feci le presenti ricerche.

Il problema della respirazione sulle Alpi è un fenomeno molto complesso, perchè oltre alla rarefazione dell' aria possono intervenire altre cause che modificano la produzione e la eliminazione dell' acido carbonico. Dopo aver fatto nella campana pneumatica alcune esperienze sulle scimmie, simili a quelle pubblicate dal prof. Ugolino Mosso [1] ma con metodo diverso, tentammo di ridurre il problema della respirazione nell' aria rarefatta ad una esperienza più elementare, studiando semplicemente la combustione di una candela a differenti pressioni. Avendo naturalmente cura che mentre la diminuzione diminuiva, rimanesse così abbondante la corrente dell' aria da non temere per questo degli inconvenienti.

Nelle mie prime esperienze sulla combustione mi servii di candele steariche; più tardi però feci le mie ricerche con un piccolo lume il quale dava una fiamma uguale durante tutto il tempo della esperienza. In un bic-

[1] Ugolino Mosso, *La respirazione dell'uomo sul Monte Rosa.* Rendiconti Accademia dei Lincei, 12 aprile 1896.

chierino ripieno di olio puro di oliva, mettevo a galleggiare un piccolo dischetto di sughero attraversato nel centro e verticalmente da un finissimo tubo di vetro, a mo' dei comuni lumini da notte. Attraverso a questo tubo avevo fatto passare pochi fili di amianto i quali fungevano da lucignolo. In tal modo si ovviava alla variabile inclinazione del lucignolo e alla facile carbonizzazione del medesimo, fatti questi che nelle candele modificano sempre la maggiore o minore attività della combustione.

Per rarefare l'aria entro la campana nella quale era collocato il lume, mi sono servito di una pompa Deleuil, grande modello, costruita in modo che ad ogni colpo di stantuffo si possono togliere 725 cc. di aria. L'aria aspirata dalla campana nel cilindro della macchina pneumatica, nel venire spinta fuori, poteva farsi circolare attraverso all'apparecchio destinato a fissare l'acido carbonico prodotto.

Due cose erano tuttavia necessarie: prima, ottenere una attiva circolazione d'aria nella campana pur mantenendo la pressione diminuita, ed in secondo luogo analizzare, nelle determinazioni del CO^2, solamente una parte della grande quantità di aria che circolava, non potendosi tutta far passare rapidamente attraverso all'apparecchio d'analisi.

Ho ottenuto il primo scopo adottando una disposizione analoga a quella di Frankland, vale a dire facendo penetrare dall'esterno l'aria nella campana e regolandone l'accesso per mezzo di un rubinetto in modo da avere una forte corrente d'aria anche a pressioni diminuite.

Ho poi facilmente risolto il secondo quesito, lasciando sfuggire all'esterno una parte dell'aria che circolava nella campana e calcolando con due contatori, dei quali l'uno era posto prima della campana e l'altro prima dell'apparecchio d'analisi, la quantità totale di aria circolata e la quantità di aria sottoposta all'analisi.

L'apparecchio per la determinazione del CO^2 prodotto dalla fiamma, era composto di alcuni tubi ad U con cloruro di calcio per trattenere il vapore acqueo, di sei tubi collocati in serie l'uno dietro l'altro e contenenti soluzione di potassa al 50 %, di altri due tubi ad U con cloruro di calcio allo scopo di fissare l'acqua evaporata dai tubi a potassa, e di un tubo di vigilanza contenente potassa caustica in pezzi. Talora ho fatto gorgogliare per ultimo l'aria analizzata attraverso ad una soluzione di idrato di bario, e l'invariato peso del tubo di vigilanza e la costante limpidezza di tale soluzione durante tutto il tempo dell'esperienza, mi assicuravano che tutto il CO^2 veniva fissato.

In tali esperienze sulla combustione occorrevano però altre precauzioni onde evitare che la corrente d'aria, penetrando nella campana, agitasse la fiamma e influenzasse così la combustione. A tal uopo feci giungere il tubo pel quale l'aria entrava nella campana, al disotto di un disco di cartone poco minore del diametro interno della campana: e sopra tale disco, sostenuto da quattro pezzetti di sughero, collocavo il lume circondandolo da tutti i lati

con una reticella metallica a guisa delle lampade Davy. L'aria, aspirata dalla pompa, giungeva dallo esterno sotto al disco di cartone e scorreva lungo le pareti della campana. In tal modo la corrente d'aria non disturbava affatto la combustione, e la fiamma rimaneva perfettamente immobile durante tutto il tempo della esperienza.

Ho fatto dapprima bruciare il lume, per determinati periodi di tempo alla pressione ordinaria per conoscere la differenza nel consumo che si riscontra da una volta all'altra, e stabilire se le differenze trovate nelle esperienze fatte alla pressione diminuita rientrassero o no nel limite degli errori possibili. Trovai che le differenze nel consumo tra una volta e l'altra sono assai piccole, come appare dai dati seguenti:

Esperienze	Pressione atmosferica	Consumo in 1 ora
I.	740	gr. 1,7976
II.	740	» 1,7826
III.	742	» 1,8225
IV.	742	» 1,8100

Stabilito tale fatto, in altre esperienze feci bruciare il lume prima alla pressione di 360 mm. di mercurio, pari a circa 6000 metri di altezza.

Nella seguente tabella, riferisco come esempio i dati di cinque esperienze:

Numero	Durata	Consumo di combustibile	Pressione	Differenza	Temperatura
I	1 ora	1,9119 2,1930	360 mm. ordinaria	0,2811	Variabile fra + 11° e + 13°
II	1 ora	1,8634 2,1054	360 mm. ordinaria	0,2420	
III	1 ora	1,0485 1,2980	360 mm. ordinaria	0,2495	
IV	1 ora	1,0808 1,3170	360 mm. ordinaria	0,2362	
V	1 ora	1,9250 2,1540	360 mm. ordinaria	0,2290	

Dall'esame di queste cifre si riconosce che il consumo di combustibile è minore nella pressione diminuita che non alla pressione atmosferica ordinaria.

Con tale risultato, si accordano le determinazioni dell' acido carbonico ottenuto dalla combustione in differenti pressioni barometriche. Questo risulta dalle cifre di altre esperienze raccolte nella seguente tabella:

Numero	Consumo di combustibile	Durata	Aria analizzata a 0° e 760°	Aria circolata a 0° e 760°	Pressione	CO^2 prodotto in più alla press. ordinaria
I	1,3980	½ ora	38,84	323,05	ordinaria	0,490
	1,0485		66,51	596,55	370 mm.	
II	1,3170	½ ora	44,50	453,52	ordinaria	0,226
	1,0808		55,31	444,22	370 mm.	
III	1,3010	½ ora	45,25	428,91	ordinaria	0,306
	1,0200		39,90	410,20	370 mm.	
IV	1,2510	½ ora	58,21	441,10	ordinaria	0,270
	0,9770		56,26	791,40	370 mm.	
V	1,1897	½ ora	52,82	435,02	ordinaria	0,190
	1,0080		56,65	850,17	370 mm.	

Si poteva pensare che la diminuzione nel consumo di combustibile dipendesse dalle variazioni di temperatura, o dalla diminuzione dell' ossigeno dovuta alla rarefazione dell' aria, od infine che la combustione fosse imperfetta e che altri prodotti secondari si avessero oltre l' CO^2 analizzato.

Ma per ciò che riguarda le variazioni di temperatura, col metodo che io ho adoperato, esse non superano un grado, od al più un grado e mezzo, e non possono certamente dar ragione delle differenze riscontrate nel consumo di combustibile, e per ciò che riguarda la quantità di ossigeno io ho eliminato il dubbio con ripetute esperienze (come alla IV e V riferite nella tabella precedente) facendo circolare una quantità doppia di aria mentre si manteneva il lume alla pressione diminuita.

Se si confrontano i dati della precedente tabella e si cerca quale sia il rapporto tra la differenza nel consumo e la differenza nella quantità di CO^2 prodotto nelle due diverse pressioni, si hanno dei numeri abbastanza concordanti avuto riguardo alla relativa esattezza del metodo usato.

N.	Differenza nel consumo	Differenza nel CO^2 prodotto
I.	0,3495	0,490
II.	0,2362	0,226
III.	0,2810	0,306
IV.	0,2740	0,270
V.	0,1817	0,190

Rimaneva pur tuttavia interessante investigare se la combustione alla pressione diminuita fosse oltre un certo limite perfetta, come già Frankland aveva ammesso, ovvero se fosse incompleta come scrissero alcuni degli autori sovraccennati.

Fra i prodotti secondari della combustione io non ho ricercato che l'ossido di carbonio, facendo gorgogliare l'aria, in cui era avvenuta la combustione, attraverso ad una soluzione titolata di cloruro di palladio. Il minimo precipitato di palladio ridotto per opera dell'ossido di carbonio che si formava, sia allorquando il lume bruciava alla pressione normale, come quando ardeva alla pressione diminuita, mi hanno mostrato che non vi era una sensibile differenza nei due casi.

Le esperienze che feci raccogliendo il precipitato su filtro tarato e pesandolo accuratamente mi dimostrarono che l'ossido di carbonio che si produce allorquando la fiamma brucia a pressione diminuita è in quantità minima, sempreché la diminuzione della pressione non oltrepassi un determinato limite. Tracce di ossido di carbonio si possono riscontrare anche allorquando la fiamma brucia con sufficiente ventilazione alla pressione normale.

Resta quindi confermato che sulle alte montagne diminuisce l'intensità dei processi di combustione, ma che a 6000 metri di altezza la combustione è ancora completa.

Per riferirsi all'esempio delle candele che Frankland e Tyndall fecero bruciare a Chamounix e sulla vetta del Monte Bianco, senza giungere ad un risultato sicuro, possiamo conchiudere che a 6000 metri di altezza una candela brucia meno attivamente che alla pressione ordinaria.

La combustione è perfetta, e se la quantità di acido carbonico prodotto è minore, ciò dipende da ciò che è meno grande la parte di combustibile che si consuma.

Fisiologia. — *Sull'azione fisiologica dei quattro acidi santonosi.* Nota del dott. D. Lo Monaco, presentata dal Socio L. Luciani.

L'acido destro-santonoso si presenta in aghi bianchi che fondono a 178°, insolubili nell'acqua. Neutralizzandolo col carbonato sodico, metodo adoperato anche per gli altri acidi, ne abbiamo preparato il sale sodico, riducendo dopo la soluzione al titolo del 10 %.

Esperienze sulle rane.

Esperienza I. — Rana di gr. 26.

H. 8,30. — S'iniettano 0,4 c.c. di soluzione.
» 8,45. — La rana sta sul ventre, molto cheta. Pizzicata non riesce a saltare bene.

H. 9,15. — Non sopporta la posizione dorsale.
» 9,30. — Messa sul dorso vi rimane.
» 12 — I riflessi si sono indeboliti.
» 16 — Il cuore si arresta in diastole.

Esperienza II. — Rana di gr. 20.

H. 8,30. — S'iniettano 0,6 c.c. di soluzione.
» 8,45. — La rana sta ferma, pizzicata fa piccoli salti.
» 9,15. — Sopporta la posizione dorsale, i movimenti ioidei sono diminuiti.
» 10 — I riflessi si mostrano deboli. Scoperto il cuore, esso pulsa debolmente, e finisce coll'arrestarsi in diastole dopo parecchie ore.

Esperienze sui mammiferi.

Coniglio di gr. 450.

H. 8,30. — S'iniettano 10 c.c. di soluzione.
» 9,30. — L'animale è meno vispo di prima; bisogna pizzicarlo fortemente per farlo muovere.
» 10,45. — Il coniglio cammina barcollando. Il cuore pulsa con forza, ma il respiro è diventato raro.
» 11 — Il coniglio non riesce più a camminare; i riflessi sono però conservati.
» 11,30. — Si trova morto; alla sezione gli organi non presentano nulla di anormale.

L'acido santonoso tanto nelle rane che nei mammiferi non esercita alcuna azione sulla funzione cardiaca; crediamo quindi inutile di riportare per disteso tutte le esperienze eseguite in proposito.

Sicchè il decorso dell'avvelenamento che subiscono gli animali a' quali si è iniettato l'acido santonoso, procede nella stessa maniera di quello che abbiamo descritto studiando le desmotroposantonine. Si nota, cioè, prima una leggiera narcosi seguita dalla paralisi generale, con perdita più o meno forte dei riflessi, tanto che la morte avviene nella completa anestesia per arresto del respiro.

Gli acidi levo-, racemo- e desmotropo-santonosi sono sostanze paralizzanti come l'acido santonoso, per la quale ragione omettiamo per brevità la descrizione delle varie esperienze.

E poichè non solo il decorso dell'avvelenamento, ma anche la dose tossica di questi acidi è uguale, bisogna ammettere che il potere rotatorio, unico carattere differenziale di essi, non ha alcun rapporto coll'azione fisiologica.

Tenendo poi presente la loro formula di costituzione, notiamo che essi, oltre un carbossile, contengono l'ossidrile fenico la cui presenza è stata dimostrata dai professori Cannizzaro e Carnelutti prima, e dal prof. Andreocci dopo, essendo riusciti ad ottenere i benzoil-santoniti, i derivati sodici e gli etil-santoniti-etilici.

Vedremo che l'azione fisiologica degli acidi santonosi è in rapporto con la loro costituzione chimica, anche per la presenza dell'ossidrile fenico nella loro molecola.

I prodotti di scomposizione, come abbiamo detto, degli acidi santonosi sono il dimetilnaftolo e l'acido propionico.

Il dimetilnaftolo, cristallizzato in aghi splendenti, fonde a 135°-136°; è solubilissimo nell' etere, nell' acido acetico e negli idrati alcalini; pochissimo solubile invece nell' acqua, alla quale comunica una bella fluorescenza azzurra.

La soluzione sodica, che noi abbiamo adoperata al titolo del 2,5 °/₀, iniettata alle rane e ai mammiferi, produce fenomeni intensi di paralisi motoria con piccole dosi come quelle di cui ci siamo serviti per lo studio dell' azione fisiologica del solfato di santoninammina.

Per ottenere l'avvelenamento invece negli animali con la somministrazione del proprionato sodico al pari del dimetilnaftolo, sostanza paralizzante, bisogna iniettare dosi molto più grandi.

Mentre una rana muore con 2 cgr. di dimetilnaftolo, ce ne vogliono 30 o 40 di propionato sodico per ottenere il medesimo risultato. Sulla funzione cardiaca questi composti non esercitano alcuna influenza.

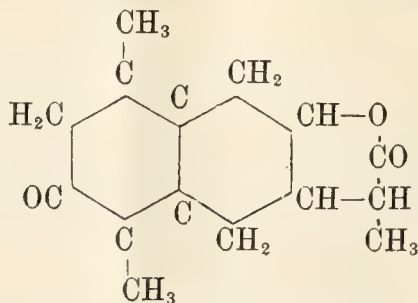
Cosicchè tanto gli acidi santonosi che i prodotti della loro scomposizione, presentano eguale azione; però il potere tossico dei primi è molto più debole di quello del dimetilnaftolo e molto più forte di quello dell'acido propionico.

Dimostreremo in seguito che queste azioni non hanno nessun rapporto colla loro costituzione chimica.

Considerazioni sintetiche e conclusioni.

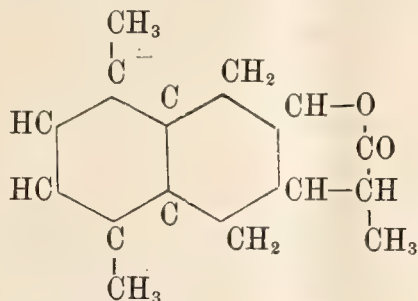
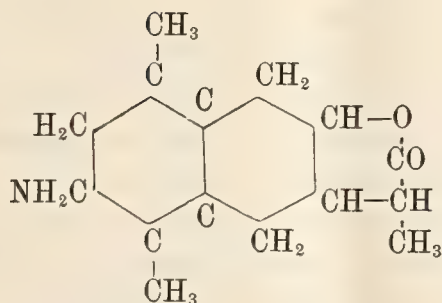
Gli importanti lavori eseguiti dal prof. Cannizzaro e dai suoi assistenti sulla santonina, ci hanno messo in grado di compiere uno studio completo dei suoi prodotti di trasformazione, e di decomposizione, e di poter così ricavare alcuni criteri generali.

Stando alla formula di costituzione della santonina.

```
            CH3
             |
             C       CH2
                C
  H2C  /    \  /    \   CH—O
      |      |       |    |
      |      |       |    CO
  OC   \    /  \    /  CH—CH
                C
             C       CH2     CH3
             |
            CH3
```

ammessa dal prof. Cannizzaro, possiamo ad essa ravvicinare le due iposantonine isomere

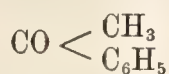
```
          CH3
          |
          C        CH2
               C         CH—O
    HC                      |
                            CO
    HC                   CH—CH
               C             |
          C        CH2      CH3
          |
          CH3
```

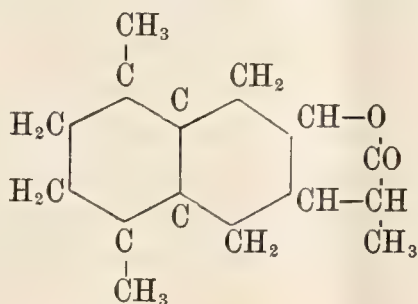
e la santoninammina:

```
          CH3
          |
          C        CH2
               C         CH—O
   H2C                      |
                            CO
  NH2C                   CH—CH
               C             |
          C        CH2      CH3
          |
          CH3
```

per formarne un primo gruppo farmacologico. Tra i prodotti compresi in questo gruppo è utile considerare l' iposantonina come tipo fondamentale, perchè nella sua molecola manca l'ossigeno chetonico (1). Essa costituisce un nucleo di natura eccitante, che bisogna tener presente nella interpretazione dell'azione fisiologica di tutti i derivati della santonina.

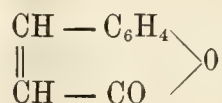
Se ora passiamo ad esaminare la formula della santonina, noi osserviamo che essa differisce da quella dell' iposantonina per la presenza dell' ossigeno chetonico il quale, in qualunque composto esso si trovi, esercita sempre un' azione paralizzante.

Tra questi composti basterà citare l'acetone ordinario studiato da Albertoni, l'ipnone

$$CO < {CH_3 \atop C_6H_5}$$

(1) Veramente il tipo fondamentale sarebbe la biidroiposantonina

```
          CH3
          |
          C        CH2
               C         CH—O
   H2C                      |
                            CO
   H2C                   CH—CH
               C             |
          C        CH2      CH3
          |
          CH3
```

Questo composto che non è stato ancora preparato, differirebbe dalla santonina per la sostituzione dell' ossigeno con due atomi di idrogeno.

studiato da Dujardins-Beaumetz, la cumarina

$$\begin{array}{l} CH - C_6H_4 \\ \| \qquad\qquad\quad \rangle O \\ CH - CO \end{array}$$

da Koeler e molti altri.

Viceversa la santonina, che dovrebbe far parte della serie suddetta, esercita sugli animali un' azione eccitante, che però è un poco più debole di quella dell'iposantonina. Bisogna quindi ammettere che nel nostro caso l'ossigeno chetonico non riesce a neutralizzare e a cambiare l'azione del nucleo fondamentale, ma solamente ne scema l'intensità.

L'effetto opposto noi osserviamo quando all'ossigeno chetonico sostituiamo il gruppo amminico (NH_2) il quale in tutti i composti manifesta una fortissima azione eccitante.

Allora il potere tossico del nucleo fondamentale si rinforza, e la santoninammina può considerarsi come un vero alcaloide di azione eccitante.

Quindi tanto la santonina che la santoninammina mostrano che l'azione del nucleo fondamentale dei corpi si può modificare cambiando qualche parte della sua molecola.

Questa proprietà è stata utilizzata in farmacologia, in quanto che alcune sostanze che presentavano inconvenienti per essere utilizzate nella terapia, trasformate per mezzo dell' introduzione o della sostituzione di altri radicali nella loro molecola, sono ora ritenuti farmaci preziosi.

Lo studio dei prodotti di eliminazione della santonina, che noi abbiamo intrapreso, ci fornirà altri risultati per dimostrare meglio il rapporto che passa tra azione fisiologica e costituzione chimica nei composti da noi presi in esame.

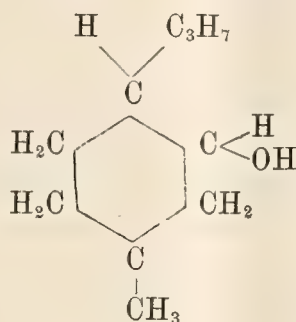
Un secondo gruppo farmacologico dei derivati della santonina risulta costituito dalla desmotroposantonina, dall'isodesmotroposantonina e dai quattro acidi santonosi.

Tutte queste sostanze contengono nella loro molecola l'ossidrile fenico (OH), ed esercitano sugli animali un' azione paralizzante.

Pare a prima giunta che ciò si trovi in contradizione con le conoscenze che si hanno sull' azione dell' ossidrile, il quale tanto negli alcoli, che nei fenoli è di natura eccitante. Dobbiamo però notare che il tipo dei composti da noi studiato non si può paragonare nè alle sostanze della serie grassa, nè a quella della serie aromatica; ma appartiene a quella più importante classe di composti a catena chiusa saturi o parzialmente non saturi, che da Bamberger furono chiamati *aliciclici.*

La letteratura sull' azione fisiologica dei compostî idrossilati di questa classe è molto scarsa.

Per quanto noi sappiamo, risulta soltanto che il *mentolo* che è un alcole secondario aliciclico della costituzione

$$
\begin{array}{ccc}
 & H \quad C_3H_7 & \\
 & \diagdown \diagup & \\
 & C & \\
H_2C & & C<^{H}_{OH} \\
H_2C & & CH_2 \\
 & C & \\
 & | & \\
 & CH_3 &
\end{array}
$$

dalle esperienze di Pellacani [1] si sa che è paralizzante; e similmente il *borneolo* $C_{10}H_{17}OH$ (che è l'alcool secondario corrispondente alla canfora), e che, quantunque la sua costituzione non sia ancora conosciuta, pure da tutti i chimici viene considerato come un composto aliciclico con due nuclei, per le esperienze dello stesso autore, risulta che è anche esso paralizzante. Il gruppo di queste sostanze idrossilate da noi studiate viene quindi ad aumentare le conoscenze che si hanno in questo campo, e a porre la questione, se l'ossidrile dei composti aliciclicici esercita un' azione completamente opposta a quella che si nota in quelli alifatici e aromatici.

Uno studio completo di queste sostanze alicicliche idrossilate merita di essere intrapreso.

Negli acidi santonosi, oltre la presenza dell' ossidrile, esiste un carbossile proveniente dall' ossidazione del legame lattonico. Il prof. Coppola ha dimostrato che questo non ha alcuna influenza sull' azione fisiologica dei derivati della santonina [2]; la differenza quindi nel potere tossico che osserviamo tra la desmotroposantonina e gli acidi santonosi, deve forse dipendere dalla maggiore solubilità che presentano gli acidi, i quali per questa proprietà sono assorbiti più facilmente delle desmotroposantonine.

In questo gruppo di sostanze che abbiamo esaminato, non abbiamo compreso il dimetilnaftolo, per la semplice ragione che esso non appartiene alla serie aliciclica, ma bensì a quella aromatica.

Nessun paragone possiamo quindi fare tra esso e gli acidi santonosi, quantunque sieno tutti e due paralizzanti.

Osserviamo però per il dimetilnaftolo che l' azione eccitante dell' ossidrile attaccato al nucleo aromatico, viene ad essere neutralizzata e cambiata dall' azione paralizzante dei due metili; di modo che l' azione finale risulta di natura uguale a quella di questi ultimi radicali.

(1) Arch. scienze mediche, vol. VI.

(2) *Lo Sperimentale,* loco citato.

Biologia. — *Sulla azione biologica dei raggi di Röntgen.* Nota del prof. STEFANO CAPRANICA, presentata dal Socio TOMMASI-CRUDELI.

Per studiare l'azione biologica dei raggi di Röntgen sugli animali superiori (mammiferi), era necessario scegliere fra i più piccoli e capaci di essere studiati con certezza assoluta, come determinazioni analitiche, potendo con essi evitarsi le multiple cause d'errore derivanti dai momenti speciali di nutrizione, di lavoro, ecc.

Ho scelto a tal uopo il *Mus musculus*, Var. Albina.

Determinai sopra 6 individui durante 40 giorni consecutivi, tutti i diversi coefficienti d'eliminazione del CO^2 studiando l'influenza della luce o diffusa, o diretta solare, o quelle artificiali (luce Wolz, luce elettrica, ecc.); quindi passai tenendo gli animali ad un regime costantemente ed esattissimamente uguale, ad osservare gli effetti della luce dei tubi Geissler, e finalmente dei tubi Röntgen.

Per coteste esperienze mi sono servito di un apparecchio speciale (del quale sarà data completa descrizione nella Memoria da presentarsi completa), capace di dare risultati di un'esattezza assolutamente uguale a quella richiesta da un apparecchio d'analisi chimica, giacchè sostituendo al topo un frammento di carbonato di calcio purissimo (spato), trovai, agendo nella identica guisa che nell'esperienze con gli animali, la cifra di 0,210 per 0,5 di CaO,CO^2, mentre teoricamente doveva trovare 0,220, e la differenza fra i due valori deve essere calcolata anche con le quantità di CO^2, assorbite dai tubi ad acido solforico ecc. interposti fra l'apparecchio a respirazione, ed i tubi a dosamento del CO^2.

Questa esattezza era necessaria per la limitazione del tempo delle esperienze, ed anche per questo presenterò i documenti provanti oltre il necessario, essere cotesta limitazione (da 1, a 3 ore) più che sufficiente per l'attendibilità dei risultati. Come pure feci esperienze onde cercare, se il rumore dell'interruttore fosse causa d'errore (sostenendo alcuni essere i topi ed altri animali siffatti impressionati da' suoni, rumori, ecc.).

Eliminato ogni dubbio, e studiata ogni possibile condizione, ecco i risultati raggiunti:

1° Il *Mus musculus* dà la medesima quantità di CO^2, sia all'oscurità *completa*, sia alla luce ordinaria diffusa (luce mista del giorno, in qualunque ora ed in qualunque condizione metereologica).

2° Il *Mus musculus* invece è fortemente impressionato, ed il ricambio è diverso, quando è costretto a respirare sotto la ferza dei raggi solari direttamente projettati su lui. Non è la temperatura che influisce, poichè mediante soluzioni d'allume e doppia riflessione de' raggi (mantenuti fissi da un elio-

stata), la temperatura rimaneva invariata. La diversità del ricambio è dovuta *soltanto alla intensità luminosa*, e non ai differenti raggi dello spettro solare. Ciò richiese una serie speciale di ricerche, e mediante soluzioni, e schermi monocromatici, furono provati i sette colori (grossolanamente divisi) sempre con identico risultato. Ossia quando erano semplicemente interposti fra l'apparecchio, ove era il topo e l'apertura dell'ambiente, all'ingresso della luce, nulli: identici come eccitanti e come variazione di CO^2, quando projettati dall'eliostata e concentrati sull'apparecchio.

3° Le luci artificiali (luce Wolz, luce Auer, luce elettrica) agiscono identicamente alla luce solare, cioè soltanto quando projettati concentrandoli con lenti ecc., ma non quando adoperati come illuminanti la stanza delle esperienze.

4° La luce dei tubi Geissler (varii modelli) non ha assolutamente azione veruna.

5° Finalmente la luce Röntgen (ottenuta con un palloncino nuovo modello Geissler), alimentato da un rocchetto capace di dare scintille di 12 a 14 centimetri con un voltaggio costante durante tutta la durata dell'esperienza, di 10 a 12 Volts, non *ha azione veruna sulle quantità di* CO^2 *eliminate dall'animale, e ciò qualunque sia la condizione di questo: cioè se digiuno, se in digestione, se tenuto prima molte ore all'oscurità o viceversa.*

6° Quello che si è constatato sempre con tutti i sei topi adoperati per le esperienze, è un *eccitamento fortissimo che si manifesta cessata l'esperienza, e che perdura per parecchie ore*. Mentre i topi in tutte l'esperienze, appena rimessi nelle loro gabbiette, mangiano ed assorbono avidamente il latte che loro si prepara, quando sono stati sottoposti durante 1 ora soltanto all'azione dei raggi X, corrono e arrampicano disordinatamente su le pareti della gabbietta, non mangiano se non dopo vario tempo, in una parola si mostrano eccitati e *nervosi*, in rimarchevole modo.

7° Io stimo dover essere coteste forme d'eccitazione nervosa, in diretta ragione con i fatti già noti, dell'influenza dei raggi X sopra i corpi carichi d'elettricità. Assai probabilmente i raggi X, agiranno sugli *stati elettrici* dei piccoli animali integralmente sottoposti alla loro azione.

8° Ho fatto anche alcune prove sugli animali a sangue freddo (*Coronelle*, *ropidonatus natrix*), ma senza alcun apprezzabile risultato sinora [1].

[1] Credo superfluo accennare, come in ogni esperienza con i raggi X, venisse posta una lastrina sensibile chiusa in scatolina di legno, sulla quale era un piccolo schermo metallico di cui si otteneva l'ombra fotografata, e ciò per escludere ogni obiezione sulla potenzialità del tubo a produrre i raggi suddetti. Come pure, onde prevenire altra obiezione, dirò che l'aria passante nell'apparecchio, mentre funzionava il rocchetto, era presa dall'esterno e non dall'ambiente nel quale si trovavano certo dei gaz assai nocivi agli organismi animali.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulla rotazione e sulla topografia del Pianeta Marte.* Memoria del Socio G. Schiaparelli.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Fisica. — *Sul modo col quale i raggi X facilitano la scarica dei corpi elettrizzati.* Nota del Socio Emilio Villari.

In una Nota, presentata il 14 marzo scorso alla R. Accademia di Napoli (1), io indicavo il modo di operare dei raggi X nello scaricare i corpi elettrizzati. In seguito ho fatto molte ricerche sul medesimo soggetto, e vengo qui ad esporre i risultati sino ad ora ottenuti.

La mia prima idea fu di studiare se i raggi X attraversando un dielettrico lo rendessero conduttore in maniera da agevolare, attraverso di esso, la

(1) Rend. d. R. Acc. di scienze fisiche, matematiche di Napoli, fasc. 4°, aprile 1896.

scarica di un corpo elettrizzato. In queste ricerche, come dielettrico, adoperai la paraffina perchè, oltre ad essere fra i migliori coibenti, è trasparentissima ai raggi X e si lavora con la massima facilità.

L'apparecchio che adoperai, indicato schematicamente dalla fig. 1, era formato da un Crookes a pera C, contenuto in una cassa di legno L L, rive-

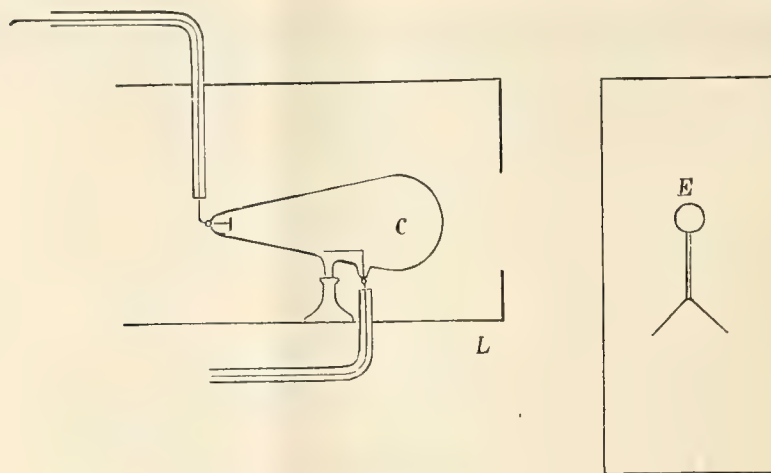



Fig. 1.

stita e chiusa affatto, meno che posteriormente, da una di lastra di piombo grossa 4,4 mm. e saldata tutta all'intorno. Di contro al fondo del tubo la cassa aveva un foro di 9 cm., e di contro ad esso, a 40 o 50 cm., trovavasi l'elettroscopio E. Questo era chiuso completamente in una gabbia di guardia di fitta e sottile rete di ottone ricoperta di stagnola, salvo nella parete di contro al Crookes, che era ricoperta da una lastra d'alluminio grossa 0,5 cm. e 30 × 30 cm. di superficie. Detta gabbia era unita al suolo per via dei tubi del gas. Le foglie di oro dell'elettroscopio vedevansi attraverso la rete della gabbia, per due fori opposti di 5 cm. praticati nella stagnola; ed erano osservate a distanza con un cannocchiale ad ingrandimento, avente una scala in vetro minutamente graduata al posto del reticolo. La durata della scarica dell'elettroscopio si determinava con un cronometro puntatore a quinti di secondi con grande esattezza. L'elettroscopio, col suo gambo isolato con tappo di paraffina, conservava invariata per molto tempo la sua carica; cosicchè le misure, relative alla durata delle scariche, sempre brevi, non abbisognavano di correzione alcuna. Ciò detto, ecco come sperimentai.

Caricai l'elettroscopio con una pila a secco, e facendo poscia agire il tubo Crookes, osservai che:

L' elettroscopio discendeva di 10° in 4″,7 [1].

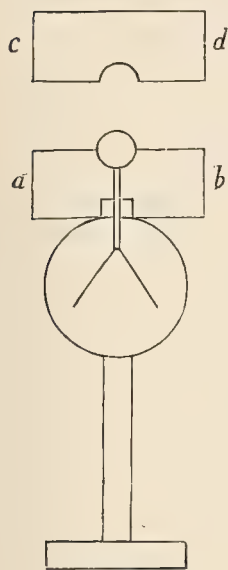



Fig. 2.

Indi circondai strettamente il bocciuolo, il gambo e la metà inferiore della pallina dell' elettroscopio con un blocco di paraffina *a b* fig. 2, accuratamente preparato; ed esposto ai raggi X, come sopra, osservai che:

L' elettroscopio scendeva di 10° in 14″,5.

L' elettroscopio, adunque, col gambo e la pallina tutta scoperta si scarica, per l' azione degli X, nel terzo del tempo, che gli occorre quando il gambo e la mezza pallina inferiore sono inviluppati dalla paraffina. E giova ricordare, che la paraffina essendo trasparentissima pei raggi X, poco può affievolirli quando l'attraversano. Perciò è a credersi, come sarà confermato in seguito, che nella ultima esperienza la scarica abbia luogo pressochè solo dalla mezza pallina scoperta, e perciò più lentamente.

Di poi ricoprii il blocco *a b* col coperchio di paraffina *c d*, avente l' impostatura esatta della mezza pallina scoperta, così da chiuderla per intiero. Esposi l'apparecchio alla radiazione e vidi, che l'elettroscopio scendeva da 4° ad 8° abbastanza rapidamente, e poi rimaneva fermo. Nella seconda esperienza, l'elettroscopio scendeva di 3°, e nelle successive di 1°, di $\frac{1}{2}$°, di $\frac{1}{4}$°, od anche meno, per poi rimanere immobile affatto.

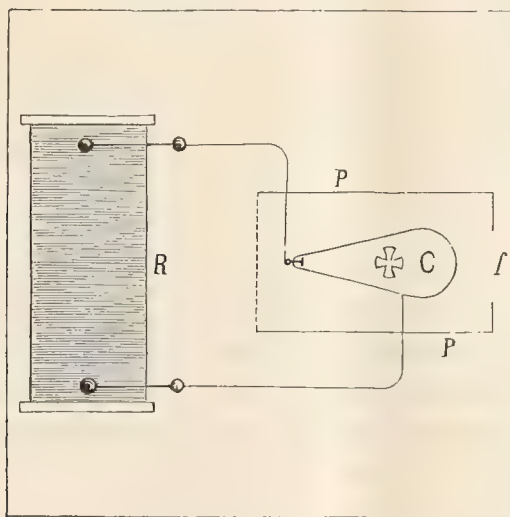



Fig. 3.

Queste esperienze, che eseguii con l' elettroscopio nella sua gabbia, volli ripetere con l'elettroscopio libero. Rinchiusi il rocchetto *R*, e la cassa di

[1] I numeri dei secondi rispondono alle medie di più risultati concordi.

piombo *pp* col Crookes *c*, in un'ampia cassa di zinco *zz* (100 × 100 × 75 cm.) tutta chiusa ed unita ai tubi del gas. Le due casse avevano, in corrispondenza del Crookes, ciascuna un foro *f* di 9 cm., e quello della cassa di zinco era chiuso da un' ampia lastra di alluminio di 0,5 mm. scorrevole a seracinesca. In tal modo erano, come mi assicurai, impedite affatto le induzioni esterne, e le radiazioni X si trasmettevano soltanto attraverso i fori e la lastra di alluminio.

Per ripetere le esperienze precedenti rinchiusi la parte superiore dell' elettroscopio strettamente nella paraffina, come nella fig. 2; e dopo averlo caricato e chiuso col coperchio di paraffina *c d* lo esposi ai raggi X, di contro ai fori delle cosse, fig. 3. L'elettroscopio scese, in sulle prime, di 6°,5 in circa 9″, e poi rimase affatto immobile per più minuti primi.

Ricaricato e ricoperto l' elettroscopio col blocco *c d*, ed esposto ai raggi, scese di 1° e poi rimase immobile.

In una terza esperienza simile, l'elettroscopio scese di $\frac{1}{4}$° in 4″ e poscia rimase immobile per parecchi minuti primi.

Perciò possiamo dire, che un conduttore carico di elettricità e circondato strettamente da un invoglio di paraffina, perde, per l' azione dei raggi X, la prima volta solo una piccola parte della sua elettricità; e nelle volte seguenti, dopo le successive cariche, perde sempre men d' elettricità per l' azione dei detti raggi, in modo che alla quarta o quinta esperienza la scarica provocata è nulla o quasi nulla.

Praticai nel coperchio *c d* un foro verticale abbastanza ampio, e poi anche uno orizzontale, in direzione opposta al Crookes, e tali da raggiungere la pallina. Indi, l'elettroscopio esposto alla radiazione si scaricò lentamente fino a zero.

Un corpo adunque, può scaricarsi per l'azione dei raggi X, quando è in contatto con l' aria.

Per meglio investigare il modo col quale la scarica si verifica nell' aria per mezzo dei raggi X, costruii un tubo di paraffina alto 9 cm., di 3,5 cm. di diametro interno e 7 cm. esterno. Caricai l' elettroscopio, lo ricoprii col tubo di paraffina *t t*, come nella figura 4, e situatolo nella sua gabbia di guardia, lo esposi alle radiazioni X. I risultati ottenuti sono i seguenti :

Fig. 4.

1ª Esp. L' elettroscopio discese di circa 3° in 82″, indi scendeva assai lentamente fino a 0°.

2ª Esp. L' elettroscopio discese	2° . . . . in	120″
» » »	3° . . . . »	270″
» » »	4° . . . . »	360″
» » » a	0° . . . . »	1100″

3ª Esp. L'elettroscopio discese	2°	. . . .	in	190″
»	»	»	4°	. . . .	»	360″
»	»	»	8°	. . . .	»	700″
»	»	»	10°	. . . .	»	810″
»	»	» a	0°	. . . .	»	1000″

Quando, adunque, l'elettroscopio è immerso nell'aria, e circondato a piccola distanza dal tubo di paraffina, esso si scarica per intiero, ma assai lentamente. Nè sensibile differenza notai chiudendo in alto il tubo con una lastra di paraffina. È da avvertirsi che l'elettroscopio così circondato dalla paraffina non si scarica affatto senza l'azione dei raggi X.

Le medesime ricerche ripetei col rocchetto ed il Crookes nella cassa di zinco, fig. 2, e con l'elettroscopio fuori la sua gabbia, ed ottenni gli stessi risultati indicati dai numeri che seguono:

1ª	Esp.	L'elettroscopio	col tubo	paraffina scende	5°,0	in	18″
	»	»	»	»	10°,0	»	310″
2ª	»	»	»	»	1°,5	»	10″
	»	»	»	»	2°,0	»	45″
	»	»	»	»	3°,0	»	95″
	»	»	»	»	5°,0	»	277″
3ª	»	»	»	»	1°,5	»	10″
	»	»	»	»	2°,0	»	30″
	»	»	»	»	3°,0	»	125″
4ª	»	»	»	»	1°,0	»	11″
	»	»	»	»	1°,5	»	38″
5ª	»	»	»	»	0°,25	»	7″
	»	»	»	»	1°,0	»	40″
	»	»	»	»	1°,5	»	62″

I precedenti risultati, ed altri simili, confermano, che nelle prime esperienze le scariche iniziali di pochi gradi si verificano con maggiore rapidità che nelle successive; e che la scarica totale avviene sì, ma con grandissima lentezza quando il corpo carico è circondato dall'aria e dal coibente.

Da questi e da altri fatti consimili fui indotto a credere, che la scarica avvenga per convezione o trasporto delle particelle dell'aria, attivato dall'azione dei raggi X. Esse particelle, prima attratte e poi respinte dal corpo elettrizzato, per una specie di danza elettrica, ne trasportano via la carica. Nel caso che il corpo sia nell'aria libera, la scarica procede rapidamente pei raggi X, perchè alle particelle caricate e respinte, sempre nuove e neutre si sostituiscono. Ma se il corpo è circondato a piccola distanza da un invoglio di paraffina, la scarica provocata dagl'X, in principio è rapida, perchè le particelle d'aria trasportando l'elettricità la cedono alla paraffina

e tornano neutre alla dansa; ma dopo che la paraffina è elettrizzata, la scarica non può avvenire che con lentezza, per la difficoltà con cui le particelle d' aria perdono la carica acquistata. Se però il corpo è strettamente circondato dalla paraffina, la scarica appena iniziata, carica la superficie della paraffina e quindi s' arresta, non avendo l' elettricità modo di disperdersi.

Secondo questa interpretazione, la paraffina, che involge il corpo che si scarica pei raggi X, dovrebbe prendere la carica del corpo stesso. Per dimostrare ciò ho eseguito svariate ricerche, che a vero dire riescono assai delicate e difficili, sia per la esiguità delle cariche, sia ancora perchè i coibenti s' elettrizzano, e spesso fortemente e per lungo tempo, per lievissime azioni.

Avanti tutto, avvicinando ad un elettroscopio elettrizzato *E*, fig. 5 in pianta, una, o meglio due strisce, *A* e *B* di paraffina o di ebanite, scaricate con la fiamma ed affatto neutre ad un sensibilissimo Bohnenberger, si vedrà costantemente scemare la deviazione dell' elettroscopio. Tale fenomeno non può attribuirsi ad una carica, anche minima, delle strisce, giacchè si produce con le medesime strisce, e con l' elettroscopio elettrizzato in più od in meno; ed invece deve ascriversi ad una influenza esercitata dal coibente, per la quale accrescendosi un poco la capacità dell' elettroscopio ne fa diminuire il potenziale. Tali induzioni però sono trinsitorie e, come ho detto, le lastre agiscono ugualmente invertendo la carica dell' elettroscopio. Un fenomeno affatto simile si verifica soprapponendo il tubo di paraffina alla pallina dell' apparecchio. Onde è necessario di tener conto di queste azioni induttrici, quando si voglia studiare, con un elettroscopio già carico, lo stato elettrico di un coibente.

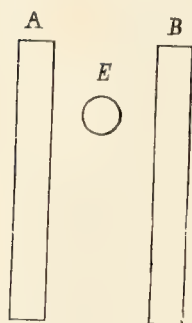



Fig. 5.

Una seconda causa d' errore è dovuta alla grandissima attitudine che ha la paraffina ad elettrizzarsi. Basta toccarla appena con le mani, o semplicemente appoggiarla o staccarla dalla tavola che la sostiene, perchè prenda carica negativa, e spesso assai vigorosa. Per evitare coteste cariche nel tubo di paraffina che adoperava, l' ho abbrancato fra le gambe di un composto da grossezze a vite, come nella fig. 6, così strettamente da tenervelo fisso. Servendomi poi del compasso come manubrio, ho potuto adoperare il tubo di paraffina senza elettrizzarlo meccanicamente. Ed ora veniamo alle esperienze.

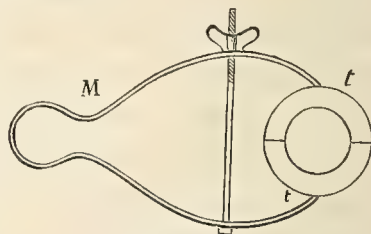



Fig. 6.

Per raccogliere la elettricità scaricatasi per via dei raggi X, operai nel modo seguente. Disposi verticalmente, in una canna di vetro *a b*, la solita pila a

secco P, che adoperavo per caricare l'elettroscopio, sopra un sostegno b unito al suolo, fig. 7. La canna era a grosse pareti e rivestita in alto di molti giri di stagnola per renderla opaca agl' X. Intorno al polo p della pila abbassai, come è indicato in sezione, il tubo tt di paraffina, sostenuto dal compasso, affidato ad un sostegno Bunsen, non indicato nella figura. La pila col tubo era disposta avanti il Crookes C della fig. 3, così da poter ricevere le radiazioni sul suo polo p. Attivato il Crookes per circa 15′ ed esaminato poscia l' interno del tubo con uno squisito Bohnenberger, lo trovai lievemente carico dell' elettricità del polo p. Prolungata l'azione dei raggi per da 25′ a 30′, la carica raccolta dal tubo era assai più energica e distinta. Inoltre essa era più intensa nella parte inferiore, corrispondente al polo p, che nella superiore.

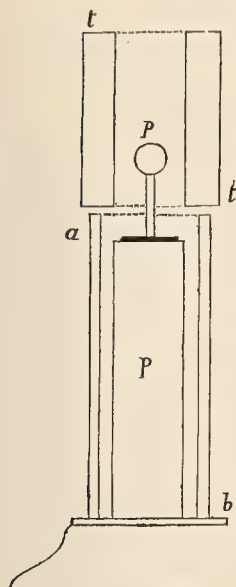



Fig. 7.

Le esperienze furono più volte ripetute, invertendo i poli della pila; ed usando le opportune diligenze si trovò, che il tubo nell' interno aveva sempre carica omologa al polo p. Ma potrebbe forse sospettarsi tale carica essersi trasmessa dal polo senza bisogno di alcuna radiazione. Per sincerarmi di questo dubbio rifeci l' esperienza precedente, senza l'azione dei raggi X, e dopo una ventina di minuti trovai, che l' interno del tubo di paraffina era carico d'elettricità opposta a quella del polo p. L' esame riusciva nettissimo col Bohnenberger; e l' esperienza fu ripetuta molte volte con ciascuno dei poli della pila, e dopo avere, ogni volta, accuratamente scaricato il tubo con la fiamma a gas. Tale carica contraria è dovuta alla influenza che si notò più sopra, esercitarsi dalla pila sulla paraffina. Essa carica, è fugace per una induzione di breve durata, ed è permanente per una induzione prolungata. Da ciò si comprende, che la carica della pila trasportata per l'azione dei raggi, deve prima neutralizzare la carica opposta, indotta nella paraffina, e poscia caricarla con la sua propria elettricità.

Ma non contento di queste esperienze volli più direttamente raccogliere ed esaminare la carica portata via dall' aria attivata dagli X. Situai il polo p della pila, fig. 8, precedentemente usata, avanti il Crookes rinchiuso nelle solite casse fig. 3, e su di esso polo fissai, su apposito sostegno di paraffina ss, un tubo di latta TT, 7 × 7 cm., con l' asse nella direzione del Crookes, ed unito, per un filo sottile TE all' elettroscopio E, a pile secche.

Attivando il Crookes, l' elettroscopio man mano si caricava, e la foglia veniva a battere su una delle pile, indicando carica omologa al polo p. Subito dopo la foglia ricadeva a 0°, per essere poi nuovamente attratta nel medesimo verso di prima, eseguendo così delle oscillazioni incessanti, ciascuna della durata di pochi secondi. Invertendo il polo p della pila P, si invertiva la deviazione di E, e cessava affatto al cessare dell' attività del Crookes.

Mi parve che le oscillazioni dell' elettroscopio E fossero più rapide, e perciò la carica raccolta maggiore, dopo aver chiuso con stagnola l' estremo

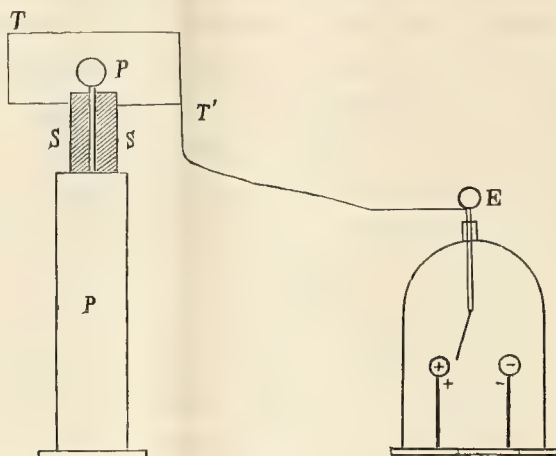



Fig. 8.

T' del tubo. Le oscillazioni della foglia s' accelerarono togliendo la lastra d' alluminio, che chiudeva il foro della cassa di zinco, ed aumentando la rapidità dell' interruttore del rocchetto.

È quasi superfluo il dire, che a Crookes inattivo l' elettroscopio non accennava a carica di sorte ([1]).

In seguito agli studi fatti col tubo di paraffina volli sperimentare con dei tubi conduttori e trasparenti agli X. Adoperai un tubo di sottile e fitta rete di ottone di 6 × 3,5 cm., ed uno di lamina d' alluminio, grossa circa

0,4 mm. Essi erano fissati con tappi di paraffina t', all'elettroscopio, come nella fig. 9. I tubi si tenevano, ora isolati, ora uniti al suolo con sottili fili di rame.

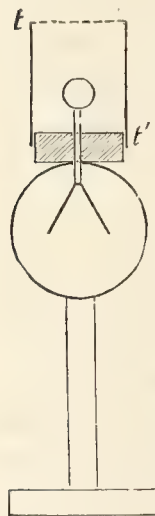



Fig. 9.

L' esperienze vennero fatte come segue:

Quando il tubo era unito al suolo si caricava l' elettroscopio con la pila, si misurava il tempo di scarica sotto l'azione degli X, e poscia scaricato si caricava di nuovo per procedere alla seconda esperienza: e così di seguito.

Nel caso del tubo isolato, si scaricava il tubo e l'elettroscopio, indi si isolava il tubo, si caricava l' elettroscopio e si misurava il tempo di scarica per l'azione dei raggi X. Dopo si scaricavano entrambi, s' isolava il tubo e si ricaricava l' elettroscopio per procedere a nuova misura, e così di seguito. Ecco alcuni risultati ottenuti col tubo di alluminio: l' elettroscopio

([1]) Ricorderò, a proposito di queste mie ricerche, che il Thomson J. J. dice che un conduttore si scarica della sua elettricità per l'azione degl' X anche se immerso in un coibente: ed il Righi trova invece che in tal caso la scarica è minima (V. *Comptes Rendus*, n⁰ 16, Aprile 1896); ma di ciò dirò più ampiamente in una prossima comunicazione.

era fuori della gabbia, mentre il rocchetto ed il Crookes erano disposti nelle loro casse, come nella fig. 3.

Tubo alluminio unito al suolo.

Scarica elettroscopio in gradi	Tempo di scarica in secondi	Differenze tempi
1	27	
2	50	13*
3	80	30
4	103	23
5	135	32
6	160	35
7	192	32
8	220	28
9	250	30
10	280	30
	media	30

Tubo rete unito al suolo.

Scarica elettroscopio in gradi	Tempo di scarica in secondi	Differenze tempi
1	20	
2	36	16
3	55	19
4	70	15
5	85	15
6	100	15
7	118	18
8	132	14
9	145	13
10	165	20
	media	16

N. B. Il numero con l'asterisco non è calcolato nella media finale.

Nelle medesime condizioni, ma senza i tubi, l'elettroscopio discendeva di 10° in 5″ a 6″.

La scarica dell'elettroscopio è enormemente rallentata quando esso è ricoperto da un tubo di fitta rete di ottone, e più ancora, da uno d'alluminio, uniti al suolo. Tale ritardo non può dipendere, che in piccola parte, dalla incompleta trasparenza dei tubi, essendo essi trasparentissimi.

Le esperienze eseguite coi medesimi tubi isolati dettero i seguenti risultati:

Tubo alluminio isolato.

Scarica elettroscopio in gradi	Tempo di scarica in secondi	Differenze tempi
1	brevissimo	
2	4	
3	12	8
4	41	29
5	70	29
6	100	30
7	128	28
8	160	32
9	190	30
10	225	35
	media	30

Tubo rete isolato.

Scarica elettroscopio in gradi	Tempo di scarica in secondi	Differenze tempi
1	brevissimo	
2	»	
3	»	
4	»	
5	10	
6	28	15
7	40	15
8	?	17
9	75	17
10	95	20
	media	17

Questi numeri sono simili ai precedenti, e mostrano che anche coi tubi isolati di alluminio e di rete di ottone, la scarica viene rallentata come coi tubi uniti al suolo. Infatti il tempo medio per la discesa di 1° è di 30″ tanto col tubo di alluminio unito al suolo che isolato, ed è di 16 col tubo di rete unito al suolo e di 17 col tubo isolato. Non pertanto una differenza nel tempo complessivo della scarica esiste nei due casi, giacchè coi tubi isolati le scariche dei primi gradi sono più rapide, che coi tubi uniti al suolo, ed in alcuni casi sono così rapide da non potersi misurare.

Il rallentarsi della scarica prodotto dai tubi tiene, secondo ogni probabilità, ad un fenomeno di condensazione, pel quale maggior carica s'accumula nell' elettroscopio, e maggior tempo occorre per dissiparla. Il fatto notato della scarica più rapida nei suoi primi gradi, quando i tubi sono isolati, è dovuto anche ad un fenomeno d' influenza. Quando si carica l' elettroscopio coperto dal tubo isolato, questo prende nell' interno carica opposta all' elettroscopio ed omologa all' esterno. I raggi X, che arrivano sul tubo, disperdono subito la sua carica esterna omologa respinta, la capacità cresce e l'elettroscopio scende. In seguito la scarica condensata si sperde lentamente. Quando il tubo è unito al suolo, un tale fenomeno non può aver luogo. A confermare questa interpretazione ho sovrapposto all' elettroscopio il tubo alluminio isolato e, dopo averli scaricati, ho caricato l' elettroscopio di 17° con la pila a secco. Ho toccato il tubo per iscaricarlo della sua elettricità omologa, e l' elettroscopio è disceso di 2°,5; dopo ho fatto agire i raggi X, e la scarica è avvenuta lenta e continua fin da principio, di 1° per ogni 20 o 30″, come al solito. Finalmente l'effetto della rete è minore di quello dell'alluminio, forse per la sua minore efficacia condensante, forse per la maggiore sua trasparenza, e più probabilmente per ambedue queste ragioni.

Riassumendo le cose su esposte potremo dire:

1. La scarica di un conduttore nell' aria, quando è provocata dai raggi X avviene per convezione o trasporto, quasi per una danza elettrica delle particelle dell'aria, attivata dalla radiazione.

2. La scarica del conduttore si rallenta quando se ne diminuisce la superficie esposta all' aria, ricoprendone una parte con la paraffina.

3. Quando il conduttore carico è ricoperto dalla paraffina postavi a contatto, la scarica iniziata dagli X subito s' arresta. Poca elettricità trasportata dalla poca aria circostante e per contatto carica la paraffina, e l'ulteriore scarica viene impedita.

4. Se il conduttore è circondato dall' aria e da un tubo di paraffina, il conduttore colpito dai raggi X si scarica in principio, abbastanza rapidamente; ma subito dopo la scarica procede con grandissima lentezza. L' elettricità trasportata, al solito, dall' aria, carica subito le pareti del tubo, e poscia con difficoltà e lentezza si disperde.

5. L' elettricità dispersa dal corpo sotto l'azione dei raggi X può rac-

cogliersi su un tubo di paraffina, come nel caso precedente, o di metallo isolato, che circondano il corpo che si scarica. L' elettricità raccolta può direttamente osservarsi con un elettroscopio a pile secche, e trovasi della istessa natura di quella del corpo.

6. I tubi metallici isolati o no, che circondano l' elettroscopio, valgono a condensarvi le cariche che vi s' impartiscono. Essi tubi rallentano molto la scarica generata dai raggi X, sia per la molta elettricità accumulata, sia per la non completa loro trasparenza ai raggi medesimi.

Fisica. — *Del ripiegarsi dei raggi* X *dietro i corpi ad essi opachi.* Nota del Socio E. Villari.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla integrazione delle equazioni della elasticità.* — *Sulle equazioni del moto vibratorio di un corpo elastico.* Note di O. Tedone, presentate dal Corrispondente Volterra.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Geologia. — *Nuovi lembi mesozoici in Sardegna.* Nota di Domenico Lovisato, presentata dal Socio Capellini.

Nella mia breve Nota del 1891 « *Brani sparsi di geologia sarda* » [1] dopo vari importanti lembi miocenici, ricordava alcuni altri del secondario e tra gli altri quello del Lias medio o forse meglio superiore del Monte Timilone nella Nurra colle ammoniti più antiche dell' isola, ricordate dal prof. Canavari [2] e l'altro triasico del Monte Santa Giusta pure nella Nurra colle arenarie ed anageniti, che fino a prova contraria persevero ad ascrivere in parte al permiano. Posteriormente, alle stesse falde del Monte Timilone in quei calcari rossastri ho trovato dei pecten e degli echinidi, fra i quali un *Pigaster*, genere caratteristico del giurese.

Scopo della presente mia breve Nota è di dar notizia di altri lembi, appartenenti a formazioni conosciute, ma non ancora determinate, oppure a formazioni che si dichiaravano mancanti per la Sardegna.

(1) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. VII, 1° sem., 1891.

(2) *Notizie paleontologiche.* Estratto dal processo verbale della Società Toscana di Scienze Naturali. Adunanza del dì 6 luglio 1890.

Lasciando a parte il permiano, al quale persevero ad ascrivere non poche delle arenarie e delle anageniti alla base dei calcari triasici, e ciò per la perfetta analogia che hanno colle forme veramente permiane dei Vosgi, cominciamo col triasico.

Questo terreno, scoperto da me nella Nurra nel 1880, venne subito dopo aumentato dall'illustre Bornemann [1] coi calcari della regione Narocci, formanti delle collinette in mezzo a dune sabbiose fra Capo Pecora e le miniere di Gennamari. Però, mentre il primo pei suoi fossili caratteristici, determinati dal compianto Meneghini [2], si deve nettamente ascrivere alla parte alta del Muschelkalk, i lembi di Narocci apparterrebbero secondo il loro illustre scopritore al Wellenkalk, cioè alla parte inferiore del Muschelkalk, mentre al Trias inferiore secondo lo stesso Bornemann e secondo il De Stefani [3] sarebbero da riferire le arenarie e le anageniti, che in parte io ascrivo al permiano. Sicchè in Sardegna si avrebbe non solo il Trias medio, ma anche il Trias inferiore. Nè manca il Trias superiore, il quale completa la serie dei terreni triasici, che fino al 1880 si riteneva mancassero in Sardegna.

Già nella mia Nota, prima ricordata, io dicea che nei pressi di Orroli, di Nurri, nel Tacco di Sadali ed anche nella Massa Maggiore del S' Arcidano, sono riservate allo studioso nuove scoperte, essendo la Sardegna eminentemente la terra delle sorprese. Nè m'ingannava così dicendo, perchè proprio nei dintorni di Nurri abbiamo un magnifico sviluppo delle formazioni triasiche, con qualche lembo permiano, sopportante formazioni liassiche. E sarebbe con ciò constatata la presenza del Lias in un secondo punto dell' isola. Queste formazioni si trovano sviluppate tanto ad oriente che ad occidente dell'ospitale e cara borgata, e possiamo dire che da una parte e dall'altra del simpatico paese esse formano una serie ridotta di terreni triasico-liasici.

Agli studiosi dei terreni mesozoici, ai cultori di roba antica lascio il farne l'illustrazione; a me oggi basta di dare in poche parole la notizia, dove essi si trovano per guidare gli altri a studiarli, avendo riservato per me il terziario, che tanto m'ha dato e mi dà a fare.

Scendendo da Nurri verso il Flumendosa si arriva a Sutta Corongiu, località pittoresca, un vero lembo di Svizzera, interessantissimo pel geologo, il quale dal basso all'alto trova questa serie di terreni:

1. Schisti neri azoici con vene di quarzo, contorti, cogli strati talvolta verticali. Questi schisti si veggono al basso attraversati da masse di porfidi rossi, che passano da una parte all'altra del letto del Flumendosa.

(¹) G. Bornemann, *Sul Trias nella parte meridionale dell'isola di Sardegna.* Bollettino del R. Comitato geologico, luglio ed agosto 1881, n. 7 ed 8.

(²) G. Meneghini, *Trias in Sardegna.* Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Adunanza del dì 4 luglio 1880.

(³) De Stefani, *Cenni preliminari sui terreni mesozoici della Sardegna.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. VII, 1° sem., 1891.

2. Calcari rossastri ed azzurrastri, senza fossili macroscopici.

3. Calcare dolomitico cavernoso, cinereo-oscuro, senza fossili visibili.

4. Dolomiti fetide.

5. Arenarie ed anageniti chiare, contenenti talora arnioni di pirite e qualche forma vermicolare, che potrebbe ricordare il *Rhizocorallium jenense* Zenk., come m'avvenne di trovare allo stesso livello al di là di Orroli.

6. Banco di altra anagenite.

7. Banchi calcari magnesiaci diversi fra loro.

8. Calcare fetido a *Gervilliae*, *Chemnitziae*, *Pecten* ecc.

9. Calcari cristallini della potenza di più di 20 metri in istrati prima compatti, poi quasi lamellari e corrosi e dividentisi in forme prismatiche. È da questi banchi che ritengo derivino i massi che si trovano pieni delle cosidette *Nerineae*, che sono ancora a studiare.

10. Argille indurite bianche, pavonazze, grigie ad impressioni giallo-ruggine riferentesi a vegetali, il tutto della potenza di circa 10 m.

11. Banco di anagenite che ad Orroli si sviluppa assai potente e che serve come eccellente materiale da costruzione.

12. Calcare intercalato con specie di tufi giallo-verdognolo.

13. Calcare compatto potente che forma la cosidetta *perda tachina* dei nurresi, e che si vede sviluppatissimo nell'alto piano della stazione ferroviaria.

14. Calcare argilloso giallo, fossilifero, che si vede all'alto di Sa Scala is Baccas, del miocene medio.

15. Colata basaltica del Pitzi Ogu.

Gli schisti del n. 1 sarebbero nettamente uroniani: della loro verticalità s'accorge il visitatore nella rapida salita a Nurri, ritornando per Sa Scala is Baccas.

I numeri seguenti fino al 7 inclusivo apparterrebbero per me al permo-triasico. Il n. 8 è il banco più interessante come quello che contiene una fauna abbastanza ricca di *Gervilliae*, di *Pecten*, di *Chemnitziae* e di altri gasteropodi. L'abbondanza delle Gervilliae e la forma di una di esse, che richiama alla mente la *G. Bovei*, porta a pensare al Keuper, cioè al Trias superiore: quindi con esso si avrebbe completa per la Sardegna la serie di questi terreni. Mi conforta in questa idea una notizia che mi dà il mio egregio amico, il prof. Taramelli, al quale sono ben contento di aver inviato il materiale finora raccolto, di avere cominciato lo studio dei fossili triasici di Nurri e di avere già determinato alcune *Gervilliae*, assai analoghe a quelle del Raibliano lombardo. Anche le *Chemnitziae*, di forme molto distinte, offrono varie specie caratteristiche: non so quanto potranno dire gli altri gasteropodi ed i Pecten, che pur si rinvennero in quei calcari. Potrà darsi che la determinazione di questa fauna ringiovanisca le formazioni di Nurri, che si trovano poi sparse in molti altri luoghi di Sardegna: avremo sempre

guadagnato colla determinazione di terreni, che si ritenevano mancare nell'isola. Negli strati sovrapposti passiamo al liasico, al quale si passa anche nel non lontano S'Arcidano, dove la potente formazione calcare non è tutta triasica, ma in parte giurassica, avendo io trovato da non molto in quei calcari quasi saccaroidi il *Pecten giganteus* Goldf.

Tra i numeri 13 e 14 a Padenti di Nurri scendendo per Scala Janti si mette un potente ed interessantissimo conglomerato calcare, che comprende assieme a ciottoli di calcare giurese e cretaceo anche ciottoli nummolitici colle specie *Nummolites biaritzensis* d'Arch., *N. Ramondi* Dfr., *N. Guttardi* d'Arch. e *N. perforata* d'Arch., ed altri ciottoli pure nummolitici con brachiopodi come una *Crania*, probabilmente da riferirsi alla *C. Bayaniana* Dav., specie rara della parte più elevata dell'eocene superiose. In altri punti sopra il liasico abbiamo formazioni calcari a *Clypeaster* e *Scutella* ed a Sant'Ambrogio una superba successione di strati aquitaniani ed elveziani.

Liasica e non triasica è la formazione calcare su cui è costruita Alghero, e che si prolunga a sud verso il Cántaro e più avanti. Ecco quindi una terza località, ove si sviluppano i terreni liasici, forse un lembo di Retico; infatti in quei calcari ho trovato il *Plagiostoma duplum*, la *Spiriferina* cfr. *alpina*, specie del lias inferiore, assieme a varie *Ostreae*, indeterminabili specificamente. A me non è riuscito di trovare l'*Halobia Lommeli*, *H. simplex*, *Daonella styriaca*, specie del trias alpino, che vi avrebbe rinvenuto il De Stefani (1). Il Trias invece si trova più a mezzogiorno e scendendo ancora s'incontra il permiano.

Sulla sponda sinistra del Flumendosa in faccia a Sutta Corongiu, dove arditamente sale la linea delle ferrovie secondarie, al piano di Esterzili e di Sadali, ai monti di Ussassai, di Ulassai, di Jerzu ecc. addito agli studiosi dell'avvenire formazioni calcari analoghe a quelle citate, e che sono sicuro compenseranno delle fatiche fatte.

Alla Perdaliana sopra il triasico si mette una bella massa calcare, ricchissima di *Pholadomya Murchisoni* Sow., del Dogger (giura bruno) od oolite media. Anche sui famosi Tòneri avrei molto a dire, ma trattandosi oggi di semplice notizia, che possa servire di guida a chi mi seguirà negli studi di Sardegna, passo alla creta, che dovrà essere molto ridotta anche nella Nurra ed aumentata altrove.

Il Traverso (junior) ha accennato (2) ad una formazione cenomaniana nella regione *Is Cantonis* al nord dei monti Gennas nel Sarrabus: sono stato io il fortunato a dirgli pel primo trattarsi di *exogyrae*, analoghe a quelle trovate dal Seguenza a Brancaleone nella provincia di Reggio Calabria. Or

(1) Lavoro citato, pag. 429.

(2) S. Traverso, *Calcare fossilifero nel Gerrei (Sardegna)*, Franc. Casanova, Torino, 1891.

bene, un altro lembo molto ristretto di quella stessa formazione è stato da me trovato nella immediata vicinanza di Sant'Andrea Frius, arrivandovi da Donori. È un impasto di *exogyrae*, fra le quali predomina l'*E.* cfr. *flabellata* Goldf.; ma all'infuori di queste e di qualche altra bivalve, che mi pare di poter avvicinare ad una *Cyprina*, non m' è riuscito di trovare altri fossili.

Ricorderò altro lembo cretaceo ad Acquacadda presso Nuxis nel Sulcis, il quale contiene gasteropodi di forme allungate come *nerineae*, che per quanto mi scrive l'illustre Bornemann, cui ho comunicato alcuni di quei resti, si possono riferire alla *Nerinea incavata* Bron. dei Gosauschichten. Si veggono soltanto le sezioni trasversali del canale, e la roccia che le comprende è di struttura detritica, composta di grani fini di sabbie calcari, cementate da calcare. Al microscopio devono comparire pure foraminiferi, perchè anche ad occhio nudo si scorgono frammenti sparsi a struttura organica.

Non dimenticherò altro nuovo lembo cretaceo da riportarsi all'ippuritico, in un valloncello sotto gli avanzi della chiesetta di Santo Michele di Sicci, lembo che appena si vede sopra il primitivo e coperto dal terziario medio.

Più esteso invece è il lembo pur ippuritico che s'adagia sopra le granuliti e che viene ricoperto dalle andesiti e trachiti al Sasso di Perfugas: è pieno di ippuriti, fra le quali predomina l'*Hippurites cornuvaccinum*.

Così come oggi farò per l'avvenire, se m'avverrà nelle mie escursioni di trovare qualche frammento secondario da aggiungersi a quelli che già si conoscono.

Farmacologia. — *Sull' azione vermicida della santonina e di alcuni suoi derivati.* Nota del dott. D. Lo Monaco, presentata dal Socio Luciani.

È noto che la santonina si adopera generalmente per espellere gli elminti dall' intestino. Uno studio molto importante su questo argomento venne pubblicato, alcuni anni or sono, dal compianto prof. Coppola (1) allo scopo di determinare il meccanismo d' azione di questa sostanza nell' organismo animale.

Egli, dopo aver riportato le opinioni che in proposito hanno sostenuto gli sperimentatori che prima di lui si erano occupati di questo argomento

(1) Arch. p. le scienze med., vol. XI.

come il Redi ([1]), il Baglivi ([2]), il Küchenmeister ([3]), il Falck ([4]), il Battistini ([5]), lo Schroeder ([6]), ed altri i quali, o hanno visto morire gli elminti posti nella soluzione della santonina, e quindi la decantano come vermicida, o non avendo osservato alcuna modificazione nella vitalità di questi parassiti, e allora la proscrivono dalla terapia; basandosi sui risultati ottenuti con le sue esperienze, formula una nuova teoria:

Egli crede che la santonina « non esercita alcuna azione tossica sugli ascaridi, e che non può nemmeno considerarsi come vermifuga. Senza dubbio il meccanismo d'azione della santonina come antielmintico consiste precisamente nei movimenti convulsivi che essa determina nei lombrici ».

L'autore opina che questi parassiti i quali si puntellano contro la mucosa intestinale, caduti in preda ai movimenti convulsivi prodotti dalla santonina, diventano liberi nel lume intestinale, e non possono più resistere ai movimenti peristaltici dell'intestino, normali o esagerati dai purganti.

La teoria del prof. Coppola ammette implicitamente che la santonina è assorbita dagli elminti nei quali produce, al pari che negli altri animali, l'avvelenamento che deve evidentemente, come in questi, finire con esito letale, quando l'azione è lunga e la dose forte.

Ci è sembrato utile ristudiare questo argomento, aiutati come siamo ora, da cognizioni chimiche sulla santonina maggiori di quelle note ai precedenti sperimentatori. Inoltre le esperienze del prof. Grassi e del suo aiuto dott. Calandruccio ([7]) i quali riuscirono a coltivare le uova degli ascaridi nelle medesime feci con le quali venivano eliminate, ci hanno suggerita l'idea, che per metterci nelle condizioni più adatte alla conservazione della vita di questi parassiti, invece di tenerli durante l'esperienza in acqua distillata o di fonte; nella soluzione normale di cloruro di sodio o in quella di carbonato di sodio, all'1 $_0{}^0/_0{}^0$; nell'olio di oliva o di mandorle dolci; bagni prescelti dai precedenti sperimentatori, bisognava immergerli nel liquido dell'intestino tenue dove essi dimorano. Il dott. Calderone ([8]) dell'Ist. farmacologico di Messina è riuscito a tenere in vita gli ascaridi per più di 10 giorni, tenendoli nella soluzione normale di cloruro di sodio, alla quale aggiungeva del

([1]) *Opuscoli di storia naturale*, Le Monnier. Firenze 1858.

([2]) *Opera omnia*. Lugduni 1714.

([3]) Arch. f. phys. Heilk. Bd. X. 630-1851.

([4]) Froriep's Tagesber. 1852.

([5]) Bollettino Acc. Romana 1883.

([6]) Arch. f. exp. Path. u. Pharm. XIX. 301.

([7]) *Animali parassiti dell'uomo in Sicilia*. Atti Acc. Gioena di Sc. naturali in Catania. Anno 66. 1889-90.

([8]) *Intorno all'azione di alcune sostanze usate contro gli ascaridi lombricoidi*. Arch. di farm. e terapeutica, vol. I, 1893.

peptone o dell' albume d' uova o del glucosio allo scopo d' impedire la loro inanizione.

Gli ascaridi porcini si mandavano a prendere al mattatoio, ritirandoli dall' intestino tenue subito dopo che gli animali erano macellati, e si mettevano in un vaso contenente liquido intestinale dei medesimi animali.

Trasportati in Laboratorio, si dividevano (scegliendo quelli dotati di movimenti più vivaci) in parecchi vasi a bocca larga, chiusi da una lastra di vetro finestrata e contenenti 150 c.c. di liquido intestinale per ciascuno, e poi si lasciavano dentro una stufa regolata a 38°.

I risultati confermarono le nostre previsioni, in quanto che noi abbiamo potuto osservare che gli ascaridi porcini immersi nel liquido intestinale e tenuti a temperatura costante di 38°, vivono per 10-12 giorni, e se si cambia il liquido ogni 4-5 giorni, essi possono sopravvivere per un tempo molto più lungo.

Ottenuto questo primo risultato, ci siamo proposti di provare in vitro sui lombrici l' azione della santonina e dei derivati più importanti di essa che noi abbiamo studiato, cercando d' imitare più che ci era possibile l'ambiente intestinale.

Dagli studi del prof. Andreocci ora sappiamo che la santonina sciolta nell' acido cloridrico, dopo un lungo periodo di tempo, precipita come desmotroposantonina; se però si neutralizza subito la soluzione cloridrica, o si aggiunge a questa molta acqua, si riottiene la santonina pura. Ci è pure noto dall'esperienza di Lewin (1), di Kaspari (2) e di Neumann (3) che la santonina è molto solubile nel succo gastrico e che in parte viene assorbita dalla mucosa dello stomaco. È evidente che questa forte solubilità bisogna attribuirla più all' acido cloridrico, che al lattico, come ritenevano i summentovati autori. Da ciò si deduce che la santonina passa nell' intestino in soluzione, dove viene precipitata dall' alcale contenuto nel succo enterico.

Questo precipitato, che dai risultati delle nostre esperienze susseguenti costituisce la sostanza che agisce contro gli ascaridi, che si trovano nell' intestino, è secondo noi solamente formato di pura santonina.

Si può per un momento supporre che insieme alla santonina passi nell' intestino un poco di desmotroposantonina. Noi crediamo che ciò si debba escludere a priori, perchè è impossibile che si formi desmotroposantonina nelle poche ore di dimora nello stomaco della santonina.

Ma pur nondimeno abbiamo creduto conveniente di fare un' esperienza in proposito, che è stata disposta nel seguente modo:

(1) *Ueber die Wirkung u. Anwendung des Santonins* B. Klin. Wochensch., n. 12. 1883.
(2) *Ueber das Verhalten des Santonins in Thierkörper*. 8. 42 Ss. Diss. Berlin 1883.
(3) Inaug. Diss. Dorpat. 1883.

Si versa una soluzione satura di santonina in 10 c.c. di acido cloridrico dentro un matraccio contenente tre litri di acqua distillata. Dopo aver bene agitato il liquido, si filtra in vasi asciutti con chiusura smerigliata che si mettono dentro alla stufa regolata a 38°. Dopo quattro giorni si osserva che non si sono depositati cristalli nel fondo dei vasi; allora si alcalinizza il liquido e si raccoglie in un piccolo filtro il precipitato, che presenta il punto di fusione e le reazioni della santonina.

Escludiamo anche che l' acido cloridrico rimasto libero per la precipitazione della santonina nell' intestino, diminuisca l'alcalinità del succo enterico e guasti l' ambiente adatto alla vitalità dei lombrici, per i quali i liquidi acidi sono micidiali. Nella migliore condizione la diminuzione di questa alcalinità calcolata è così leggiera, che poco o niente potrebbe nuocere al quieto vivere dei parassiti.

Risulta in questo modo dimostrata che la santonina ingerita si scioglie nell' acido cloridrico dello stomaco, e viene precipitata dall' alcale contenuto nel succo enterico.

Come si spiegherebbe che nell' intestino essa riesce vermicida, mentre fuori dell' organismo (in liquidi artificiali contenenti santonina), non iufluisce sulla vitalità degli ascaridi? La cagione di questo meccanismo d'azione è, secondo noi, la seguente:

Questa sostanza di fresco precipitata, come è quando si trova nell'intestino dopo l' azione del succo enterico, è estremamente suddivisa, e quindi in condizioni favorevolissime per esser subito salificata e assorbita.

Quantunque questa proprietà sia comune a tutti i corpi chimici, i quali reagiscono molto più facilmente quando sono da poco tempo precipitati, che quando sono in cristalli, pur essendo ridotti in polvere finissima, essa diventa di eccezionale importanza per la santonina e per i suoi derivati che sono corpi difficilmente attaccabili anche dai loro migliori solventi. Rammentiamo (e ciò abbiamo eseguito dietro avvertimento datoci dai prof. Cannizzaro e Andreocci) che per poter preparare la soluzione sodica di alcuni derivati, bisognava prima farne a caldo quella alcoolica, e dopo precipitare la sostanza con molta acqua; allora solo si riesciva, adoperando una quantità di soda maggiore di quella calcolata, ad ottenere la soluzione esatta.

Cosicchè in queste condizioni la santonina agisce direttamente contro gli ascaridi avvelenandoli, mentre in vitro, non avvenendo la precipitazione di cui sopra abbiamo parlato, l' assorbimento è difficoltato, o non avviene affatto; e l' osservatore resta ingannato, non sapendosi spiegare il meccanismo d' azione di questa sostanza antielmintica.

La dimostrazione della nostra teoria è resa evidentissima dai risultati che abbiamo ottenuto nelle seguenti esperienze. Come abbiamo detto, gli elminti venivano posti in piccoli vasi a bocca larga, coperti da lastre finestrate

e contenenti 150 c.c. di liquido intestinale per ognuno, al quale si aggiungeva la sostanza di cui si voleva indagare l' azione vermicida.

Ogni 24 ore l' inserviente cavava i vermi dei vari vasi, che si tenevano nella stufa regolata a 38°, vi rimetteva quelli dotati di movimenti, e notava in un taccuino il numero dei morti.

Non ci siamo preoccupati dei movimenti più o meno vivaci presentati dagli elminti durante il periodo sperimentale per poi attribuirli all' azione di questa o di quell' altra sostanza, perchè temevano di cadere in errori di osservazione: come abbiamo detto, constatavamo solamente la morte dei parassiti, per la qual cosa, dopo esauriti i mezzi meccanici, si ricorreva alla corrente elettrica.

L' esperienza durava sempre quattro giorni, al termine dei quali si calcolava la percentuale della mortalità degli ascaridi.

Dalle prime esperienze che per brevità non riportiamo per disteso, ma che abbiamo compreso nello specchietto, risulta evidente che gli ascaridi di maiale vivono male, tanto nei liquidi acidi, che in quelli troppo alcalini; niente invece possiamo dedurre in riguardo all' effetto che su di essi produce la santonina in queste condizioni.

Volendo anzi apprezzare con rigore i risultati che abbiamo ottenuti, si dovrebbe escludere che essa abbia influito sulla vita dei lombrici, perchè nei vasi dove venne posta in soluzione, si notò una mortalità minore che negli altri che contenevano il solo solvente alcalino o acido.

Smesso questo indirizzo sperimentale, ne abbiamo seguito un altro, che ci ha condotti a buonissimi risultati. Quando da noi si scioglieva la santonina nell' acido cloridrico, e si versava la soluzione nel vaso contenente gli elminti, si aveva da una parte la precipitazione della sostanza, e dall' altra l' acidificazione del liquido intestinale, alla quale abbiamo giustamente attribuito la forte azione vermicida osservata. Urgeva quindi, per eliminare ogni differenza tra le condizioni sperimentali e quelle dell' ambiente intestinale, di neutralizzare questa forte acidità. Avremmo così avuta la santonina sciolta prima nell' acido cloridrico, e poi precipitata dal liquido intestinale, escludendo nello stesso tempo l'azione dell' acido con la neutralizzazione per mezzo della soda. Se in queste condizioni le quali diventavano così identiche a quelle dell' intestino, noi ottenevamo una mortalità negli ascaridi piuttosto alta, essa doveva essere ritenuta come una conseguenza dell' azione vermicida della santonina.

Esperienza I.

Si mettono in ciascun vaso 12 ascaridi di maiale.

N. dei vasi	SOSTANZE ADOPERATE	Numero degli ascaridi trovati morti dopo il				°|o della mortalità dopo 4 giorni
		Primo giorno	Secondo giorno	Terzo giorno	Quarto giorno	
1	Ac. cloridrico 1 c. c.	0	4	2	0	50
2	Santonina 20 cg., ac. cloridrico 1 c. c.	1	1	4	0	50
3	Santonina 25 cg., ac. cloridrico 1 c. c., soda quanto basta per neutralizzare	1	3	1	2	59
4	Ac. destrosantonoso 25 cg. sciolto nel carbonato sodico	1	2	0	3	50
5	Solfato di santoninammina 25 cg . .	2	0	0	3	41
6	Elminti normali	1	0	0	2	25

Esperienza II.

Si mettono in ciascun vaso 18 ascaridi di maiale.

N. dei vasi	SOSTANZE ADOPERATE	Numero degli ascaridi trovati morti dopo il				°|o della mortalità dopo 4 giorni
		Primo giorno	Secondo giorno	Terzo giorno	Quarto giorno	
1	Ac. cloridrico 1 c. c.	0	5	4	2	61
2	Santonina 25 cg., ac. cloridrico 1 c. c.	0	1	5	3	50
3	Santonina 25 cg., ac. cloridrico 1 c. c., soda quanto basta per neutralizzare	1	2	4	6	72
4	Idem	2	0	3	5	55
5	Elminti normali	0	1	2	0	15

Esperienza III.

Si mettono in ciascun vaso 15 ascaridi di maiale.

N. dei vasi	SOSTANZE ADOPERATE	Numero degli ascaridi trovati morti dopo il				°|o della mortalità dopo 4 giorni
		Primo giorno	Secondo giorno	Terzo giorno	Quarto giorno	
1	Santonina 25 cg., ac. cloridrico 1 c. c. soda quanto basta per neutralizzare	0	4	2	4	66
2	Idem	0	1	5	4	66
3	Elminti normali	0	0	1	2	20

Perchè al lettore riesca più facile apprezzare i risultati che abbiamo ottenuto, sono state riunite nel seguente specchietto le varie percentuali; e di esse per ciascuna sostanza abbiamo calcolato la media.

SPECCHIETTO

N. progressivo	SOSTANZE ADOPERATE	°/o della mortalità	Media
1	Elminti normali .	8	
2	Id.	16	
3	Id.	8	
4	Id.	20	16
5	Id.	25	
6	Id.	15	
7	Id.	20	
1	Iposantonina e soda	25	22,5
2	Id.	20	
1	Santonina	25	31
2	Id.	37	
1	Santonina e soda .	41	39
2	Id. .	37	
1	Desmotroposantonina e soda . . .	58	41,5
2	Id.	25	
1	Acido levosantonoso	40	45
2	Id.	50	
1	Solfato di santoninammina . . .	50	45,5
2	Id.	41	

N. progressivo	SOSTANZE ADOPERATE	°/o della mortalità	Media
1	Soda	50	50
2	Id.	50	
1	Santonina e ac. cloridrico	58	
2	Id.	41	
3	Id.	60	52
4	Id.	50	
5	Id.	50	
1	Acido cloridrico .	75	
2	Id. .	50	
3	Id. .	60	59
4	Id. .	50	
5	Id. .	61	
1	Santonina e ac. cloridrico neutralizzato	59	
2	Id.	72	
3	Id.	55	63
4	Id.	66	
5	Id.	66	

I risultati sono tanto evidenti, che crediamo inutile illustrarli. Notiamo solamente che il percento della mortalità negli ascaridi messi nei vasi contenenti l'iposantonina, e gli acidi (destro o levo) santonosi e così poco alto, che non si può ammettere che siano dotati di azione antielmintica.

Il solfato di santoninammina invece, sciolto nel liquido intestinale nella proporzione da noi adoperata (0,16 °/₀), riesce abbastanza vermicida; però il facile assorbimento di questo derivato tanto solubile, e la sua forte azione tossica, lo rendono disadatto all' applicazione terapeutica.

Per quello che riguarda la santonina, le nostre esperienze mostrano evidentemente, che siamo riusciti a farla agire in vitro sugli ascaridi e a spiegarci in questo modo il suo vero meccanismo di azione.

Infatti, mentre la santonina in cristalli, o sciolta nella soda, ha pochissima azione sugli elminti, invece quando in soluzione cloridrica, la versiamo nel liquido intestinale insieme ad una quantità di soda, che neutralizza l'acidità, essa manifesta il suo forte potere vermicida, già da tutti i clinici ammesso. Questo risultato deve, come abbiamo detto, attribuirsi all' avvelenamento che gli ascaridi subiscono assorbendo la santonina, la quale per l' avvenuta precipitazione, si trova estremamente suddivisa, e quindi in condizioni favorevolissime per agire. L' ambiente nel quale la santonina si manifesta sostanza elminticida, deve essere di reazione alcalina, come è quello intestinale, perchè se questo non fosse necessario, nei casi in cui abbiamo versato la santonina in soluzione cloridrica, senza aggiungere la soda per neutralizzare, avremmo dovuto registrare la massima mortalità negli ascaridi causata dall' azione combinata dell' acido e della santonina. Poichè questo non avviene, bisogna concludere che in quelle condizioni la santonina rimane inerte, e che quindi al liquido acido debbono attribuirsi i risultati antielmintici che allora si osservano, e che non differiscono molto da quelli ottenuti mettendo gli ascaridi nella pura soluzione cloridrica.

Escludiamo, fondandoci su molte esperienze eseguite in proposito, qualunque azione vermicida dovuta al sale che si ottiene con l' acido cloridrico neutralizzato con la soda.

Dal complesso dei fatti da noi dimostrati, sorge l' indicazione terapeutica di adoperare la santonina di fresco precipitata, invece di quella in cristalli. Noi crediamo però, che questa pratica non debba mettersi in uso perchè in questo modo andremmo incontro, aumentando la solubilità della santonina nel succo gastrico, ad un maggiore assorbimento di essa attraverso la mucosa stomacale, la qual cosa costituirebbe, da una parte un pericolo per l'organismo, e dall' altra una perdita di efficacia nell'azione vermicida.

Potrebbe se mai tentarsi questa nuova pratica nei casi in cui dopo la ripetuta somministrazione della santonina, non si fosse ottenuto alcun benefico effetto. Secondo noi questi casi, e quelli di avvelenamento, che spesso si osservano somministrando la santonina, debbono esser messi in relazione con una minore o maggiore secrezione dell' acido libero dello stomaco, o con la presenza in esso di altri acidi eterogenei, durante il periodo della digestione gastrica della santonina.

In quanto alla somministrazione dei purganti, dei quali crediamo necessario il sussidio nella cura dell' elmintiasi, considerando che l' azione della santonina è lenta, sarebbe più opportuno, come fanno molti clinici, di darli a distanza di parecchi giorni, quando si può supporre che l' azione della santonina sia già finita.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Cremona, a nome anche del Socio Beltrami, relatore, legge una Relazione sulla Memoria del prof. G. Ricci, intitolata: *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, concludendo col proporre l'inserzione del lavoro negli Atti accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Brioschi dà il doloroso annuncio della morte del Socio nazionale Federico Menabrea, avvenuta il 25 maggio 1896, e di quella del Socio straniero Gabriele Augusto Daubrée, mancato ai vivi il 28 dello stesso mese; apparteneva il primo all'Accademia sino dal 4 gennaio 1874, e ne faceva parte il secondo dal 17 marzo 1881.

L'Accademia, in adunanza generale, procedette alla elezione del Presidente, del Vicepresidente, e degli Amministratori.

Risultato della votazione pel Presidente:

Votanti 46. Brioschi 41. Schede bianche 5. Eletto Brioschi (riconferma).

Risultato della votazione pel Vicepresidente:

Votanti 46. Messedaglia 41. Comparetti 1. Schede bianche 4. Eletto Messedaglia (riconferma).

Risultato della votazione per gli Amministratori:

Votanti 41. Cerruti 38. Tommasini 33. Beltrami 2. Schupfer 2. Strüver 1. Eletti Cerruti (riconferma) e Tommasini.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 giugno 1896.

Abetti A. — Cometa I, 1896 (Perrine-Lamp). Roma, 1896, 4°.

Bertini E. — Sugli spazi lineari delle quadriche a numero di pari dimensioni. Torino, 1895. 8°.

Id. — Sulle configurazioni di Kümmer più volte tetraedroidali. Milano, 1896. 8°.

Boccardo E. e *Baggi V.* — Trattato elementare completo di geometria pratica. Disp. 43. Torino, 1896. 8°.

Brédikine Th. — Sur l'origine et les orbites du système des Aquarides. S. Pétersbourg, 1896. 4°.

Castracane F. — I processi di riproduzione e quello di moltiplicazione in tre tipi di diatomee. Roma, 1896. 4°.

Catalogo della Biblioteca dell' Ufficio geologico. 1° suppl. 1894-95. Roma, 1896. 8°.

Cinelli M. — Sul massimo di densità di alcune soluzioni acquose e sull' azione del corpo disciolto sulle proprietà del solvente. Pisa, 1896. 8°.

Id. — Sopra la diffrazione della luce per aperture praticate sopra superficie curve. Pisa, 1895. 8°.

Freda A. — Contributo alla flora vascolare del territorio livornese. I-III. Firenze, 1895. 8°.

Id. — Contributo allo studio delle Narcissee italiane. Firenze, 1896. 8°.

Gemmellaro G. G. — Sopra due nuovi generi di brachiopodi provenienti dai calcari con fusulina della provincia di Palermo. Palermo, 1896. 4°.

Lussana S. — Sul calore specifico dei gas. Pisa, 1896. 8°.

Id. e *Cinelli.* — Sulla propagazione dei raggi Röntgen. Siena, 1896. 8°.

Meli R. — Ancora sugli esemplari di *Neptunea Sinistrorsa* Desh. (Fusus) pescati sulla costa di Algeri. Roma, 1895. 8°.

Id. — Molluschi fossili estratti recentemente dal giacimento classico di Montemario. Roma, 1896. 8°.

Id. — Relazione sommaria delle escursioni geologiche eseguite con gli allievi della r. Scuola di applicazione degli Ingegneri di Roma nell' anno scolastico 1894-95. Roma, 1895. 16°.

Id. — Sopra alcune rocce e minerali raccolte nel viterbese. Roma, 1895. 8°.

Observatorio (R.) de Lisboa (Tapada). — Observations méridiennes de la Planete Mars pendant l'opposition de 1892. Lisbonne, 1896. 4°.

Palmieri L. — Le correnti telluriche all' Osservatorio vesuviano, osservate con fili inclinati all' orizzonte, durante l' anno 1895. Napoli, 1896. 4°.

Passerini N. — Sul governo del vino come si pratica in Toscana. Firenze, 1896. 8°.

Id. — Su di un nuovo carburatore nell' apparecchio per il gas installato nel Laboratorio di chimica della Scuola agraria di Scandicci. Firenze, 1896. 8°.

Perini E. — Sulla immunità contro la difterite conferita agli animali mediante la somministrazione delle sostanze antitossiche per la via della bocca (Min. d. Int.). Roma, 1896. 4°.

Reina V. e *Ciconetti G.* — Ricerche sul coefficiente di rifrazione terrestre eseguite in Roma nel 1895. Roma 1896, 4°.

Schaudinn F. — Heliozoa. Berlin, 1896. 8°.

Sclavo A. — Delle sofisticazioni del pane e delle paste alimentari coi prodotti del maiz bianco (Ministero dell' Interno). Roma, 1896. 4°.

Silvestri C. — Lettera aperta al prof. Cora Guido. Roma, 1896. 8°.

Staggemeier A. — Le millionième de la surface terrestre représenté comme une unité convenable pour l'estimation des étendues géographiques. Copenhague, 1896. 8°.

Valenti G. — Processo sopracondiloideo dell'omero in due criminali ed in una pazza. Perugia, 1896. 8°.

Id. — Un caso di saldatura immediata dei talami ottici. Perugia, 1896. 8°.

Weingarten J. — Sur la déformation des surfaces. Stockholm, 1896. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 giugno 1896.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Del ripiegarsi dei raggi* X *dietro i corpi opachi.* Nota del Socio E. Villari [1].

In una Nota preventiva presentata alla Accademia di Napoli nell' adunanza del 14 marzo 1896 [2] dissi come ero riuscito a dimostrare, con l' elettroscopio e con la fotografia, che i raggi X, quando battono sopra un corpo ad essi opaco, vi si ripiegano dietro, in modo da penetrare nella sua ombra. In questo scritto esporrò più minutamente le esperienze fatte in proposito, ed i vari risultati ottenuti.

La prima idea del ripiegarsi [3] dei raggi, dietro di un corpo opaco, mi venne studiando la trasparenza dei metalli. In sulle prime misurai la trasparenza di una lastra di piombo di $20 \times 20 \times 0{,}44$ cm., e di una di zinco di $40 \times 20 \times 0{,}42$ cm., interponendole, una dopo l' altra, perpendicolarmente

[1] Presentata nella seduta del 6 giugno 1896.

[2] *Sui raggi* X *e sulle scariche elettriche da essi prodotte.* III. Nota (Rend. Acc. di sc. fis. e mat. di Napoli, aprile 1896).

[3] Adopero la parola « ripiegarsi » od oltra simile, soltanto per indicare il fatto, non ancora bene spiegato. Esso forse dipende dalla diffrazione dei raggi X, e più ancora da una proprietà da essi comunicata all'aria, come dirò, spero, fra poco.

alle radiazioni, fra un Crookes a pera ed un elettroscopio carico e chiuso nella sua gabbia [1]. Le misure più volte ripetute mostrarono, con mia sorpresa, che l'elettroscopio posto nel centro dell'ombra delle lastre si scaricava; e più rapidamente quando era interposta la lastra di piombo (5° in 59″), che quella di zinco (5° in 91″). Cosicchè queste lastre, sebbene molto spesse, pure sembravano abbastanza trasparenti; e quella di piombo più di quella di zinco, contrariamente alla realtà.

Sospettando di qualche azione laterale perturbatrice dei raggi, chiusi un Crookes a pera in una cassa di lastre di piombo grosse 4,4 mm. con un foro di 9 cm. di contro al fondo del tubo. Disposi a 50 o 60 cm. l'elettroscopio nella sua gabbia, ed esaminai la trasparenza di una lastra di piombo e di una di zinco, grosse 0,4 mm., disponendole contro il foro in modo da chiuderlo perfettamente. La scarica di 5° dello elettroscopio s'ebbe, col piombo in 143″5 in media, e con lo zinco in 53″,6. Da ciò due conseguenze: la prima, che il piombo è sensibilmente più opaco dello zinco, come è già noto; la seconda, che la scarica nelle prime esperienze delle grosse lastre, prodotta dai raggi X, non può attribuirsi alla loro trasparenza, che è certamente minima, per la loro grande spessezza.

Perciò supposi, che l'apparente trasparenza delle grosse lastre di piombo e zinco dovesse riferirsi al ripiegarsi dei raggi X, o della loro efficacia, sui bordi delle lastre; e che la maggior trasparenza apparente della lastra di piombo fosse effetto della sua minore estensione, rispetto a quella di zinco.

Questa interpretazione fu confermata dalle seguenti osservazioni:

1ª Una lastra di piombo di $60 \times 60 \times 0,42$ cm., esaminata come sopra, apparve assai più opaca (scarica di 3° in 192″) di una simile ma più piccola, $20 \times 20 \times 0,42$ cm. (scarica di 5° in 40″).

2ª Due lastre pressochè eguali, una di piombo $20 \times 20 \times 0,42$ cm. ed una di zinco $20 \times 20 \times 0,44$, esaminate al solito modo, mostraronsi assai diverse: quella di piombo apparve più opaca (scarica di 5° in 40″) di quella di zinco, (scarica di 5° in 33″), come è in realtà.

3ª Interposi fra il Crookes e l'elettroscopio, a guisa di grande schermo, una lastra di zinco $60 \times 60 \times 0,42$ cm. con un foro di 62 mm. ben centrato con gl'istrumenti. Contro di esso situai una lastra di platino $10 \times 10 \times 0,2$ cm., in modo da chiuderlo, ed osservai che l'elettroscopio discendeva di un certo

[1] L'elettroscopio da me adoperato era a foglie d'oro, isolate perfettamente con tappo di paraffina così da tenere invariata la carica per molto tempo. Esso era chiuso intieramente in una gabbia di rete d'ottone fitta e sottile ricoperta di stagnola, salvo dal lato esposto alle radiazioni, ove la stagnola era sostituita da un'ampia lastra d'alluminio grossa 0,5 mm. ed ampia 20×20 cm. Le foglie di oro erano osservate, attraverso due fori diametrali praticati nella stagnola, con un cannocchiale ad ingrandimento, nel quale al reticolo erasi sostituito una scala divisa sul vetro.

numero di gradi in 93″: tolta la lastra di zinco e rimasta sola quella di platino, come dianzi, vidi che la medesima scarica dell'elettroscopio avveniva in 8″.

Dopo tali osservazioni bisogna ammettere, che lo scaricarsi dell'elettroscopio, situato nell'ombra di una delle precedenti lastre, sia da attribuirsi realmente al ripiegarsi dei raggi dietro di esse, e non alla loro trasparenza; tanto più, che chiudendo il foro della cassa di piombo contenente il Crookes, con una delle grosse lastre precedenti e collocando a breve distanza l'elettroscopio, questo non si scaricava punto.

Stabilito il fatto, mi detti a studiarlo nei suoi particolari. Adoperai un disco di piombo 13 × 0,44 ed il Crookes chiuso, come sopra, nella cassa di piombo con un foro di 9 cm. Chiudendo il foro col disco, i raggi erano del tutto arrestati, per essere questo affatto opaco. Disposi l'elettroscopio, chiuso nella gabbia, a 45 cm. dal fondo del Crookes, ed il disco, centrato e normale all'asse comune, lo situai, man mano, a diverse distanze dell'elettroscopio. Misurai nei varî casi il tempo di scarica ed ottenni, come medie di più misure concordi ed incrociate, i seguenti valori in secondi:

Distanza DE [1]	Tempi di scarica di 1°
37 cm.	39″
20 »	13,″9
15 »	7″,4
7,5 »	4″,2

Tolto il disco la scarica di 1° fu rapidissima.

Per potere avvicinare maggiormente il disco all'elettroscopio, cavai questo dalla sua gabbia: ed avendo chiuso il foro della cassa di piombo, che conteneva il Crookes, col disco precedente osservai, che attivando il Crookes l'elettroscopio, sebbene oscillasse di circa $^1/_4$, pure non modificava punto la sua carica. Perciò potevo misurare il tempo delle scariche senza errori sensibili. Ripetute le esperienze precedenti ottenni i dati seguenti:

Distanza DE	Tempo di scarica di 10°
26,4 cm.	18″,0
20,4 »	17″,0
15,0 »	13″,1
7,0 »	10″,1
1,8 »	22″,0
Tolto il disco	6″,1

Cioè il tempo di scarica scema avvicinando il disco all'elettroscopio, fino ad un minimo, di 10″,1, alla distanza di 7 cm.; indi, avvicinando di più il disco all'elettroscopio, il tempo della scarica cresce di nuovo; ed è di 22″ alla distanza di 1,8 cm. Perciò può dirsi che l'ombra al centro del

[1] Indico per brevità, con D ed E il disco e l'elettroscopio.

disco, è meno fitta ad una certa distanza da esso, che potremo dire *distanza critica*, e diventa più densa a distanze maggiori o minori della critica.

Altre esperienze eseguii con dischi di ottone affatto opachi, e più grandi del precedente. I numeri seguenti, medie di più misure, esprimono in secondi la durata della scarica di 1°.

Disco di ottone 18 cm. di diametro ed elettrometro in gabbia:

Distanza DE	Tempo di scarica
13,5 cm.	90″
11,5 »	66″,5
9,5 »	38″,5
7,5 »	23″,5

Questi risultati sono identici a quelli della prima serie di misure.

Con un disco di ottone di 32 cm. si ebbe:

Distanza DE	Tempo di scarica per 1°
18 cm.	75
8 »	144

Con questo ampio disco, situato ad 8 cm. dall'elettroscopio, s' ebbe al suo centro un' ombra quasi assoluta, mentre che con gli altri dischi più piccoli, alla stessa distanza s' aveva l' ombra di minima intensità. A 18 cm. di distanza l' ombra al centro era assai meno fitta. Cosicchè la distanza *critica*, del punto dell' ombra meno fitta al disco, ovvero la *distanza critica* dal disco, varia con le dimensioni di questo.

Ad investigare l' efficacia dei raggi nelle diverse regioni dell' ombra, su di un medesimo piano normale all' asse del Crookes e passante per il centro del disco perpendicolarmente al disco stesso, disposi il tubo nella sua cassa ed il disco di piombo a 7,5 cm. dall' elettroscopio, chiuso nella sua gabbia. Indi, attivando il Crookes, portai l' elettroscopio a destra o sinistra del centro del disco, senza porlo mai fuori della sua ombra geometrica, ed ottenni i seguenti valori, rispondenti alla durata media della scarica di 5°.

Elettroscopio	Tempo di scarica
Al centro	21″,9
A destra	15″,2
Al centro	20″
A sinistra	14″,7

Esperienze simili col disco di ottone di 18 cm.

Elettroscopio	Tempo di scarica
Al centro	87″,0
A sinistra	15″,2

Analoghi risultati si ebbero portando l' elettroscopio in alto od in basso dell' asse e dell' ombra; e del pari identici furono quelli ottenuti adoperando, invece del disco, una lastra di zinco di $40 \times 40 \times 0{,}42$ cm., posta a 7,5 cm. dall' elettroscopio. In queste condizioni l' ombra al centro era piena e totale.

Da ciò si può concludere che l'ombra dei raggi X, dietro i corpi opachi, scema dal centro alla periferia.

In queste esperienze si è tenuto conto della sola posizione della pallina dell'elettroscopio, che situavo nelle varie regioni dell'ombra, per apprezzarne la intensità. Potrebbe forse credersi, che anche il corpo dell'istrumento risentisse l'efficacia dei raggi, che avrebbero potuto scaricarlo, indipendentemente dalla sua pallina. In tal caso l'effetto osservato non misurerebbe l'intensità dell'ombra nei varî punti ove trovavasi la pallina, ma risponderebbe ad un'azione complessa dei raggi sulla pallina e sul resto dell'istrumento. Per rispondere a questo dubbio, ricoprii la pallina ed il gambo dell'elettroscopio con un grosso tubo o cappello d'ottone perfettamente chiuso, e vidi che l'apparecchio non era punto influenzato dagli X, ai quali venne liberamente esposto. Questi raggi adunque non operano, che sulla pallina e sul gambo. Nè ciò deve far meraviglia, imperocchè il corpo dell'elettroscopio era fatto di una sfera di ottone di grosse pareti con 2 fori chiusi da grossi vetri, formando così un sistema impervio ai raggi.

Per confermare il ripiegarsi dei raggi, ricorsi all'uso della fotografia; e dopo una prova abbastanza distinta, ottenuta con un Crookes a pera, adoperai con molto miglior successo un tubo fuoco, cioè con l'anodo a lastra di platino riflettente i raggi catodici. Disposi una lastra Lumière 21×27 cm. a 29 cm. dal tubo ed interposi, a 7,5 cm. della stessa lastra un disco di piombo, $13 \times 0{,}44$ cm., normalmente ai raggi X. Attivai il tubo per circa 20 minuti ed ottenni un immagine del disco di 157 mm. diametro, con una sottilissima e lievissima penombra esterna. All'interno del limite dell'ombra l'immagine era circondata da una zona chiara di 6 ad 8 mm. di larghezza, prodotta da radiazioni ripiegate e di intensità lievemente decrescenti, dall'esterno all'interno. Questa zona dimostra e conferma, che realmente i raggi X, o la loro efficacia, si ripiegano ai bordi dei corpi opachi, e penetrano nella loro ombra geometrica.

Una riprova del ripiegarsi dei raggi ottenni del pari con la fotografia nel modo seguente:

Situai avanti ad un piccolo tubo a fuoco (fig. 1) C, una grossa lastra di zinco ($40 \times 40 \times 0{,}42$ cm.) affatto opaca, ZZ'. Normalmente ad essa, alcuni millimetri dietro del bordo Z' e dalla parte opposta di C, fissai una lastra Lumière $Z'F$, chiusa in più strati di carta nera.

Essa, così, trovavasi nell'ombra piena di ZZ' e non poteva ricevere direttamente i raggi X provenienti da C. Attivai il tubo C, che era assai deteriorato per lungo uso, e sviluppai la lastra dopo circa $^3/_4$ d'ora di azione. Essa mi si mostrò attaccata assai visibilmente dai raggi, ed in modo decrescente dall'estremo vicino Z' a quello lontano F. Una lista di stagnola grossa e ripiegata in quattro strati aveva prodotta una traccia chiara (non bene uniforme per non essere rimasta dapertutto aderente alla lastra) sul campo

oscuro della negativa. Le prove furono più volte ripetute e sempre col medesimo risultato, confermando il ripiegarsi dei raggi X dietro i corpi opachi. La energia però di cotesti raggi ripiegati scema da Z′ ad F, pel crescere della distanza, sia dal tubo T, sia dal limite dell'ombra geometrica.

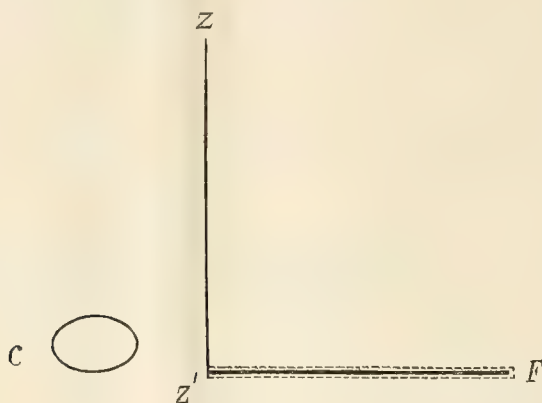



Fig. 1.

Riprendendo le esperienze con l'elettroscopio, situai il Crookes C nella sua solita cassa di piombo AA, e questa in quella ampia di zinco BB, come è disegnato in pianta nella fig. 2. Il fondo di C rispondeva a due fori di 9 cm.

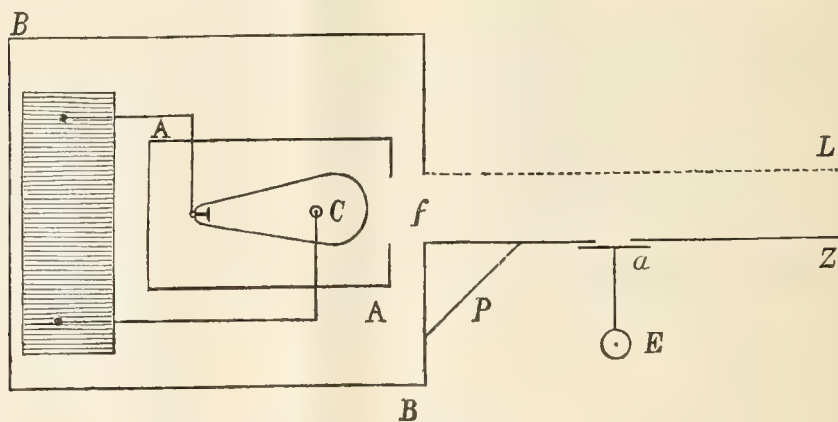



Fig. 2.

praticati nelle pareti delle casse, e quello *f*, della esterna, era chiuso da una lastra di alluminio di 0,5 mm. di spessezza. Al bordo del foro esterno e lateralmente fissai una lastra di zinco ($40 \times 40 \times 0{,}42$ cm.) verticale, e parallela ai raggi X, provenienti da C, ed avente nel suo mezzo un foro *a* di 4 cm. Ad esso, e dalla parte esterna della lastra avvicinai, a 3 o 4 mm., una lastrina di alluminio *a* unita all' elettroscopio E; ed in P, disposi una grossa lastra di piombo, per meglio riparare l' elettroscopio E dalle radiazioni. Indi chiusi il foro *a* dalla faccia opposta della lastrina di alluminio,

con una grossa lastra di zinco e vidi, attivando C, che l'elettroscopio non si scaricava in modo sensibile (scendeva 1° . . . . . . in 80 a 100″).

Poscia aperto *a* ed attivato C osservai che l'elettroscopio scendeva in media di 10° . . . . . . in 80″

D'onde si rileva che gl' X, o la loro efficacia, si piegano lateralmente alla loro direzione.

Aggiunsi una lastra di latta L riflettente, a circa 10 cm. da Z, e l'elettroscopio scendeva 10° . in 83″

Tolta L l'elettroscopio scendeva 10° . . . . „ 84″

Chiuso il foro *a* l'elet. scende 1° . . . . . . „ 80″

Quindi potremo dire che la lastra riflettente L non ha influenza sensibile.

Allontanando l'elettroscopio con la sua lastrina dal foro *a*, l'influenza degl' X scema. Così con la lastrina a 45 mm. dal foro *a*, sempre centrata, l'elettroscopio scendeva di 10° . . . . in 163″

Chiuso con lastra zinco grossa il foro *a* l'elettroscopio scese di 1° . . . . in 70″

Portata la lastrina *a* a 5 mm. dal foro l'elet. scese di 10°. . . . . „ 85″

Se si chiude il foro *n* con carta nera, bene incollata ai bordi, l'efficacia degl' X si riduce pressochè a nulla, così che l'elettroscopio scese di 10° in 147″

Dai fatti precedenti sembra che per scaricare l'elettroscopio non sia necessario che questo sia colpito direttamente dai raggi X, essendo sufficiente che vi arrivi l'aria stata attraversata da essi. Ed infatti l'elettroscopio si scarica prontamente, e cioè di 10° . . . . in 27″

. . . . „ 30″

. . . . „ 27″

se si soffia con un mantice (durante l'azione del Crookes), contro la lastrina *a* l'aria che viene attreversata dai raggi. Per contro, quando il Crookes è inattivo l'aria soffiata su di *a* non scarica l'elettroscopio. Perciò può dirsi, che gl' X impartiscono all'aria l'attività di scaricare l'elettroscopio, attività che conservano per un certo tempo. Questo fatto è simile a quello osservato dal Röntgen, il quale vide, che l'aria, su cui hanno agito i raggi X, fatta passare, per aspirazione, sopra di un elettroscopio lo scaricava rapidamente della sua elettricità.

Intorno ad alcune ricerche del prof. A. Righi *state prima fatte da me.*

Il prof. A. Righi in una recente Nota, *Nuovi studî sulla dispersione elettrica prodotta dai raggi Röntgen* (Rend. Acc. dei Lincei, seduta 3 maggio 1896, vol. V, fasc. 9°) dimostra, per mezzo della dispersione elettrica e della fotografia, che i raggi X agiscono anche nella loro ombra prodotta da

un disco opaco, o come egli si esprime « che i raggi X non giungono al corpo elettrizzato tutti in linea retta dalla sorgente ». Osserva, inoltre, che quando gl' X passano per un *diaframma forato*, che opera come un cortissimo tubo, perdono assai della loro efficacia nel disperdere l' elettricità dei corpi elettrizzati. Ora io faccio notare, che l'azione dei raggi dietro i dischi opachi, e l' influenza dei tubi, di scemare l' efficacia delle radiazioni, fu già prima scoperta e studiata da me, sia con la dispersione elettrica, sia ancora con la fotografia. E di coteste mie ricerche lessi due Note preventive nelle sedute del 15 febbraio e 14 marzo scorso, alla R. Accademia di Napoli [1]. Oggi poi ho presentato all' Accademia dei Lincei una più minuta descrizione delle esperienze eseguite in proposito insieme a due fotografie; ed una nuova Nota presentai ancora il 9 maggio all' Accademia di Napoli sul medesimo soggetto.

Fisica. — *Osservazioni sulla precedente comunicazione.* Nota del Corrispondente A. Righi.

Avendomi l'illustre prof. Villari fatto conoscere in tempo il testo della precedente comunicazione [2], sono lieto di potere ad essa aggiungere questa mia.

Quando mandai alla R. Accademia dei Lincei la mia Nota intitolata *Nuovi studî* ecc., il lavoro del prof. Villari non era giunto a mia cognizione; ma riconosco ora che il significato delle sue e delle mie esperienze è perfettamente il medesimo. Anzi, in certo modo, le nostre esperienze si completano a vicenda. Però, per le date che hanno le nostre pubblicazioni, rimane accertato che *prima di me* il prof. Villari fece conoscere dei fatti, che suggeriscono l' ipotesi di una diffusione dei raggi X, operata dall' aria, quasi fosse un mezzo leggermente torbido, ipotesi che nella mia Nota [3] ho esposto colle debite riserve.

È dunque colla più viva compiacenza, che constato questo accordo raggiunto sul campo dei fatti, partendo da vie alquanto diverse, e che riconosco quanta priorità al prof. Villari spetta indiscutibilmente.

Fisica. — *Sul trasporto dell' elettricità secondo le linee di forza, prodotto dai raggi di Röntgen.* Nota del Corrispondente Augusto Righi.

In molte Memorie e Note, da me pubblicate dal 1880 in poi, ho dimostrato che la propagazione della elettricità nei gas è un fenomeno di convezione o di trasporto, operato da particelle materiali, le quali, almeno

(1) Rend. R. Acc. di sc. fisiche e matematiche di Napoli, fog. 2° e 4° di febbraio ed aprile 1896.

(2) *Sul meccanismo* ecc. in questi Rendiconti.

(3) *Nuovi studî sulla dispersione elettrica* ecc. Rend. della R. Acc. dei Lincei, 3 maggio, 1896.

quando il gas non sia alquanto rarefatto, seguono sensibilmente nel loro moto le linee di forza [1]. Queste particelle materiali potrebbero essere (lasciando a parte le ipotesi meno verosimili) secondo alcuni particelle staccate dai conduttori elettrizzati, e secondo altri le melecole stesse del gas.

Fra le molte mie esperienze, alcune sembrano additare come più attendibile quest' ultima ipotesi, alla quale in più occasioni ho mostrato quindi di dare la preferenza, pur non escludendo che in certi casi anche delle particelle staccate dai conduttori possano avere una parte nei fenomeni. Ma oggi mi preme far notare, come già feci altra volta, che nulla si oppone a che si adotti, estendendola opportunamente, la teoria elettrolitica delle scariche nei gas; ed in tal caso le particelle elettrizzate trasportanti l' elettricità sarebbero i ioni liberi.

Quelle mie ricerche sul meccanismo della convezione elettrica nei gas comprendono, si può dire, ogni caso di propagazione dell' elettricità nei corpi aeriformi, p. es. dispersione dell' elettricità dalle punte, dispersione provocata dai raggi ultravioletti, dispersione dai metalli roventi elettrizzati.

Era dunque naturale che considerassi senz' altro nello stesso modo anche quella propagazione dell' elettricità nei gas, che ha luogo allorchè essi sono attraversati dai raggi X, ed è perciò che nelle varie Note pubblicate su tale argomento, e quando l' occasione se ne presentava, mi son permesso di descrivere le mie esperienze o di renderne conto, come se quel trasporto dell' elettricità secondo le linee di forza fosse cosa dimostrata [2].

Che la dispersione provocata dai raggi X avvenga sotto forma di convezione operata dalle molecole gassose, è stato ammesso anche dal Villari, col quale sono lieto di trovarmi così in consonanza di vedute [3].

Se dopo ciò ulteriori prove in proposito possono apparire superflue, credo tuttavia che il far vedere come, anche per la dispersione provocata dai raggi X, le particelle materiali percorrono un sistema di traiettorie, generalmente curve, che coincidono sensibilmente colle linee di forza, aggiunga al concetto, da me da tempo sostenuto, maggior valore.

È perciò che descrivo qui succintamente due delle esperienze fatte in

[1] Non citerò tutte quelle pubblicazioni onde non ingombrare soverchiamente questa Nota, ma mi limiterò a indicare i titoli delle principali. *Sulle ombre elettriche*; *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*; *Sulle traiettorie percorse nella convezione fotoelettrica*; *Sulla distribuzione del potenziale nell'aria rarefatta percorsa da corrente elettrica* etc. Queste e le altre Memorie furono pubblicate, o nelle Mem. della R. Accad. di Bologna, o nei Rend. della R. Accad. dei Lincei, nel giornale: Il Nuovo Cimento; e tradotte o riassunte nei giornali di Fisica stranieri.

[2] Si vegga, per esempio, la 2ª delle Note presentate il 1° marzo alla R. Acc. dei Lincei.

[3] Vedi Rend. della R. Accad. di Napoli, aprile 1896, e questi Rend. 6 giugno 1896.

proposito, rimandando alla Memoria completa relativa a tutte le mie ricerche sui raggi di Röntgen il lettore che desideri informazioni dettagliate (1).

Come si vedrà, le esperienze che sto per descrivere sono simili ad alcune di quelle che feci altra volta per gli altri casi di propagazione dell'elettricità nei gas, e solo sono state adattate alle condizioni speciali imposte dall'uso dei raggi X.

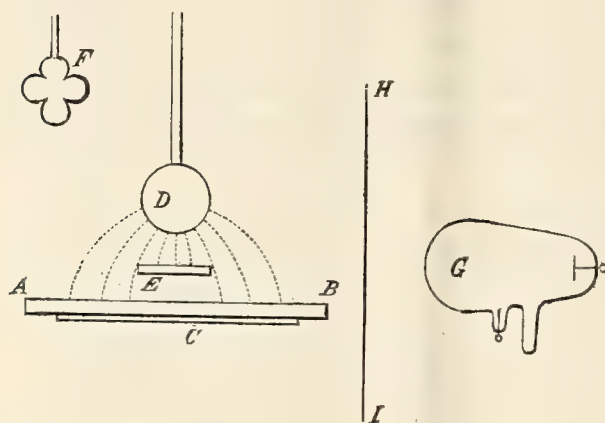



Fig. 1.

1a esperienza. Una lastra d'ebanite orizzontale AB (fig. 1), avente sulla faccia inferiore un'armatura metallica C e che un momento prima dell'esperienza è stata tenuta sopra una fiamma onde asciugarla e scaricarla, è posta al disotto di una sfera conduttrice isolata D. In mezzo è collocata una croce di ebanite E, rappresentata a parte in F. Lateralmente è posto il tubo G produttore dei raggi X, mentre una grande lastra verticale d'alluminio H I è posta fra esso e gli altri apparecchi.

I conduttori C e D vengono messi in comunicazione coi poli d'una piccola macchina elettrica ad influenza, mossa così lentamente che non giungano a formarsi mai, o si formino assai di rado, scintille di 5 o 6 millimetri fra i suoi elettrodi (dato che la distanza fra C e D sia di 6 o 7 centimetri). Dopo tre o quattro minuti d'azione simultanea della piccola macchina e del tubo G, si toglie di posto la lastra AB, e si proietta su di essa il miscuglio di minio e solfo. Subito appare l'ombra elettrica della croce (fig. 2), nella quale, se per esempio D ebbe la carica +, vedesi l'ombra O in rosso, ed il fondo FF in giallo (2).

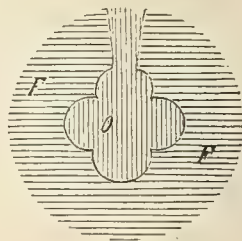



Fig. 2.

Come nel caso dell'usuale ombra elettrica (per ottenere la quale bisogna collocare al posto della sfera D una punta acuta), la forma e la posizione dell'ombra sono quali si prevedono, ammettendo che l'ombra sia dovuta all'impedimento meccanico opposto dalla croce al moto, secondo le linee di

(1) La Memoria che ha per titolo: *Sulla propagazione dell'elettricità nei gas attraversati dai raggi di Röntgen* è stata letta il 31 maggio alla R. Acc. di Bologna, ma non potrà essere stampata che entro non breve scadenza.

(2) Spesso l'ombra che si forma è un'*ombra composta*. Per la descrizione e la spiegazione delle *ombre composte* veggasi la mia seconda Memoria sulle ombre elettriche.

forza, delle particelle elettrizzate che trasportano sull' ebanite la carica della sfera.

Non è necessario che i raggi X cadano sulla superficie della sfera D (fig. 1), nè che questa abbia la superficie ben netta, come invece occorrerebbe se in luogo dei raggi X si volessero adoperare raggi ultravioletti.

Che poi l' effetto debbasi veramente all' azione dei raggi X risulta: 1° dal fatto che non si ottiene alcuna ombra sull' ebanite se si ripete l' esperienza mentre il tubo G resta inattivo; 2° dal fatto che, se fra G ed HI si colloca un diaframma di piombo che arresti una porzione del fascio di raggi X, la parte corrispondente dell' ombra risulta debole o mancante.

2ª esperienza. Tutte le volte che ho voluto far misure, per riconoscere se realmente le traiettorie percorse dalle particelle elettrizzate coincidono colle linee di forza, ho ricorso a certi sistemi cilindrici di conduttori, pei quali le linee di forza hanno forma semplice e nota. Così ho fatto nella seguente esperienza.

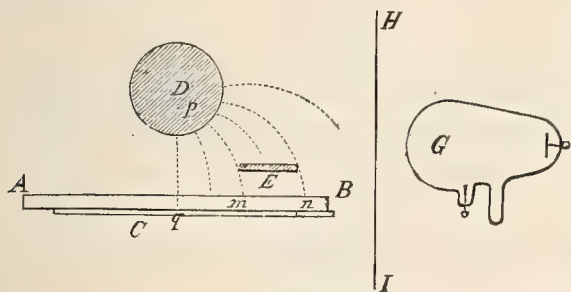



Fig. 3.

AB (fig. 3) è la lastra d' ebanite, C la sua armatura, D un lungo cilindro metallico parallelo ad AB, ed E una riga d' ebanite, anch' essa parallela al cilindro ed alla lastra.

Procedendo come nel caso dell' esperienza precedente si ottiene in *mn* un'ombra di E, limitata da rette parallele al cilindro. La posizione occupata da queste rette coincide sensibilmente con quella che si prevede conducendo, come nella figura, le linee di forza che passano pel contorno di E.

Dicendo x la distanza pq fra la superficie metallica piana ed il punto p pel quale passano i prolungamenti di tutte le linee di forza, d la distanza dell'asse del cilindro dal medesimo piano, ed R il raggio del cilindro, si ha, per trovare la posizione del punto p, $x = \sqrt{d^2 - R^2}$. Le linee di forza, segnate sulla figura, sono archi di cerchio aventi il centro su C e passanti per p.

Posso dunque concludere, che il meccanismo della dispersione provocata dai raggi X, è quello stesso con cui si compie anche negli altri casi la propagazione della elettricità nei gas, e cioè una convezione secondo le linee di forza.

È poi verosimile che, anche nel caso dei raggi X, quando il gas viene di più in più rarefatto, le traiettorie delle particelle elettrizzate si modifichino gradatamente, come appunto accade nei casi analoghi sopra ricordati.

Chimica. — *Azione della dimetilammina sugli eteri dietilici degli acidi fumarico e maleico.* Nota del Socio Körner e del prof. A. Menozzi.

Alcuni anni fa abbiamo comunicato (¹) i resultati di ricerche eseguite col sottoporre gli eteri dietilici degli acidi maleïco e fumarico all' azione della metilammina, colle quali arrivammo ad ottenere la dimetilammide dell' acido metil-aspartico, l' etere dietilico del medesimo acido, l' acido metil-aspartico libero e inoltre l' acido metilammino-metilsuccinammico (di metil-asparagina).

In continuazione di questi studi abbiamo trattato gli eteri sopranominati colla dimetilammina per indagare se la reazione da noi trovata per l' ammoniaca e per ammine primarie avvenga in modo analogo anche per basi secondarie. Abbiamo l' onore di comunicare all' Accademia, i risultati avuti coll' impiego della dimetilammina, i quali dimostrano che effettivamente anche questa base si somma agli elementi del fumarato e del maleinato dietilico, eliminandosi la doppia legatura, dando prodotti nuovi di sostituzione dell' acido succinico, dell' acido aspartico e dell' asparagina.

Etere fumarico e dimetilammina.

L' etere fumarico (gr. 15) venne scaldato con soluzione alcoolica di dimetilammina al 30 °/₀ (gr. 45), in tubi chiusi per tre giorni alla temperatura di 105° - 110°. Il contenuto dei tubi fu sottoposto alla distillazione a b. m., ed il residuo messo nel vuoto su acido solforico. Dopo alcune settimane comparvero dei cristalli mammellari, duri, mentre il liquido presentò consistenza oleosa. Si aggiunse dell' etere anidro il quale si scioglie nella parte liquida, mentre lascia depositare una piccola quantità di una sostanza sciropposa, che dopo qualche tempo si solidifica. La soluzione eterea a fianco a poco fumarato dietilico, sfuggito alla reazione, contiene dimetilammino-succinato dietilico; il prodotto solido si dimostrò essere una tetra metil-asparagina.

Tetrametilasparagina

Il predetto prodotto solido, dopo essere stato ripetutamente lavato con etere anidro e essiccato nel vuoto, si purificò ricristallizzandolo più volte da alcool assoluto nel quale è molto solubile. Per raffreddamento della soluzione cristallizza in lunghi aghi bianchi, talmente deliquescenti da essere assai difficile raccoglierli perfettamente secchi. Dalla soluzione alcoolica la sostanza precipita in gran parte dietro aggiunta di etere. Il prodotto fonde a 104° circa.

(¹) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Cl. sc. fisiche ecc., vol. V, 1 sem. fasc. 2°, 1889.

Il prodotto ci diede all'analisi i seguenti risultati:

I. gr. 0,2642 di sostanza fornirono c. c. 36 di azoto a 25° e sotto 754 mm. di pressione.
II. gr. 0,289 di sostanza diedero c. c. 37,8 di azoto a 16° e sotto 755,5 mm. di pressione.
III. gr. 0,2001 di sostanza fornirono gr. 0,3717 di CO_2 e gr. 0,1562 di acqua.

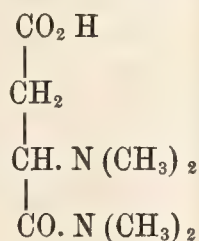
	I.	II.	III.
Azoto . . .	15,07	15,12	—
Carbonio . .	— . . .	— . . .	50,66
Idrogeno . .	— . . .	— . . .	8,67

Questi risultati conducono alla formula $C_8 H_{16} N_2 O_3$ la quale richiede:

Azoto	14,90
Carbonio	51,06
Idrogeno	8,51 p. c.

Scaldando la sostanza con idrato di bario, svolge dimetilammina e dà il sale di bario dell'acido dimetilaspartico (dimetilammino succinico), e per parziale scomposizione di quest'ultimo fornisce contemporaneamente fumarato baritico.

La costituzione della sostanza è conseguentemente espressa dalla formula:

$$\begin{array}{l} CO_2H \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH.N(CH_3)_2 \\ | \\ CO.N(CH_3)_2 \end{array}$$

Dimetilamminosuccinato dietilico.

Per separare questo prodotto dal poco fumarato dietilico, rimasto inalterato, si agita la soluzione in etere a più riprese con leggiero eccesso di acido solforico diluito, avendo cura di mantenere la temperatura sempre vicino a 0°. La soluzione solforica si estrae con etere; indi si soprasatura con potassa acquosa, aggiungendo questa poco per volta per impedire ogni riscaldamento. In tal modo il liquido si intorbida e lascia separare una sostanza oleosa la quale si ottiene pura, estraendo con etere, eliminando questo per distillazione e ponendo il residuo nel vuoto sopra acido solforico.

Il prodotto così risultante si presenta sotto forma di un liquido molto rifrangente di leggerissimo odore, basico e etereo nello stesso tempo; è pochissimo solubile nell'acqua; si scioglie invece con la massima facilità con

gli acidi diluiti, formando con essi dei sali da cui può essere ripristinato allo stato inalterato mediante liscivie diluite, purchè si eviti sempre ogni riscaldamento. L'olio a temperatura ordinaria è un poco più pesante dell'acqua. Facendo uguale ad 1 il peso specifico dell'acqua a 0° quello dell'olio è risultato:

a 0° . . . 1,0418
a 15° . . . 1,0306
a 50° . . . 0,9702

In una determinazione di azoto si ebbero da grammi 0,5430 di sostanza c.c. 32,5 di azoto a 28°, e sotto 756,7 m.m. di pressione, ciò che corrisponde a gr. 0,0355 di azoto, da cui si calcola: azoto per cento 6,54.

Questo contenuto in azoto ed i prodotti di trasformazione dimostrano che la sostanza altro non è che l'etere dietilico dell'acido di metilaspartico (dimetilamminosuccinico) della formula $C_{10} H_{19} NO_4$ per la quale si calcola: azoto per cento 6,45.

Acido dimetilaspartico (*dimetilammino-succinico*).

L'etere descritto agitato in tubo chiuso colla quantità equivalente di acqua di barite, poco a poco si scioglie e la soluzione deposita cristalli aghiformi piccolissimi che costituiscono il sale baritico dell'acido corrispondente. Questo si ottiene precipitando il bario colla quantità richiesta di acido solforico diluito. Tuttavia occorre impiegare di questo un leggerissimo eccesso, che in seguito si elimina dalla soluzione filtrata, perchè altrimenti il solfato di bario non si deposita ed il liquido non si può filtrare. La soluzione viene concentrata a temperatura piuttosto bassa, e deposita indi dei grandi cristalli incolori, trasparenti, prismatici, poco solubili nell'acqua fredda, facilmente solubili negli acidi diluiti e negli alcali. La soluzione acquosa ha reazione acida e depone l'acido allo stato anidro. L'acido fonde a 185°.

L'analisi ha dato questi risultati:

gr. 0,2401 di sostanza diedero c. c. 17,3 di azoto a 10° c. e sotto 756 mm. di pressione;
gr. 0,2043 di sostanza diedero gr. 0,3341 di anidride carbonica e gr. 0,1284 di acqua.

Da cui si calcola:

	Trovato	Calcolato per $C_6 H_{11} NO_4$
Azoto %	8,58	8,69
Carbonio »	44,60	44,72
Idrogeno »	6,98	6,83

Il prof. Artini ha voluto fare lo studio cristallografico dell'acido descritto e ci ha comunicato i seguenti dati:

Sistema monoclino:

$$a : b : c = 1.2141 : 1 : 0.6340$$
$$\beta = 78^{\circ}.19'$$

Forme osservate:

$$\{100\}, \{001\}, \{110\}, \{\bar{2}01\}, \{011\}, \{\bar{2}11\}.$$
$$(100).(101) = 78^{\circ}.19'$$
$$(100).(110) = 49^{\circ}.56'$$
$$(001).(011) = 31^{\circ}.50'$$

Cristalli limpidi, incolori, prismatici allungati secondo [001].

Sfaldatura facile e perfetta secondo $\{\bar{2}01\}$. Piano degli assi ottici $\{010\}$.

I sali di sodio e di potassio, come pure quelli di bario e di calcio, contenenti un atomo di idrogeno sostituito dalla quantità equivalente di metallo, sono straordinariamente solubili nell' acqua e soltanto quando la soluzione ha acquistato la consistenza di spesso sciroppo si formano cristalli che non si possono separare dalle acque madri dense. Questi sali sono deliquescenti. Mescolando la soluzione del sale monosodico o monopotassico con soluzione di solfato ramico si ottiene un liquido intensamente colorato in azzurro cupo, il quale dopo molto tempo lascia depositare un precipitato cristallino del sale ramico che possiede colore azzurro-chiaro e si presenta, osservato al microscopio, costituito di piccole tavolette allungate.

L' etere maleico sottoposto agli stessi trattamenti descritti per quello fumarico ha dato prodotti per tutte le proprietà studiate identici a quelli or ora descritti. Solamente abbiamo osservato che la dimetilammina si somma più prontamente all' etere maleico che non al fumarico.

Se si scioglie l' etere dimetilammino-succinico (ottenuto dall' etere maleico) in un eccesso di acido solforico e si fa bollire la soluzione, questa s' intorbida e dopo qualche tempo si divide in due strati di cui il più rifrangente è costituito da fumarato dietilico chimicamente puro. Questo esperimento abbiamo ripetuto più volte sempre col medesimo risultato; il quale dimostra per conseguenza che col mezzo della indicata reazione l' etere maleico si trasforma quantitativamente nel fumarico; ciò che risulta da tutte le proprietà fisiche della sostanza nonchè dal prodotto di sua saponificazione con acqua di barite.

Questa trasformazione è in armonia con un altro fatto da noi osservato e finora non pubblicato, e cioè che gli acidi non saturi che risultano a fianco di trimetilammina dalla scomposizione degli ammino-acidi trimelati costituiscono sempre la forma fumaroide e non mai la maleica.

Meccanica. — *Sulla integrazione delle equazioni della elasticità.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

1. Nella mia Nota, presentata lo scorso maggio a codesta Accademia, col titolo *Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens*, ho dedotto la notissima formola di Kirchhoff che rappresenta nel modo più completo e più rigoroso il principio di Huyghens, servendomi di un metodo di integrazione di cui l'idea fondamentale è dovuta al prof. Volterra.

Mi propongo ora di mostrare che gli stessi concetti possono applicarsi con vantaggio anche alle equazioni della elasticità.

2. Ricordiamo perciò che le equazioni del movimento vibratorio di un corpo elastico, omogeneo ed isotropo, di cui soltanto ci occupiamo, possono scriversi:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2\dfrac{\partial\theta}{\partial x} - 2a^2\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial z} - \dfrac{\partial\varrho}{\partial y}\right) - X = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b^2\dfrac{\partial\theta}{\partial y} - 2a^2\left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial x} - \dfrac{\partial\varpi}{\partial z}\right) - Y = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2\dfrac{\partial\theta}{\partial z} - 2a^2\left(\dfrac{\partial\varpi}{\partial y} - \dfrac{\partial\chi}{\partial x}\right) - Z = 0 \end{cases}$$

dove:

$$(2)\qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \varpi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \;,\; \chi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \;,\; \varrho = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Ora se indichiamo con S_4 una porzione di uno spazio lineare a quattro dimensioni in cui x, y, z, t rappresentano le coordinate di un punto variabile, limitata da una varietà Σ a tre dimensioni, soggetta alla condizione di avere in ogni punto un iperpiano tangente determinato e variabile con continuità da punto a punto, almeno generalmente; se indichiamo con u', v', w' un sistema di tre funzioni regolari in S_4, come u, v, w, e distinguiamo con un accento le quantità che dipendono da u', v', w' e se, finalmente, indichiamo con n la direzione della normale a Σ diretta verso l'interno di S_4,

col solito metodo di integrazione per parti, troveremmo la formola seguente:

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
&\int_{S_4}(Xu'+Yv'+Zw')dS_4+\int_{\Sigma}\Big\{\Big[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\Big(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\Big)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]u'\\
&\qquad+\Big[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\Big(\varrho\frac{dx}{dn}-\frac{dz}{dn}\varpi\Big)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]v'\\
&\qquad+\Big[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\Big(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\Big)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]w'\Big\}d\Sigma\\
&-\int_{S_4}(X'u+Y'v+Z'w)dS_4-\int_{\Sigma}\Big\{\Big[-b^2\theta'\frac{dx}{dn}-2a^2\Big(\chi'\frac{dz}{dn}-\varrho'\frac{dy}{dn}\Big)+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]u\\
&\qquad+\Big[-b^2\theta'\frac{dy}{dn}-2a^2\Big(\varrho'\frac{dx}{dn}-\varpi'\frac{dz}{dn}\Big)+\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]v\\
&\qquad+\Big[-b^2\theta'\frac{dz}{dn}-2a^2\Big(\varpi'\frac{dy}{dn}-\chi'\frac{dx}{dn}\Big)+\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]w\Big\}d\Sigma=0.
\end{aligned}\right.
$$

3. Prenderemo dapprima per S_4 lo spazio $S'_{4,b}$ limitato dalla varietà conica C

$$
(4)\quad \frac{b(t_1-t)}{r}-1=0\quad,\quad r=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}\,,
$$

dove x_1, y_1, z_1, t_1 rappresentano le coordinate di un punto arbitrario dello spazio lineare (x, y, z, t), dalla varietà cilindrica c

$$
(5)\qquad r=\varepsilon
$$

e dalla porzione Σ'_b di una varietà Σ a tre dimensioni, soggetta ancora alla condizione di essere incontrata in un solo punto da ogni parallela all'asse t. Supporremo inoltre che in $S'_{4,b}$ sia sempre $t_1>t$ e chiameremo Σ''_b, Σ''_b le porzioni di C e c che insieme a Σ'_b limitano completamente $S'_{4,b}$. Facciamo poi:

$$
(6)\; u'=\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\Big],\; v'=\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\Big],\; w'=\frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{b^2(t_1-t)^2}{r}+r\Big]
$$

ed osserviamo che si ha corrispondentemente:

$$
(7)\qquad \theta'=\frac{2}{r}\;;\;\varpi'=\chi'=\varrho'=0\;;\;X'=Y'=Z'=0\,.
$$

La (3) ci darà quindi:

$$(8)\begin{cases}\displaystyle\int_{S'_{4,b}}(Xu'+Yv'+Zw')dS'_{4,b}+\int_{\Sigma'_b+\Sigma''_b+\Sigma'''_b}\Big\{\Big[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\Big(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\Big)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]u' \\ \qquad +\Big[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\Big(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\Big)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]v' \\ \qquad +\Big[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\Big(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\Big)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]w'\Big\}d\Sigma_b \\ \displaystyle -\int_{\Sigma'_b+\Sigma''_b+\Sigma'''_b}\Big\{\Big[-\frac{2b^2}{r}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]u+\Big[-\frac{2b^2}{r}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]v+ \\ \qquad +\Big[-\frac{2b^2}{r}\frac{dz}{dn}+\frac{\partial w'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\Big]w\Big\}d\Sigma_b=0\,. \end{cases}$$

Poichè ora è:

$$u'=\Big[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\Big]\frac{dx}{dr}\,,\ v'=\Big[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\Big]\frac{dy}{dr}\,,\ w'=\Big[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\Big]\frac{dz}{dr}\,,$$

mentre su Σ''_b è $\frac{d}{dn}=\frac{d}{dr}\cdot\frac{dr}{dn}$, si avrà su Σ''_b:

$$-\frac{2b^2}{r}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}=-\frac{2b^2}{r}\frac{dx}{dr}\Big[\frac{dr}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dt}{dn}\Big],\ldots$$

per cui, ricordando che è pure su Σ''_b:

$$\frac{dr}{dn}=-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\,,\ \frac{dt}{dn}=-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\,,$$

si deduce che l'insieme degli integrali, estesi a Σ''_b, che compaiono in (8) si riduce identicamente a zero.

Su Σ'''_b è invece $\frac{dt}{dn}=0$, $\frac{d}{dn}=\frac{d}{dr}$ per cui, su Σ'''_b, è identicamente

$$\Big(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\Big)u'+\Big(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\Big)v'+\Big(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\Big)w'=0$$

e se facciamo diminuire ε indefinitamente sarà:

$$\lim_{\varepsilon=0} 2b^2 \int_{\Sigma_b'''} \frac{1}{r}\left(u\frac{dx}{dn} + v\frac{dy}{dn} + w\frac{dz}{dn}\right) d\Sigma_b''' = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0}(-b^2)\int_{\Sigma_b'''}\theta\left(u'\frac{dx}{dn} + v'\frac{dy}{dn} + w'\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_b''' = \lim_{\varepsilon=0}(-b^2)\int_{\Sigma_b'''}\theta\left[1 - \frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]d\Sigma_b'''$$

$$= \omega b^4 \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)^2\,\theta(x_1, y_1, z_1, t)\,dt,$$

dove ω è eguale a 4π se la parallela all' asse t condotta pel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) incontra Σ senza toccarla, è eguale a zero se non l' incontra e rappresenta una parte determinata di 4π se la nominata parallela è tangente a Σ, e t_0 indica il valore di t che corrisponde alla intersezione di Σ con la stessa parallela.

Indicando, quindi, con $S_{4,b}$ e Σ_b ciò che diventano, per $\varepsilon = 0$, $S'_{4,b}$ e Σ'_b la (8) diventerà

$$(9)\left\{\begin{aligned}
&\omega b^4\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)^2\theta(x_1,y_1,z_1,t)dt = -\int_{S_{4,b}}\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\left(X\frac{dx}{dr}+Y\frac{dy}{dr}+Z\frac{dz}{dr}\right)dS_{4,b}\\
&\quad-\int_{\Sigma_b}\left[1-\frac{b^2(t_1-t)^2}{r^2}\right]\left\{\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dx}{dr}\right.\\
&+\left[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\left(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\right)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dy}{dr}+\left.\left[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\left(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\right)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dz}{dr}\right\}d\Sigma_b\\
&-2b^2\int_{\Sigma_b}\left\{\left[\frac{dx}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dx}{dr}\frac{dt}{dn}\right]u+\left[\frac{dy}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dy}{dr}\frac{dt}{dn}\right]v+\left[\frac{dz}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dz}{dr}\frac{dt}{dn}\right]w\right\}\frac{d\Sigma_b}{r}.
\end{aligned}\right.$$

Derivando questa equazione una volta rispetto a t_1 e dividendo per $2b^2$, si trova

$$(10)\left\{\begin{aligned}
&\omega b^2\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\theta(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = \int_{S_{4,b}}\frac{t_1-t}{r^2}\left(X\frac{dx}{dr}+Y\frac{dy}{dr}+Z\frac{dz}{dr}\right)dS_{4,b}\\
&\quad+\int_{\Sigma_b}\frac{t_1-t}{r^2}\left\{\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dx}{dr}\right.\\
&+\left[-b^2\theta\frac{dy}{dn}-2a^2\left(\varrho\frac{dx}{dn}-\varpi\frac{dz}{dn}\right)+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dy}{dr}+\left.\left[-b^2\theta\frac{dz}{dn}-2a^2\left(\varpi\frac{dy}{dn}-\chi\frac{dx}{dn}\right)+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]\frac{dz}{dr}\right\}d\Sigma_b\\
&-\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\Sigma_b}\left\{\left[\frac{dx}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dx}{dr}\frac{dt}{dn}\right]u+\left[\frac{dy}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dy}{dr}\frac{dt}{dn}\right]v+\left[\frac{dz}{dn}-\frac{t_1-t}{r}\frac{dz}{dr}\frac{dt}{dn}\right]w\right\}\frac{d\Sigma_b}{r}.
\end{aligned}\right.$$

4. Per trovare delle formole analoghe alla precedente per ϖ, χ, ϱ prendiamo per S_4 lo spazio $S'_{4,a}$ limitato dalla varietà conica C'

$$\frac{a(t_1-t)}{r}-1=0, \tag{11}$$

dalla varietà cilindrica c e dalla parte Σ'_a della stessa varietà Σ di prima e chiamiamo Σ''_a, Σ'''_a le parti di C' e di c che, insieme a Σ'_a, determinano il contorno completo di $S'_{4,a}$. Per u', v', w' prendiamo invece:

$$u'=\frac{a(t_1-t)}{r}-1\ ,\quad v'=0\ ,\quad w'=0 \tag{12}$$

a cui corrispondono i valori seguenti di θ'; ϖ', χ', ϱ'; X', Y', Z':

$$\left\{\begin{aligned} &\theta'=\frac{\partial u'}{\partial x}\ ,\quad \varpi'=0\ ,\quad \chi'=\frac{1}{2}\frac{\partial u'}{\partial z}\ ,\quad \varrho'=-\frac{1}{2}\frac{\partial u'}{\partial y}\\ &X'=-(b^2-a^2)\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\ ,\ Y'=-(b^2-a^2)\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial y}\ ,\ Z'=-(b^2-a^2)\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial z}\ .\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Si ha ora:

$$\int_{S'_{4,a}}(X'u+Y'v+Z'w)dS'_{4,a}=(b^2-a^2)\int_{S'_{4,a}}\theta\frac{\partial u'}{\partial x}dS'_{4,a}+(b^2-a^2)\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\frac{\partial u'}{\partial x}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a\,,$$

$$\int\left\{\left[-b^2\theta'\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi'\frac{dz}{dn}-\varrho'\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]u+\cdots\right\}d\Sigma_a$$

$$=-b^2\int\frac{\partial u'}{\partial x}\left(u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}+w\frac{dz}{dn}\right)d\Sigma_a+a^2\int\frac{dx}{dn}\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}+v\frac{\partial u'}{\partial y}+w\frac{\partial u'}{\partial z}\right)d\Sigma_a$$

$$-\int u\left[a^2\frac{du'}{dn}-\frac{du'}{dt}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a\,,$$

per cui la formola (3) diventa

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{S'_{4,a}}u'X\,dS'_{4,a}+\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}u'\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a\\ &\quad+a^2\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}\left[v\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{dx}{dn}\right)+w\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{dx}{du}\right)\right]d\Sigma_a\\ &\quad+\int_{\Sigma'_a+\Sigma''_a+\Sigma'''_a}u\left[a^2\frac{du'}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a-(b^2-a^2)\int_{S'_{4,a}}\theta\frac{\partial u'}{\partial x}dS'_{4,a}=0\,.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Su Σ''_a e su Σ'''_a è:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{dx}{dn}=0\,,\quad \frac{\partial u'}{\partial x}\frac{dz}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{dx}{dn}=0\,.$$

Osservando inoltre che su Σ''_a è: $u'=0$, $a^2\frac{du'}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}=0$, risulta che l'insieme degli integrali estesi a Σ''_a che compaiono in (14) è identicamente nullo; mentre, osservando che su Σ'''_a è $\frac{dt}{dn}=0$, $\frac{d}{dn}=\frac{d}{dr}$ e che quindi:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'''_a} u'\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma'''_a=0$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Sigma'''_a} u\left[a^2\frac{du'}{dn}-\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma'''_a=-\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\,,$$

si trova che, per $\varepsilon=0$, l'insieme degli integrali estesi a Σ'''_a si riduce appunto a

$$-\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1,y_1,z_1,t)\,dt.$$

Perciò se indichiamo con $S_{4,a}$, Σ_a ciò che diventano $S'_{4,a}$ e Σ'_a, per $\varepsilon=0$, la (14), per $\varepsilon=0$ diventerà

$$(15)\left\{\begin{aligned}&\omega a^3\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\\&=\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)X\,dS_{4,a}+\int_{\Sigma_a}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\left[-b^2\theta\frac{dx}{dn}-2a^2\left(\chi\frac{dz}{dn}-\varrho\frac{dy}{dn}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a\\&\quad-a^3\int_{\Sigma_a}\frac{t_1-t}{r^2}\left[v\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dn}-\frac{dy}{dr}\frac{dx}{dn}\right)+w\left(\frac{dx}{dr}\frac{dz}{dn}-\frac{dz}{dr}\frac{dx}{dn}\right)\right]d\Sigma_a\\&\quad-a\int_{\Sigma_a}\frac{u}{r}\left[a^2\frac{t_1-t}{r}\frac{dr}{dn}-\frac{dt}{dn}\right]d\Sigma_a+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta\,dS_{4,a}.\end{aligned}\right.$$

Si otterranno altre due formole analoghe a questa cambiando ciclicamente u, v, w; x, y, z; ϖ, χ, ϱ e X, Y, Z e, se indichiamo il secondo membro della (15), a meno dell'ultimo termine, con $\omega a U$ e con $\omega a V$, $\omega a W$ indi-

chiamo le espressioni analoghe che si ottengono con la permutazione indicata, la (15) e le altre due analoghe possono scriversi:

$$(16)\begin{cases} a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u\,(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = \mathrm{U} + \frac{b^2-a^2}{\omega a}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathrm{S}_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d\mathrm{S}_{4,a} \\ a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,v\,(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = \mathrm{V} + \frac{b^2-a^2}{\omega a}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\mathrm{S}_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d\mathrm{S}_{4,a} \\ a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t}(t_1-t)\,w\,(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = \mathrm{W} + \frac{b^2-a^2}{\omega a}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\mathrm{S}_{4,a}}\left(a\frac{t_1-t}{r}-1\right)\theta d\mathrm{S}_{4,a} \end{cases}$$

Notiamo la formola

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,u(x_1,y_1,z_1,t)dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial x_1}dt - (t_1-t_0)\,u_0\frac{dt_0}{dx_1}$$

e le altre che si ottengono cambiando x_1 in y_1 ed in z_1 e u in v ed in w, dove $u_0 = u\,(x_1, y_1, z_1, t_0), \ldots$ e le derivate $\frac{dt_0}{dx_1}, \frac{dt_0}{dy_1}, \frac{dt_0}{dz_1}$ sono da ricavarsi dall'equazione $f(x, y, z, t) = 0$ di Σ.

Tenendo conto delle equazioni precedenti si ricavano allora, facilmente, dalle (16) le equazioni:

$$(17)\begin{cases} 2a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\varpi\,(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = (t_1-t_0)\left[w_0\frac{dt_0}{dy_1} - v_0\frac{dt_0}{dz_1}\right] + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_1} \\ 2a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\chi\,(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = (t_1-t_0)\left[u_0\frac{dt_0}{dz_1} - w_0\frac{dt_0}{dx_1}\right] + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_1} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_1} \\ 2a^2\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\varrho\,(x_1,y_1,z_1,t)\,dt = (t_1-t_0)\left[v_0\frac{dt_0}{dx_1} - u_0\frac{dt_0}{dy_1}\right] + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_1}. \end{cases}$$

5. Indichiamo con ωT il secondo membro della (10) e con P, Q, R i secondi membri delle (17). Tenendo presenti le equazioni (1), la (10) e le (17) ci permettono allora di scrivere

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t^2}dt = (t_1-t_0)\left[b^2\theta_0\frac{dt_0}{dx_1} + 2a^2\left(\chi_0\frac{dt_0}{dz_1} - \varrho_0\frac{dt_0}{dy_1}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z_1} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_1} + \int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\mathrm{X}\,(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\,.$$

Da questa formola e dalle analoghe in v e w, notando che:

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,\frac{\partial^2 u(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t^2}\,dt = u(x_1,y_1,z_1,t_1)-u_0-(t_1-t_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0,\ldots$$

si deducono le altre:

$$(18)\left\{\begin{aligned}
u(x_1,y_1,z_1,t_1) &= u_0+(t_1-t_0)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0+b^2\theta_0\frac{dt_0}{dx_1}+2a^2\left(\chi_0\frac{dt_0}{dz_1}-\varrho_0\frac{dt_0}{dy_1}\right)\right]\\
&\quad+\frac{\partial T}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial z_1}-\frac{\partial R}{\partial y_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,X(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\\
v(x_1,y_1,z_1,t_1) &= v_0+(t_1-t_0)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0+b^2\theta_0\frac{dt_0}{dy_1}+2a^2\left(\varrho_0\frac{dt_0}{dx_1}-\varpi_0\frac{dt_0}{dz_1}\right)\right]\\
&\quad+\frac{\partial T}{\partial y_1}+\frac{\partial R}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial z_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,Y(x_1,y_1,z_1,t)\,dt\\
w(x_1,y_1,z_1,t_1) &= w_0+(t_1-t_0)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0+b^2\theta_0\frac{dt_0}{dz_1}+2a^2\left(\varpi_0\frac{dt_0}{dy_1}-\chi_0\frac{dt_0}{dx_1}\right)\right]\\
&\quad+\frac{\partial T}{\partial z_1}+\frac{\partial P}{\partial y_1}-\frac{\partial Q}{\partial x_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\,Z(x_1,y_1,z_1,t)\,dt
\end{aligned}\right.$$

le quali determinano i valori di u, v, w nel punto (x_1, y_1, z_1, t_1) in funzione dei valori che u, v, w e le derivate parziali di esse rispetto ad x, y, z, t acquistano su Σ_a e Σ_b.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.* Nota di Tullio Levi-Civita, presentata dal Socio Cerruti.

Questo lavoro sarà pubblicato nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra la teoria cinetica dei gas.* Nota del dott. Carlo Del Lungo, presentata dal Corrispondente Roiti.

In una Nota pubblicata nei *Comptes rendus* del 4 maggio passato, J. Bertrand ha mosso un attacco decisivo contro la teoria cinetica dei gas, dichiarando assolutamente assurdo il noto teorema di Maxwell sulla distribuzione delle velocità molecolari, e ciò, fondandosi sulla prima dimostrazione che ne diede il Maxwell.

L. Boltzmann ha replicato con una lettera (*Compt. rend.* 26 maggio) nella quale, pure accettando il calcolo del Bertrand, dice, che aver dimostrata

erronea la prima dimostrazione di Maxwell non prova punto la falsità del teorema: e invitando il Bertrand ad esaminare le altre dimostrazioni che egli e diversi altri ne han dato, aggiunge che, se una di queste è esatta, il teorema è vero.

Il Bertrand risponde che la seconda dimostrazione di Maxwell gli pare anche meno accettabile della prima, e che tutte le altre non gli ispirano alcuna fiducia, perchè fondate sulla considerazione degli urti molecolari, dei quali, dice, non si sa nulla. Le sole equazioni per la soluzione del problema son quelle date da lui, e contengono una funzione incognita; ciò gli sembra una buona ragione per non accettare quelle che non ne contengono.

Questa critica ci sembra troppo assoluta. Convien ricordare che tutta la teoria dei gas è fondata sull' ipotesi del movimento delle molecole, considerando le loro collisioni soggette alle leggi generali della meccanica. L' applicazione ci conduce a trovare col calcolo la legge di Boyle, l' indipendenza dell' attrito dalla densità, ed altre proprietà confermate dall' esperienza. Quindi, fino a prova in contrario, dobbiamo ritenere tale ipotesi come conforme alla realtà; e, se fondandosi su di essa, si può dimostrare il teorema di Maxwell, il teorema viene ad avere lo stesso grado di probabilità dell' ipotesi, cioè grandissimo e prossimo alla certezza.

Premesso questo esaminiamo la questione.

Il Maxwell nella sua prima Memoria [1] ammise, che le componenti della velocità delle molecole secondo tre direzioni ortogonali, erano fra loro indipendenti; quindi indicando con $f(x)\,dx$ il numero di molecole che hanno una velocità secondo l'asse X compresa fra x e $x + dx$, il numero di quelle che secondo i tre assi hanno le componenti della velocità comprese fra x e $x + dx$, y e $y + dy$, z e $z + dz$, è dato da

$$f(x)\,f(y)\,f(z)\,dx\,dy\,dz\,;$$

e ne risulta allora che il numero di molecole che hanno una velocità totale compresa fra v e $v + dv$ è

$$\frac{4\mathrm{N}}{\alpha^3 \sqrt{\pi}}\, v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}\, dv\,;$$

dove N è il numero totale delle molecole e α una costante che dipende dalla densità e dalla temperatura del gas.

Nella sua seconda Memoria [2] Maxwell riconobbe che la sua asserzione fondamentale poteva esser discutibile « *may appear precarious* »; e dimostrò lo stesso teorema partendo da un altro principio. Anche a questa se-

(1) Philos. Mag. vol. 19, 1860; Scient. papers. vol. I, p. 377.
(2) Philos. Mag. vol. 35, 1868; Scient. papers. vol. II, p. 43.

conda dimostrazione, Boltzmann mosse qualche critica, e la modificò adottandola poi nei suoi lavori [1].

O. E. Meyer dimostrò il teorema di Maxwell con metodo nuovo, ma che sollevò alcune critiche: l' autore stesso le riconobbe giuste e modificò la sua dimostrazione nella seconda edizione della *Theorie des Gase* [2].

Ma era rimasta sempre incertezza sul vero valore della prima dimostrazione di Maxwell, la quale aveva certo, rispetto a queste altre, il merito di una grande semplicità. Il Meyer dice in tutte e due le edizioni che il principio enunciato dal Maxwell è *giusto ed evidente di per sè*, ma che per rigore di metodo deve esser dimostrato e non ammesso a priori; e così egli fa [3].

P. G. Tait. nella sua Memoria, *On the foundation of the kin. theory of Gases*, è ancora più esplicito, e giudicando inutilmente intricate le dimostrazioni di Boltzmann, Meyer e altri, ritorna alla prima dimostrazione di Maxwell, sostenendone l'esattezza, e dichiarando che Maxwell, dicendo per scrupolo, poter apparire precario quel principio fondamentale, non intese mai dire che lo fosse in realtà [4].

Stando così le cose è venuta molto opportuna la Nota di J. Bertrand a provare rigorosamente, che non è vera l' asserzione aprioristica di Maxwell, cioè, che in un sistema di molecole in movimento, le componenti della velocità secondo tre assi ortagonali, debbano dirsi sempre indipendenti tra loro.

Il Bertrand, indicando con $f(v)\,dv$ il numero di molecole che hanno una velocità compresa fra v e $v + dv$, dimostra che il numero di quelle aventi secondo l' asse X una velocità compresa fra x e $x + dx$ è

$$[1] \qquad \varphi(x)\,dx = dx \int_x^\infty \frac{f(v)\,dv}{2v};$$

e il numero di quelle che hanno secondo i tre assi le componenti della velocità comprese fra x e $x + dx$, y e $y + dy$, z e $z + dz$, non è come vorrebbe il principio di Maxwell

$$[2] \qquad \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)\,dx\,dy\,dz$$

ma è invece

$$[3] \qquad \frac{f(v)\,dx\,dy\,dz}{4\pi v^2}.$$

[1] Wiener Sitzungsber. 1868, Bd. 58; 1872, Bd. 66; 1887, Bd. 95. Vorles. uber Gastheorie, Leipzig 1896.

[2] Die Kin. Theorie des Gase. Breslau 1877, 2. Aufl. 1895.

[3] 2te Aufl. Mat. Zus. p. 29.

[4] Trans. of the R. S. of Edimburg. vol. 33-36; Proceed. 1888, Jan. 30.

La funzione $f(v)$ soddisfa alla sola condizione

$$\int_0^\infty f(v)\, dv = \mathrm{N}$$

essendo N il numero totale delle molecole; quindi, egli dice, essa rimane incognita.

Il calcolo del Bertrand è giusto; ma egli considera un sistema di molecole, le cui velocità variabili non sono soggette se non alla condizione espressa dalla funzione arbitraria $f(v)$; la quale non contenendo il tempo, esprime solo che, il numero di molecole che posseggono una data velocità, si mantiene costante.

Ma un sistema isolato di N molecole di un gas a temperatura costante, è soggetto a qualche condizione ben definita; ovvero, in altre parole, la distribuzione delle velocità molecolari espressa dalla funzione $f(v)$ è il risultato delle condizioni meccaniche del sistema, le quali, con qualche restrizione relativa alle mutue azioni molecolari, ci sono note in generale.

Infatti decomponendo le N velocità $v_1, v_2 \ldots v_n$ nelle tre componenti x, y, z, secondo tre assi ortogonali, pur essendo queste velocità v, x, y, z funzioni del tempo, possiamo stabilire fra di esse le seguenti relazioni

$$[4] \qquad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots v_n = \frac{\mathrm{M}}{m}\omega^2 = \mathrm{N}\omega^2$$

$$[5] \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \dfrac{\mathrm{M}}{m} a = \mathrm{N}a \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \dfrac{\mathrm{M}}{m} b = \mathrm{N}b \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \dfrac{\mathrm{M}}{m} c = \mathrm{N}c \end{cases}$$

dove m è la massa di ciascuna molecola, M la massa totale del gas, a, b, c le componenti di velocità del centro di massa, e ω^2 la media dei quadrati delle velocità, la quale è costante, essendo costante la temperatura. Se il gas è in quiete sarà $a = b = c = 0$.

Rifacciamo con queste condizioni il calcolo del Bertrand. Sia $\mathrm{N}f(v)\, dv$ il numero delle molecole che hanno la velocità totale compresa fra v e $v + dv$; il numero di quelle che hanno secondo un asse la velocità compresa fra x e $x + dx$, sarà $\mathrm{N}\varphi(x)\, dx$, essendo per la [1]

$$\varphi(x) = \int_x^\infty \frac{f(v)\, dv}{2v}.$$

Derivando rapporto ad x, e ponendo poi v in luogo di x, avremo

$$[6] \qquad f(v) = -2v\,\varphi'(v)\,.$$

Il problema si riduce quindi a cercare la forma di φ.

La funzione $\varphi(x)$ esprime la probabilità relativa, che una molecola abbia secondo un asse, una velocità x; e, poichè una velocità $-x$ è egualmente probabile come una $+x$, deve essere $\varphi(x) = \varphi(-x)$, ovvero

$$\varphi(x) = \psi(x^2)\,.$$

Il suo valore come quello di una probabilità sarà per tutti i valori di x, positivo e compreso fra 0 e 1.

E poichè anche $f(v)$ esprime una probabilità, e deve quindi essere positiva, deve essere per la [6] sempre

$$\varphi'(x) < 0\,.$$

Dunque la φ è sempre decrescente e avrà il suo massimo per $x = 0$ e il minimo per $x = \pm\infty$.

Deve inoltre soddisfare alle seguenti relazioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1 \quad \text{ovvero poichè } \varphi(x) = \varphi(-x) \quad \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

e poichè

$$\int_0^{\infty} f(v)\,dv = 1 \quad \text{per la [6] sarà} \quad \int_0^{\infty} x\,\varphi'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$$

per le [5] sarà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x)\,dx = 0$$

essendo il gas in quiete; e per la [4]

$$\int_0^{\infty} x^3\,\varphi'(x)\,dx = -\frac{\omega^2}{2}$$

ponendo x in luogo di v.

Una funzione che soddisfa a tutte queste condizioni è quella trovata da Maxwell e da tutti gli altri, cioè

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \text{dove} \quad \alpha^2 = \frac{2}{3}\omega^2.$$

Tale essendo dunque la forma della funzione $\varphi(x)$ ne resulta per la [6]

$$f(v) = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}.$$

Ma allora sembra esser vero il principio di Maxwell, che le tre componenti della velocità siano indipendenti fra loro, perchè sono identiche le due [2] e [3], cioè si ha

$$\varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z) = \frac{f(v)}{4\pi v^2}.$$

Resta quindi da domandarsi, come, Maxwell partendo da un principio erroneo abbia potuto dare la vera forma della funzione φ; e come, dall'altro lato Meyer, Boltzmann e altri giungendo per altra via allo stesso resultato, vengano a provare vera l'asserzione di Maxwell.

Crediamo che il procedimento del presente lavoro risolva questa questione. Il principio ammesso da Maxwell non è vero in generale, cioè nel caso di un sistema di particelle in movimento, le cui velocità variabili dipendano da una funzione arbitraria $f(v)$. Ma in un sistema isolato di molecole gassose costituenti una massa di gas omogeneo e in quiete, la funzione $f(v)$ della distribuzione non è arbitraria, perchè dipende dai principî generali della meccanica, della conservazione della forza viva e della quantità di moto. In tal caso l'asserzione di Maxwell è vera; e può stabilirsi *a priori* l'indipendenza delle componenti delle velocità secondo tre direzioni ortogonali.

Infatti fra le componenti delle velocità molecolari abbiamo le relazioni [5]

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0 \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0 \end{cases}$$

le quali dimostrano che le componenti x sono fra loro dipendenti, ma sono indipendenti dalle y e dalle z.

Fra i quadrati delle medesime velocità vi è la relazione

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+x_2^2+y_2^2+z_2^2)+\cdots+(x_n^2+y_n^2+z_n^2)=\mathrm{N}\omega^2$$

e indicando con P la pressione e V il volume si ha

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{M}\omega^2}{3\mathrm{V}}=\frac{m\mathrm{N}\,\omega^2}{3\mathrm{V}}.$$

Ma la pressione sopra un piano parallelo al piano yz è data da

$$\frac{m}{\mathrm{V}}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2);$$

e siccome, essendo il gas in quiete, sta in fatto che la pressione è eguale in ogni verso, deve essere

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\dfrac{\mathrm{N}\omega^2}{3} \\ y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\dfrac{\mathrm{N}\omega^2}{3} \\ z_2^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=\dfrac{\mathrm{N}\omega^2}{3} \end{array}\right.$$

quindi, anche rispetto alla conservazione della forza viva, le velocità x sono indipendenti dalle velocità y e z.

Come si vede, la condizione perchè sia vero il principio di Maxwell, è che le molecole abbiano tutte la stessa massa, cioè che il gas sia omogeneo.

Paleontologia. — *Notizia sopra la ittiofauna sarda.* Nota del prof. D. Lovisato, presentata dal Socio Capellini.

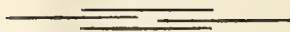
Paleontologia. — *Intorno agli avanzi di Coccodrilliano scoperti a San Valentino (provincia di Reggio Emilia) nel 1886.* Nota del dott. Vittorio Simonelli, presentata dal Socio Capellini.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Blaserna, a nome anche del Socio Ferraris, relatore, legge una Relazione sulla Memoria del dott. F. Lori, intitolata: *Influenza degli sforzi di tensione e di compressione sulle proprietà magnetiche del ferro*, concludendo col proporre l'inserzione del lavoro negli Atti accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

P. B.

INDICE DEL VOLUME IV, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1896 — 1° SEMESTRE.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

E

F

G

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

Z

INDICE DELLE MATERIE

A

B

C

ERRATA-CORRIGE

A pag. 307 lin. 20 invece di 140^m leggasi 1400^m

» » 310 » 24 » $e \times 10^{\frac{h}{6500}}$ » $e \times 10^{-\frac{h}{6500}}$

» » 317 » 3 » *distillazione* » *distribuzione*

» » 348 » 34 » *alinf-* » *linfa-*

» » 359 » 3, 11, 13, e a pag. 360 linea 17, invece di *asse t*, leggasi *parallela all'asse t condotta pel punto* (x_1, y_1, z_1, t_1).

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII.

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1896.

Volume V.° — Fascicolo 1°

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1896) 1° Sem. Fasc. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-10°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

CONCORSI A PREMI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1896.

Volume V.° — Fascicolo 2°

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all' autore. - *d)* Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1896) 1° Sem. Fasc. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-11°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Gennaio 1896.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1896.

Volume V.° — Fascicolo 3°

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1896) 1° Sem. Fasc. 3°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-IV. (1895). — Fasc. 1°-11°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1896.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 febbraio 1896.

Volume V.° — Fascicolo 4°

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
» 2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-V. (1896) 1° Sem. Fasc. 4°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-IV. (1895).
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 febbraio 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1896.

Volume V.° — Fascicolo 5°

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1896) 1º Sem. Fasc. 5º.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-V. (1895).
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.º — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII.

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 *marzo* 1896.

Volume V.° — Fascicolo 6°

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1896) 1° Sem. Fasc. 6°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-V. (1896) 1° Sem. Fasc. 1°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Marzo 1896.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 12 aprile 1896.

Volume V.° — Fascicolo 7°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-V. (1892-96) 1° Sem. Fasc. 7°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V. (1892-96) Fasc. 2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 12 aprile 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII.

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 26 *aprile* 1896.

Volume V.° — Fascicolo 8°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-V. (1892-96) 1° Sem. Fasc. 8°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V. (1892-96) Fasc. 2°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 26 aprile 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1896.

Volume V.° — Fascicolo 9°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1892-96) 1° Sem. Fasc. 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-V. (1892-96) Fasc. 3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 maggio 1896.

Volume V.° — Fascicolo 10°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1892-96) 1° Sem. Fasc. 10°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-V. (1892-96) Fasc. 3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 maggio 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII.

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1896.

Volume V.° — Fascicolo 11°

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-V. (1892-96) 1° Sem. Fasc. 11°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-V. (1892-96) Fasc. 3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

(**) Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 giugno 1896.

Volume V.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il avoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-V. (1892-96) 1° Sem. Fasc. 12°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V. (1892-96) Fasc. 3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 giugno 1896.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.